МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Кафедра математики и методики обучения математике

**Лейман Анастасия Владимировна**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

# ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ У ОБУЧАЮЩИХСЯ 9 КЛАССА В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы
Математика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой
проф., д-р пед. наук Шкерина Л.В.
______________________________

Научный руководитель
канд. пед. наук, доцент Кейв М.А.
______________________________

Дата защиты
______________________________

Обучающийся
Лейман А.В.
______________________________

Оценка______________________

Красноярск 2021

## Оглавление

## Введение

В современном обществе результат в жизни каждого человека находится в зависимости с его возможностями отчетливо размышлять, закономерно анализировать, а также понятно формулировать собственные идеи, мысли. Способность грамотно анализировать, а также закономерно размышлять, необходима человеку в любой деятельности: игре, учении, работе.

Общепризнанно, что именно математика, как один из обязательных школьных предметов, обладает большим потенциалом в развитии у обучающихся умений и опыта построения правильных рассуждений и логических умозаключений.

Возможность человека хорошо размышлять, закономерно анализировать собственные идеи и мыли является одной из основных задач в образовании XXI века.

При построении математической теории нужно всякий раз отчетливо осознавать, какие утверждения приняты за исходные положения; каковы условия и заключения той или иной доказываемой теоремы. За осознанием структуры математической теоремы следует понимание методов ее доказательства. Специальное рассмотрение и уточнение всех этих понятий в процессе обучения математике способствует воспитанию у обучающихся культуры логического мышления.

Однако наблюдения за практикой обучения обучающихся математике показывают, что у большинства школьников недостаточно на высоком уровне сформированы логические умения. Например, обучающиеся часто путаются в понятиях: пересечения и объединения множеств; системы и совокупности уравнений (неравенств); необходимого и достаточного условий;

в употреблении союзов «и», «или» при формулировке математических утверждений; допускают самые разнообразные логические ошибки в рассуждениях и доказательствах. Одна из возможных причин логических ошибок большинства школьников заключается в отсутствии в практике обучения математике специальной методики формирования математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики.

В связи с этим актуальным становится поиск и разработка специальной методики формирования у обучающихся 9 класса математической грамотности в области математической логики.

**Гипотеза исследования:** если в процессе математической подготовки обучающихся 9 класса применять специальную методику обучения основам математической логики, то это будет способствовать формированию математической грамотности.

**Цель исследования:** разработка методики формирования математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики.

**Объект исследования:** математическая подготовка обучающихся 9 класса.

**Предмет исследования:** дидактические условия формирования математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики.

**Задачи исследования:**

1) Охарактеризовать понятие «математическая грамотность» и описать роль, место и значение элементов математической логики для формирования математической грамотности у обучающихся 9 класса.

2) Разработать диагностическую карту для оценки и измерения уровня сформированности математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики.

3) Описать основные дидактические условия формирования математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики.

4) Разработать цикл уроков по теме «Элементы математической логики» в рамках математической подготовки обучающихся 9 класса.

5) Провести педагогический эксперимент, проанализировать и описать его результаты.

# Глава 1. Теоретические основания для формирования математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики

## 1.1. Математическая грамотность обучающихся 9 класса в области математической логики

Прежде, чем говорить о данном понятии как математическая грамотность, необходимо иметь представление о принципах функциональной грамотности. А.А. Леонтьев определяет функционально грамотного человека, как того, «который способен использовать все регулярно приобретаемые в течение жизни знания, умения и навыки для решения максимально широкого диапазона жизненных задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений» [15, с. 125]. Функциональная грамотность есть показатель социального благополучия. В скором времени функциональная грамотность станет определяющим фактором развитости цивилизации, государства, нации, социальной группы, отдельной личности.

7 мая 2018 года Президентом Российской Федерации был издан указ, в котором на Правительство была возложена задача обеспечить глобальную конкурентоспособность российского образования, вхождение Российской Федерации в число 10 ведущих стран мира по уровню качества общего образования [34].

Развитие функциональной грамотности основывается, непосредственно, на овладении предметными знаниями, понятиями, ведущими идеями, в личных сферах человеческой деятельности, а также в межличностном общении и социальных отношениях. Государственная программа РФ «Развитие образования» на 2018-2025 гг. нацелена на повышение позиций РФ в вышеупомянутых международных исследованиях [7].

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что математическая составляющая является неотъемлемой частью функциональной грамотности. Люди, способные формулировать свои мысли, свои идеи, рассуждать логически нуждаются в современном мире. Понятие «математическая грамотность» является центральным в рамках предстоящего международного исследования PISA-2021 и определяется следующим образом: «Математическая грамотность – это способность человека мыслить математически, формулировать, применять и интерпретировать математику для решения задач в разнообразных практических контекстах. Она включает в себя понятия, процедуры и факты, а также инструменты для описания, объяснения и предсказания явлений. Она помогает людям понять роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые должны принимать конструктивные, активные и размышляющие граждане в 21 веке» [37]. В рамках исследования математическое рассуждение является основой «математическая грамотность». Однако наблюдения за реальной практикой обучения математике показывают, что школьники не на достаточно высоком уровне владеют логическими умениями, испытывают трудности при доказательстве математических фактов и обосновании выводов, путаются в понятиях «необходимое условие» и «достаточное условие», что затрудняет усвоение математики и порождает немало проблем. В связи с этим актуальным становится поиск и разработка специальной методики обучения основам математической логики, направленной на формирование математической грамотности у обучающихся 9 класса.

Можно предположить, что в основе математической грамотности лежит применение математических моделей на практике в повседневной жизни.

Уровень математического образования является одним из ключевых показателей успешной жизни в современном обществе. Изучение математики также является центральным звеном в образовании, формируя когнитивные навыки у обучающихся, в частности логическое мышление, тем самым повышая уровень восприятия учебного материала обучающимися и по другим дисциплинам [21].

«Математическая грамотность – способность человека определять и понимать роль математики в мире, в котором он живет, высказывать хорошо обоснованные математические суждения и использовать математику так, чтобы удовлетворять в настоящем и будущем потребности, присущие созидательному, заинтересованному и мыслящему гражданину» [7,с.99].

Во всех странах мира исследование математической грамотности осуществляется «Организацией экономического сотрудничества и развития» (ОЭСР) в рамках Международной программы по оценке образовательных достижений обучающихся (англ. Programme for Internatio nal Student Assessment, PISA) — заданий, оценивающие математическую грамотность школьников в разных странах мира и умение применять знания, полученные во время посещения уроков математики, на практике.[31]

В заданиях, которые проверяют математическую грамотность школьников, можно выделить примерные УУД (универсально-учебные действия), которые необходимы для современного человека. [30]

Обучающийся:

- находит и извлекает математическую информацию в различных заданиях;

-применяет математические знания для решения разного рода проблем;

- формулирует математическую проблему на основе анализа ситуации;

- интерпретирует и оценивает математические данные в контексте лично значимой ситуации;

- интерпретирует и оценивает математические результаты в контексте национальной или глобальной ситуации.

Для того чтобы обучающимся успешно выполнять задания, которые связаны с развитием таких важнейших общеучебных умений, как например: *способность внимательно прочитать некоторый связный текст, выделить в приведенной в нем информации только те факты и данные, которые необходимы для получения ответа на поставленный вопрос.* Содержание этого понятия уточняется следующим образом. Под математической грамотностью понимается способность обучающихся:

– распознавать проблемы, которые возникают в окружающей действительности, которые могут быть решены средствами математики;
– формулировать эти проблемы на языке математики;
– решать эти проблемы, используя математические факты и методы;
– анализировать использованные методы решения;
– интерпретировать полученные результаты с учетом поставленной проблемы;
– формулировать и записывать результаты решения. [22]

Формой успеха получения знаний является: усвоение и применение полученных знаний. [6]

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования, среднего общего образования, трактует основные метапредметные результаты освоения основной образовательной программы основного общего образования, с помощью которых можно охарактеризовать уровень математической грамотности в области математической логики, а именно:

- умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы;
- умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач [36].

В федеральном государственном стандарте общего основного образования предметные результаты освоения основной образовательной программы основного общего образования, с помощью которых можно охарактеризовать уровень математической грамотности в области математической логики следующие[24]:

- овладение символьным языком алгебры, приѐмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;
- овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические

представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

- формирование умений формализации и структурирования информации, умения выбирать способ представления данных в соответствии с поставленной задачей — таблицы, схемы, графики, диаграммы, с использованием соответствующих программных средств обработки данных.

С позиции системно-деятельностного подхода в структуре математической грамотности условно выделим два основных компонента: когнитивный и праксиологический.

Когнитивный компонент оценивает знания, которые нужны обучающимся для решения задач разного уровня. Праксиологический компонент включает совокупность умений, навыков и способов деятельности обучающихся, и их применение в собственной учебной деятельности [32].

Для диагностики уровня сформированности основ математической грамотности у обучающихся в области «Математическая логика» необходимо выделить и охарактеризовать уровни их сформированности [8].

Условно выделим три уровня сформированности математической грамотности: низкий, средний, высокий.

В рамках данного исследования для удобства измерения и оценки уровня сформированности математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики нами разработана диагностическая карта (таблица 1).

Таблица 1

*Диагностическая карта для измерения и оценки уровня сформированности математической грамотности в области математической логики у обучающихся 9 класса*

| **Компонент математической грамотности** | **Уровень сформированности** | **Показатели сформированности** |
|---|---|---|
| Когнитивный (знать) | Высокий | Обучающийся демонстрирует:<br><br>– знание понятий, методов и правил, которые необходимы для решения задач. |
| | Средний | Обучающийся демонстрирует:<br><br>- знание базовых понятий, методов и правил, которые необходимы для решений задач. Решение типовых задач |
| | Низкий | Обучающийся демонстрирует:<br><br>- знание базовых понятий, методов и правил, которые необходимы для решения задач |
| Праксиологический (уметь) | Высокий | Обучающийся демонстрирует:<br><br>-Умение решать логические задачи высокого уровня сложности<br><br>-Умение размышлять, строить самостоятельно алгоритм действий, уметь объяснять решение задачи |
| | Средний | Обучающийся демонстрирует:<br><br>-Умение решать логические задачи повышенной трудности<br><br>-Умение применять методы решения логических задач. |

| | | |
|---|---|---|
| | Низкий | Обучающийся демонстрирует:<br>-Умение решать логические задачи базового уровня сложности<br>-Умение применять знания при решении элементарных задач в одно действие. |

## 1.2.Дидактические условия формирования математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики

Педагогическая система может успешно функционировать и развиваться только при соблюдении определенных дидактических принципов и условий.[15]

Под дидактическими условиями можно понимать организацию процесса обучения и воспитания, отбор содержания форм, методов и средств обучения и воспитания, для достижения образовательныхзадач [4].

В рамках нашего исследования особое значение мы отводим таким дидактическим условиям, как: особое содержание обучения и специальные формы организации обучения, направленные на формирование математической грамотности в области математическая логика.

Для формирования логического мышления необходима особая методическая система обучения математике, включающая особое содержание и специальные формы, методы и средства обучения.[9]

Под содержанием обучения мы будем понимать не только некоторый объем теоретического учебного материала, но и комплекс задач, заданий и упражнений, а так же сведений о ценности предметных знаний и способах их применения при решении разнообразных задач [17].

На уроках математики необходимо систематически использовать задачи и задания, способствующие целенаправленному развитию логического мышления обучающихся; умений проводить доказательные рассуждения и аргументировать свои выводы. К таким задачам и заданиям мы относим: разнообразные логические задачи; задания на анализ рассуждений (софизмы); задания на конструирование разнообразных математических утверждений и их доказательство и др.

Приоритетными методами обучения остаются: объяснительно-иллюстративный метод; метод обобщения и систематизации учебного материала; проблемный метод и др.

Среди организационных форм обучения, направленных на развитие математической грамотности, мы выделяем следующие: устные зачёты; комментирование и анализ решений; логическое обоснование и аргументирование ответов и выводов; самостоятельное доказательство математических фактов и др.

Под логическими задачами будем понимать, упражнения для мыслительной деятельности, для решения, которых ребенок должен владеть такими мыслительными операциями как анализ, синтез, классификация, обобщение и др., уметь строить цепочки рассуждений, делать логические умозаключения и выводы [20].

В качестве примера, приведем несколько логических задач:

*Задача 1.* Три дочери балерины Макей - Анна, Вера и Лена, живут в разных городах. Они стали известными в разных видах спорта: волейболе, баскетболе и футбле. Все они живут в разных городах, поэтому Анна часто звонит им во Францию, Россию и Чикаго. Известно, что: Анна живет не во Франции, а Лена не в России; француженка не и грает в футбол; та, кто живет в России, играет в волейбол; Лена равнодушна к баскетболу. Где живет Вера, и какова ее профессия? [33].

*Задача 2*. В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Котову, Иванову, Сидоров и Купонин поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-ый класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

- Котов: «Я убирал 9-ый класс, а Сидоров — 7-ой».
- Иванов: «Я убирал 9-ый класс, а Котов — 8-ой».
- Сидоров: «Я убирал 8-ой класс, а Иванов - 10-ый».

Купонина не было на тот момент в школе. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик? [33].

*Задача 3.* На олимпиаде по математике студенты педагогичсекого университета: Сидоров, Теплов, Иванов, Курочкин заняли первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три ответа: Курочкин – первый или Теплов – второй; Иванов – первый или Сидоров – четвертый; Курочкин – второй или Теплов– третий. Как распределились места, если в каждом ответе только одно утверждение истинно? [2].

Следовательно, формирование основ математической грамотности и опыта логических умозаключений не может развиваться вне активной деятельности самого школьника и без его собственных усилий.

Методы активного обучения - это форма взаимодействия обучающихся и учителя, при которой учитель и обучающиеся взаимодействуют друг с другом в ходе урока и обучающиеся здесь не пассивные слушатели, а активные участники урока. [13].

Примеры методов активного обучения: кейс – метод, «мозговой штурм», «мозговая эстафета», метод проектов, деловая игра и др.[11]

Под формами организации обучения мы понимаем внешнее выражение согласованной деятельности учителя и обучающихся, осуществляемой в определенном порядке и режиме: урок, экскурсии, домашняя учебная работа, консультации, семинар, факультативы, практикумы, дополнительные занятия [3].

Для формирования основ математической грамотности в процессе математической подготовки школьников, наиболее продуктивными формами обучения, на наш взгляд, являются следующие: дидактические игры; интеллектуальные разминки (логические викторины, тесты); практикумы по решению логических задач; проблемные семинары; деловые игры. В ходе таких форм организации обучения происходит постоянная смена деятельности – ученики слушают, думают, отвечают на вопросы, анализируют, делают выводы и др. [35].

## Выводы по 1 главе

В рамках данного исследования под математической грамотностью будем понимать способность человека определять и понимать роль математики в мире, в котором он живет, высказывать хорошо обоснованные математические суждения и использовать математику так, чтобы удовлетворять в настоящем и будущем потребности, присущие созидательному, заинтересованному и мыслящему гражданина.

Для оценки и измерения уровня сформированности математической грамотности у обучающихся 9 класса условно выделены два компонента: когнитивный и праксиологический.

Составлена диагностическая карта для оценки и измерения уровня сформированности математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики, содержательно характеризующая следующие уровни: высокий, средний, низкий.

Выделены специальные дидактические условия формирования математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики:

а) особое содержание обучения (сведения из раздела «Математическая логика», логические задачи, методы решения логических задач);

б) особые методы, формы и средства обучения (логические игры, логические карты для доказательства математических утверждений и др.).

# Глава 2. Методика формирования математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики

## 2.1. Цикл уроков по теме «Элементы математической логики» в рамках математической подготовки обучающихся 9 класса

На протяжении долгого времени многие известные математики работали и размышляли над тем, как повысить уровень математической грамотности у обучающихся в школе, у студентов. Авторы: Т.Н. Купреева, Е.Ю. Лукичева, Е.В. Петракович, Е.В. Кочурова и др.[12] отразили в своих работах проблему формирования у обучающихся логических знаний и умений на уроках математики.

В наше время в общеобразовательных школах начинают вводить элементы математической логики.
В учебниках по алгебре для 7-9 классов, автора Ш.А. Алимова, есть рубрика, которая содержит занимательные задачи, но таких задач небольшое количество. Так, например, во всем учебнике за 9 класс, присутствует всего 3 задачи, в ходе решения которых необходимо провести логические умозаключения. Например:

1. Сколько раз за сутки часовая и минутная стрелки совмещаются?
2. Тремя одинаковыми цифрами записать, возможно, большее число.
3. Сколько всего прабабушек и прадедушек было у всех твоих прабабушек и прадедушек?[1]

В учебнике по алгебре для 9 класса, автора Ш.А. Алимова, имеется теоретический и практический материал по теме «Множества. Логика». [29].

В рамках изучения данной темы рассматриваются основные понятия из теории множеств и математической логики: множество; круги Эйлера; операции над множествами; высказывание; логические операции и др. В учебнике присутствуют следующие параграфы: «Прямая и обратная теоремы», «Необходимые и достаточные условия», «Противоположные теоремы» и др.

Проанализировав данный учебник можно сделать вывод о том, что он содержит необходимый теоретический материал по математической логике, но недостаточно практических заданий, которые бы способствовали развитию логического мышления у обучающихся [1].

В учебнике по алгебре для 9 класса (для школ и классов с углубленным изучением математики), автора Н.Я. Виленкина, присутствует глава «Элементы теории множеств», в которой рассматриваются основные понятия теории множеств. Однако отсутствует теоретический и практический материал.

Представим вариант поурочного планирования уроков по теме «Элементы математической логики» для школьного курса математики "Алгебра 9 класс" (таблица 2).

В ходе данных уроков, обучающиеся 9 класса познакомятся: с основами математической логики и её историей возникновения; с классификацией логических задач и многообразием подходов к решению таких задач.

Таблица 2

**Поурочное планирование**

**"Элементы математической логики"**

| *№ урока* | *Наименование тем* | *Наименование разделов в ШКМ* | *Содержание* | *Объём часов* |
|---|---|---|---|---|
| *1* | *«История возникновения языка* | Элементы прикладной математики | Софизмы, парадоксы, определение | *1* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *математической логики»* | | логики, идея создания универсального языка (Лейбниц, Буль и др.), предмет математической логики, троичная и нечетка логика. | |
| *2* | *«Алфавит математической логики»* | Элементы прикладной математики | Высказывание, истинностные значения высказываний, высказывания простые и составные, логические операции, перевод предложений с обычного языка на язык символов математической логики и обратно | *1* |
| *3* | *«Формулы математической логики»* | Элементы прикладной математики | Определение формулы, значение формул, виды формул, таблица истинностных значений для формулы. | *1* |
| *4* | *«Логическое следствие»* | Элементы прикладной математики | Логические рассуждения, определение логического следствия и способы его установления (по определению, от противного), задачи на доказательство истинности логических рассуждений, правило контрапозиции, метод дедукции. | *1* |
| *5* | *«Логическая структура* | Элементы прикладной | Виды теорем: прямая, | *2* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *математических теорем»* | математики | обратная, противоположная, противоположная обратной; их логическая структура и истинностные значения; примеры; задачи на формулировку всех видов теорем. | |
| *6* | *«Логические задачи и методы их решений»* | Элементы прикладной математики | Табличный метод, с помощью графов, с помощью языка математической логики и др. | *2* |
| | | | Всего | *8* |

После изучения обучающиеся должны:

*Знать:* основную идею возникновения математической логики; основные понятия математической логики из раздела «Алгебра высказываний» (высказывание, истинностные значения высказываний, логические операции, формулы алгебры высказываний, логическое следствие, «необходимое» и «достаточное» условие, виды математических теорем и их структура); различные методы решения логических задач (метод графов, метод таблиц, с помощью языка математической логики и др.).

*Уметь:* распознавать, какого типа логическая задача, и каким способом она может быть решена; убедительно доказывать истинность верных суждений и опровергать ложные умозаключения; определять необходимое и достаточное условие в теореме; составлять различные виды теорем.

*Владеть:* различными способами решения логических задач; навыками решения логических задач; навыками перевода предложений с обычного языка, на язык математической логики;

навыками проведения логических выводов, анализа рассуждений и доказательств теорем.

*Понимать:* важность изучения математической логики и математики в целом и для решения прикладных задач.

*Формы занятий:* лекции, практические занятия, дидактические игры.

**Конспект занятия 1 по теме:**

***«История возникновения языка математической логики»***

*Основная цель:* введение в теорию математической логики — знакомство с историей возникновения математической логики.

*Планируемые результаты:*

*предметные:* знание основной идеи возникновения математической логики как символьного языка «лишенного вольностей языка естественного»; способность к анализу различных парадоксов и софизмов.

*метапредметные:* умение планировать и организовывать учебную деятельность; способность к анализу новой информации; проявление критичности мышления и навыков самоконтроля; умение аргументировать свои умозаключения в ходе рассмотрения различных парадоксов и софизмов.

*личностные:* умение проявлять учебно-познавательный интерес к новому материалу, стремление к личностному развитию и самообразованию.

*Этапы занятия:*

1. Введение.
2. Практикум по разбору математических софизмов.
3. Постановка домашнего задания.
4. Подведение итогов.

Здравствуйте, ребята! Сегодня я проведу экскурс в историю математической логики как науки, вы познакомитесь с понятием и предметом логики.

Встречались ли вы на уроках или где-то в повседневной жизни с парадоксами?

Парадокс - это высказывание, суждение, которое невозможно объяснить, истинное оно или ложное.

Эпименид — легендарный греческий поэт, живший на Крите в VI в. до н. э. написал один из первых свой парадокс. По преданию, *Эпименид утверждал, что все жители острова Крит лжецы. Верно ли это утверждение, если учесть, что сам Эпименид родом с острова Крит?*

Этот парадокс именуется «королем логических парадоксов». До сих пор разрешить этот легендарный пародокс никому не удалось. Считается, что если это высказывание истинно, значит, исходя из его содержания, верно то, что данное высказывание — ложь; но если оно — ложь, тогда то, что оно утверждает, верно; значит, неверно, что данное высказывание — ложь, и, значит, данное высказывание истинно. Таким образом, цепочка рассуждений возвращается в начало. Поэтому данный парадокс и получил столь высокий «титул».

Существует еще несколько известных парадоксов, например:

*«Бог – всемогущий. Может ли он создать такой камень, который бы не смог сам поднять?».*

*«Парадокс брадобрея: говорят, что в некоторой деревне был всего один брадобрей. Он брил всех тех и только тех мужчин, которые не брились сами. Брил ли этот брадобрей самого себя?»* Если он бреет себя сам, то принадлежит к числу тех, кого по закону ему брить нельзя. Если же он не бреет себя сам, то по закону он должен брить себя сам.

А встречались ли вы с таким понятием, как "софизм"?

Софизмы, представляют собой сложные и запутанные рассуждения, с целью ввести в заблуждение. Введен древнегреческими софитами.

Разрешение софизмов способствует развитию логики и человека. Сочинение древнегреческого философа Аристотеля так и называется «Софистические опровержения». Приведем пример из его книги:

*«Если равны половины, то равны и целые. Полупустой стакан равен полуполному; следовательно, пустой стакан равен полному».*

Софизмы зачастую использовали для того, чтобы ввести человека в заблуждение. Без такого оружия в руках, как логика, соперникам софистов в споре было нечего противопоставить, хотя зачастую они и понимали ложность софистических умозаключений. Споры в Древнем мире зачастую заканчивались драками.

Известен также целый ряд математических софизмов.

Например, рассмотрим софизм «Дважды два – пять». Запишем тождество $4:4=5:5$. Вынеся из каждой части тождества общие множители за скобки получим: $4\cdot(1:1)=5\cdot(1:1)$ или $(2\cdot2)\cdot(1:1)=5\cdot(1:1)$. Так как $1:1=1$, то $2\cdot2=5$. Где ошибка?

Ошибка сделана при вынесении общих множителей (4 из левой части и 5 из правой части). Распределительный закон не распространяется на деление. Действительно, $4:4=1:1$, но $4:4\neq4\cdot(1:1)$.

Существуют софизмы, при рассмотрении которых мы можем найти завуалированную ошибку в рассуждениях, но существуют софизмы в которых не сразу видно где обман.

Парадоксы и софизмы показывают, что естественный язык допускает грамматически правильные конструкции, которые выглядят как осмысленные утверждения, но о которых, тем не менее, нельзя в принципе решить, истинны они или ложны.

А застрахованы ли мы от подобных утверждений - «призраков» в математических доказательствах? Как же избежать парадоксов?

Для того чтобы избежать и обезопасить себя от таких вольностей естественного языка возникла идея о создании специального языка - языка математической логики (символической логики).

Эта идея была высказана Готфридом Лейбницем (Саксонский философ, логик, математик, механик, физик, годы жизни: 21 июня 1646 — 14 ноября 1716). Джордж Буль (английский математик и логик, годы жизни 2 ноября 1815 - 8 декабря 1864) — реализовал ее - ввѐл функции, значениями которых являются два: истина или ложь. Что же такое логика? Есть предположения??

Логика - это наука о правилах мышления, изучающая мышление как средство познания, и о законах мыслительных процессов, направленных на обнаружение и обоснование истины. [27]

Помимо классической логики (которая принимает значения «истина» или «ложь»), существует еще и троичная (трехзначная) логика.

Была создана еще в 1920 году Яном Лукасевичем (польский логик, член Польской академии наук, один из главных представителей львовско-варшавской школы, годы жизни:21 декабря 1878 — 13 ноября 1956). Троичная логика принимает три истинностных значения: истина, ложь, неизвестно.[28]

Например, на вопрос парня пойдет ли девушка с ним в кино? Ответ девушки может быть: Да, нет, не знаю.

Существует так называемая нечѐткая логика, в которой рассматриваются истинностные значения из отрезка от 0 до 1 включительно. Многие бытовые приборы оснащены функцией - нечѐткая логика: в фото- и видеокамерах (Sony, Canon, Minolta), в однокнопочном управлении стиральных машин (Siemens, Samsung, Candy), в системе кондиционирования воздуха, автомобильных навигаторах (Opel, Porsche), автоматических коробках передач в автомобилях (Porsche, Renault, Peugeot, Hyundai, Skoda) и других отраслях нашей жизни.

2. Предлагаю вашему вниманию рассмотреть ряд софизмов. Ваша задача определить на каком этапе рассуждений допущена ошибка.

*Софизм «Один рубль не равен ста копейкам»*

Из курса математики мы знаем, что если a=c, b=d, то ab=cd.

Предположим что 1 рубль равен 100 копейкам.

1р=100 к. , тогда 10р=10*100 к.

где a=1р,c=100к.,b=10р, d=10*100к. Пока все верно. Начинаем перемножать, получаем.

10р=100000 к.

Сокращаем на 10 и получаем 1р=10000 к.

*Софизм «Спичка вдвое длиннее телеграфного столба»*

Пусть *а* – длина спички и *в* – длина ручки. Разность между *в* и *а* обозначали через *с.*

Имеем *в-а=с, в=а+с.*

Перемножая два эти равенства по частям, находим: $в^2$-$ав=са+с^2$.

Вычтем из обеих частей *вс*.

Получим: $в^2$-$ав$-$вс=са+с^2$-$вс$, или $в\cdot(в$-$а$-$с)=$-$с\cdot(в$-$а$-$с),$ откуда *в=-с*, но *с=в-а,* поэтому *в=а-в* или *а=2в.*

Предполагаемый ответ учеников: Нельзя делить на *в-а-с=0.*

*Парадокс «Ахиллес и черепаха»*

Ахиллес не может догнать черепаху, потому, что за время, пока Ахиллес достигает черепахи, последняя успевает сместиться на некоторое расстояние вперед; пока Ахиллес преодолевает и это расстояние, черепаха перемещается еще на какое-то расстояние и т.д. до бесконечности. Таким образом, сколь бы стремительно Ахиллес не бежал, черепаха всегда ползет впереди него.[14]

Как вы думаете, как его можно доказать?

Пусть расстояние между Ахиллесом и черепахой 100 м. Пока Ахиллес пробежит эти 100 м, черепаха преодолеет 10 м. Пока Ахиллес пробежит эти 10 м, черепаха проползѐт ещѐ 1 м. За то время, пока Ахиллес будет пробегать этот 1 м, черепаха окажется впереди его на 10 см. И так далее. То есть расстояние между ними всегда будет уменьшаться, но никогда не обратится в ноль, и Ахиллес никогда не догонит черепаху.

Определяем размерность долей, которыми будем отмерять расстояние и понимаем, что это вовсе не софизм, а прямое нарушение законов логики. Следовательно, - доказательство некорректно.

3. Постановка домашнего задания: найти интересные математические парадоксы или софизмы и рассказать о них на следующем занятии.

4. Подведение итогов.

**Конспект занятия 2 по теме:**

***«Алфавит математической логики»***

*Основная цель:* познакомить учащихся с алфавитом математической логики; формирование умений перевода предложений с обычного языка, на язык математической логики и обратно.

*Планируемые результаты:*

*Предметные:* знание определений понятий: «высказывание», «простое и составное высказывание», «истинностное значение»; знание определений логических операций (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция); умение переводить предложения с обычного языка, на язык математической логики; умение определять истинность сложных высказываний.

*Метапредметные:* умение создавать модели изучаемых объектов с использованием знаково – символических средств.

*Личностные:* познавательная активность, положительная мотивация к изучению математической логики.

*Этапы занятия:*

1. Постановка цели занятия.
2. Выступление обучающихся.
3. Теоретическая часть.
4. Решение практических заданий.
5. Подведение итогов.

1. Продолжаем знакомиться с такой наукой как математическая логика.

Сегодня познакомимся с одним из основных понятий мат. логики – высказыванием. А так же рассмотрим логические операции и научимся переводить предложения с обычного языка на язык символов математической логики и обратно.

2. Для начала послушаем выступления учащихся с докладами.

3. Высказывание – повествовательное предложение, относительно которого можно утверждать истинно оно или ложно.

Определим, какие из предложений являются высказыванием, и установим их истинность:

(***A***) «Число 6 больше числа 2» – высказывание, истинно;

(***B***) «Число 6 меньше или равно числу 2» – высказывание, ложно;

(***C***) «Волга впадает в Каспийское море» – высказывание, истинно;

(***D***) «Путин - наш президент» - утверждение, истинное в настоящий момент, однако об его истинности через 10 лет мы ничего сказать не можем; такие утверждения мы высказываниями считать не будем;

***(E***) «Чтобы хорошо жить, надо хорошо учиться!» - не высказывание, так как проверить его истинность невозможно.

Истинностные значения любого высказывания будем обозначать:

–истина - или буквой «И», или цифрой «1»;

–ложь - или буквой «Л», или цифрой «0».

Высказывание называется *простым (элементарным),* если его нельзя разделить на части, которые сами являются высказываниями. Высказывание называется *составным*, если оно допускает разделение на другие высказывания. Составные высказывания состоят из грамматических связок "не", "и", "или", "если..., то...", "тогда и только тогда". Каждая из этих связок в математической логике определяет некоторую логическую операцию. Рассмотрим эти операции.

*Операция «отрицание (инверсия)».*

Если у нас есть какое-то высказывание А, то мы всегда можем получить его отрицание. *Отрицание (инверсия)* - это такое высказывание, которое будет истинно, если исходное высказывание ложно, и наоборот - оно будет ложно, если исходное высказывание истинно.

Например, высказывание "2+2 равно 4". Оно истинно. А его отрицанием будет "2+2 НЕ равно 4". Оно ложно. Или высказывание "2+2 больше чем 5". Оно ложно. А его отрицанием будет высказывание "2+2 меньше или равно 5". Оно истинно.

Так как при отрицании часто используется частица "НЕ" (как у нас в первом случае – не равно), то эта операция (*отрицание высказывания*) иногда называется "НЕ". Обозначается отрицание - $\overline{A}$.

*Таблица истинности:*

| ***A*** | **¬ A** |
|---|---|
| *0* | *1* |
| *1* | *0* |

*Операция «Конъюнкция»*

*Конъюнкцией* двух высказываний *x, y* называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания *x, y* истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно. Эту операцию обозначают $A \wedge B$. Читается "А и В". Союз "И" означает что для истинности высказывания $A \wedge B$ должны быть истинно как высказывание А, так И высказывание В.

Например, фраза "2+2=5 и все люди смертны" ложна, так как в ней использована конъюнкция (союз И), однако первое высказывание (2+2=5) ложно. Следовательно, и вся конъюнкция тоже ложна.

*Таблица истинности:*

| ***A*** | ***B*** | **A^B** |
|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *0* |
| *1* | *0* | *0* |
| *1* | *1* | *1* |

*Операция «Дизъюнкция»*

*Дизъюнкцией* двух высказываний *x*, *y* называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний *x* или *y* истинно и ложным, если они оба ложны. Она обозначается $A \vee B$. Читается она "А или В". Союз "ИЛИ" означает что для истинности высказывания $A \vee B$ должны быть истинно ИЛИ высказывание А, ИЛИ высказывание В.

Например, фраза "2+2=5 ИЛИ все люди смертны" истинны, так как второе высказывание истинное, следовательно, и вся дизъюнкция истинна.

*Таблица истинности:*

| **A** | **B** | **AvB** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

*Операция «Импликация (следование)»*

*Импликацией* (следование)- это операция, логическая связка двух высказываний *x*, *y* есть новое высказывание, которое считается ложным, если *x* истинно, а *y* ложно, и истинным во всех остальных случаях. Эта логическая операция соответствует словам «если…,то…». Импликация высказываний обозначается $x \rightarrow y$ и читается «если *x*, то *y*» или «из *x* следует *y*». (Из лжи следует все, что угодно!)

*Таблица истинности:*

| ***x*** | ***Y*** | ***x→y*** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Высказывание *x* называется *условием* или *посылкой*, а высказывание *y* – *следствием* или *заключением*.

Например: Импликация ложна, когда условие истинно, а заключение ложно. При всем этом 0 -> 1 = 1 0 -> 0 = 1 1-> 0 = 0

4. Выполним следующие задания:

*Задание 1.* Даны два высказывания:

А = «*Телевизор используется для просмотра передач*»

В = «*Телевизор используется для получения новой информации*».

Составьте следующие сложные высказывания и определите их истинность.

а) не А

б) не В

в) А и В

г) А или В

д) А или (не В)

е) не А или В

ж) не А и (не В)

з) не (А и В)

*Задание 2.* Запишите пять мужских и пять женских имен, для которых истинно высказывание: «*Вторая буква имени гласная, и неверно, что первая буква имени согласная*».

Возможные ответы учеников: Максим, Семен, Павел, Роман, Константин, Мария, Наталья, Виктория, Валентина, Катя.

*Опорная схема по теме: «Алгебра высказываний»*

| **Линия сравнения** | ***Инверсия*** | ***Конъюнкция*** | ***Дизъюнкция*** | ***Импликация*** | ***Эквивалентность*** |
|---|---|---|---|---|---|
| ***Название*** | Отрицание | Логическое умножение | Логическое сложение | Логическое следование | Логическое равенство |
| ***Обозначение*** | | A∨B | A∨B | A→B | A↔B |
| ***Союз*** | не | и | или | Если А, то | А |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | В;<br><br>Когда А, тогда В | тогда и только тогда, когда В |

4. Постановка домашнего задания: Выделите простые высказывания в следующих сложных высказываниях. Обозначьте каждое простое высказывание логической переменной. Запишите в виде логического выражения сложные высказывания:

«После уроков школьники любят смотреть телевизор или играть за компьютером"

5. Подведение итогов.

**Конспект занятия 3 по теме:**

***«Формулы математической логики»***

*Основная цель:* познакомить обучающихся с понятием «формула» в математической логике; формировать умения определять истинностные значения формул алгебры высказываний.

*Планируемые результаты:*

*Предметные:* представление о формуле в математической логике; знание основных типов формул; умение построения таблиц истинности для различных формул алгебры высказываний.

*Метапредметные:* владение языком математической логики; навыки планирования и организации учебно-познавательной деятельности; навыки самоконтроля; коммуникативные навыки в ходе комментирования решений и ответов учащихся, умение слушать собеседника при работе в паре.

*Личностные:* ценностное отношение к математическим знаниям; целеустремленность и увлеченность при решении математических задач.

*Этапы занятия:*

1. Теоретическая часть.
2. Работа в парах.
3. Постановка домашнего задания. Подведение итогов.

1. С помощью логических операций, рассмотренных на предыдущем занятии, из простых высказываний можно строить высказывания более сложные.

Например, из высказываний A: "*Саратов находится на берегу Невы*"; B: *"Все люди смертны";* C: *"А.С.Пушкин — великий русский математик"* можно построить такое высказывание: "*Если Саратов находится на берегу Невы и все люди смертны, то А.С. Пушкин — великий русский математик*". Построенное высказывание символически записывается так: $(A \wedge B) \rightarrow C$

Конечно, оно звучит несколько странно, поскольку соединяет в себе столь разнородные понятия, которые обычно существуют раздельно друг от друга. Но нас, еще раз подчеркну, интересует не содержание этого высказывания, а его логическое значение. Оно может быть определено, исходя из логических значений исходных высказываний A2,A3,A7 и той схемы, по которой из исходных высказываний построено сложное высказывание. Так как A2=0, A3=1, A7=0, находим $(A2 \wedge A3) \rightarrow A7 = (0 \wedge 1) \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 1$. Получается, что высказывание $(A2 \wedge A3) \rightarrow A7$ истинно.

Итак, символическая запись $(A2 \wedge A3) \rightarrow A7$, является своего рода *формулой.* В формулу вместо переменных можно подставлять конкретные высказывания, после чего вся формула будет превращаться в некоторое составное высказывание.

Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, называют *высказывательными переменными*.

А как вы думаете, является ли отдельная взятая высказывательная переменная формулой?

Определение *формулы* алгебры высказываний:

1) каждая отдельно взятая высказывательная переменная есть формула алгебры высказываний;

2) если $F_1$, $F_2$ – формулы алгебры высказываний, то выражения $\neg F_1$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами алгебры высказываний;

3) формулами алгебры высказываний являются только те выражения, которые могут быть получены в соответствии с пунктами 1) и 2) *P, Q, R, S, X, Y, Z* или эти же буквы с индексами внизу - *высказывательные переменные* (используются для обозначения высказываний) ‾, ∨, ∨, →, ↔- *логические операции* (используются для обозначения соответствующих союзов) ( , ) – *скобки* (используются для определения порядка выполнения логических операций)

*$F_1$, $F_2$, $F_3$, … - формулы алгебры высказываний*

Порядок выполнения логических операций (если нет скобок):

- Отрицание
- Конъюнкция
- Дизъюнкция
- Импликация
- Эквиваленция

Рассмотрим классификацию формул алгебры высказываний:

1) Формула алгебры высказываний называется *тождественно истинной (ТИ)*, если она принимает значение

«истина» при любых значениях высказывательных переменных, входящих в нее.

2) Формула алгебры высказываний называется *тождественно ложной (ТЛ),* если она принимает значение «ложь» при любых значениях высказывательных переменных, входящих в нее.

3) Формула алгебры высказываний называется *выполнимой*, если она принимает значение «истина» хотя бы при одном наборе значений высказывательных переменных, входящих в нее.

Для определения истинностного значения формулы, удобно использовать таблицы истинности.

Используя определения логических операций составить таблицу истинности для формулы $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee A)$.

В первых двух столбцах записывают всевозможные пары логических значений, которые могут принимать переменные.

| **A** | **B** | **$A \wedge B$** | **$B \vee A$** | **$(A \wedge B) \rightarrow (B \vee A)$** . |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Делая вывод, что можно сказать о формуле $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee A)$? Какой она является? (тождественно истинной)

2. Каждая пара учеников получает карточки с заданиями. На выполнение, которых отводится 20 минут и после выполнения — проверка(карточки с ответами).

*Карточка №1*

Составьте таблицы истинности и определите вид формул:

А) $\neg (X \vee Y) \leftrightarrow (\neg X \neg \neg Y)$

Б) (Х→У) ↔ (У→Х)

*Карточка №2*

Составьте таблицы истинности и определите вид формул:

А)¬ (Х∨У)↔ (¬Х¬¬ У)

Б) (Х→У) ↔ (¬ Х ↔ ¬ У)

В)¬А→(А∨В)

Г) (P→Q) → ((P→¬ Q)→¬ P

3. Итог урока.

Ребята, мы с вами познакомились с понятием «формула» в математической логике; научились определять истинностные значения формул алгебры высказываний. Поднимите руку, пожалуйста, у кого есть вопросы по пройденному материалу?

4. Домашнее задание:

1. Выделите простые высказывания из следующих сложных высказываний и составьте логические формулы:

a) *«Ты не готовишь борщ или щи, тогда и только тогда, когда ты не готовишь борщ и не готовишь щи».*

b) *«Если солнце не планета, то луна – спутник, а Земля – звезда.*

2. Составить таблицу истинности и определить вид формулы:

((P→Q)→P)→Q

Ответы:

1.a) Х – готовить борщ, У – готовить щи:¬ (Х∨У)↔(¬Х¬¬ У)

b) X – солнце планета, У – луна – спутник, Z – Земля – звезда:¬ X→(Y∨Z)

2. ((P→Q)→P)→Q – формула является выполнимой

| P | Q | P→ | (P→Q) | ((P→Q)→P)→ |
|---|---|---|---|---|

| | | Q | →P | Q |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

## Конспект занятия 4 по теме:
## *«Логическое следствие»*

*Основная цель:* познакомить обучающихся с понятием «логическое следствие» и методами его установления; формирование умений определять логическое следствие.

*Планируемые результаты:*

*Предметные:* знание определения понятия «логическое следствие»; умение приводить примеры логического следствия; знание основных свойств отношения «логическое следствие» (метод дедукции); знание основных логических правил вывода: закон контрапозиции и метод доказательства «от противного».

*Метапредметные:* владение языком математической логики; умение анализировать и обобщать изучаемые факты; умение строить логические рассуждения и делать обоснованные выводы и умозаключения; навыки планирования и организации учебно-познавательной деятельности; навыки самоконтроля; коммуникативные навыки в ходе комментирования решений и ответов учащихся.

*Личностные:* ценностное отношение к математическим знаниям; целеустремленность и увлеченность при решении математических задач*;* способность к логическим умозаключениям; готовность к самообразованию.

*Этапы занятия:*

Постановка цели занятия

Теоретическая часть

Итоги урока

1. На сегодняшнем занятии мы рассмотрим такое понятие как «логическое следствие», а так же вы узнаете, каким методом пользуется знаменитый сыщик Шерлок Холмс.

2. Логическое следование относится к числу фундаментальных, исходных понятий логики, которую нередко характеризуют как науку о том, «что из чего следует». Для обозначения логического следования формулы G из формул $F_1$, $F_2$ ,…, $F_k$ используют следующее обозначение:

$F_1, F_2 ,\ldots, F_k \models G$

Формула $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется логическим следствием формул $F_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, $F_2(x_1, x_2,\ldots, x_n)$,…, $F_k(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, если она обращается в истинное высказывание при всяком наборе значений высказывательных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при котором в истинное высказывание обращаются все формулы $F_1,F_2, \ldots,F_k$

$F_1, F_2, \ldots, F_k \models G$ , где $F_1, F_2, \ldots, F_k$ - посылки для логического следования G, а G – заключение или логическим следованием формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$.

Если в таблице истинности формул $F_1, F_2, \ldots, F_k, G$ в какой-то строке все формулы $F_1, F_2, \ldots, F_k$ принимают значение «истина» и в этой строке непременно формула $G$ принимает значение «истина», то это означает, что $G$ является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$. Иначе, не является логическим следствием. Другими словами, отличительной чертой логического следования является то, что *оно ведѐт от истинных высказываний только к истинным.*

Из высказывания «Если натрий металл, он пластичен» логически вытекает высказывание «Если натрий не пластичен, он не металл», поскольку импликация, посылкой которой является первое высказывание, а следствием второе, представляет собой частный случай логического закона контрапозиции. (таблицы истинности для этих формул)

*Закон контрапозиции* – закон классической логики, утверждающий, что в том случае, если некая посылка А влечет некое следствие В, то отрицание этого следствия (то есть «не В») влечет отрицание этой посылки (то есть «не А»). На истинности закона контрапозиции основывается способ доказательства «от противного». Это такой вид доказательства, при котором доказательство некоторого суждения осуществляется через опровержение этого суждения.

Являются ли следующие рассуждения логически верными: «Если Джонс не встречал ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс не лжет. Следовательно, Смит был убийцей».

Для этого введем логические переменные:

*A:* «Джонс не встречал ночью Смита»,

*B:* «Смит убийца»,

*C:* «Джонс лжет»,

D: «убийство состоялось после полуночи».

Имеем посылки $A \to (B \vee C)$, $\neg B \to (A \vee D)$, $D \to (B \vee \neg C)$ и заключение $B$.

От противного. Предположим, что логическое следствие не имеет места, т.е. $t(A \to (B \vee C))=1$, $t(\neg B \to (A \vee D))=1$, $t(D \to (B \vee \neg C))=1, t(B)=0$.

$t(\neg B \to (A \vee D))=1$ и $t(\neg B)=1 \Rightarrow t(A \vee D)=1$, $t(A)=1$, $t(D)=1$

$t(A \to (B \vee C))=1$ и $t(A)=1 \Rightarrow t(B \vee C)=1$, т.к. $t(B)=0$, то $t(C)=1$

$t(D\to(B\vee\neg C))=1$ и $t(D)=1 \Rightarrow t(B\vee\neg C)=1$,т.к. $t(\neg C)=0$, то $t(B)=1$. Пришли противоречию: $t(B)=0$, $t(B)=1$.

Следовательно, предположение $t(B)=0$ неверно, а верно $t(B)=1$ и рассуждения логически правильны.

А знакомы ли вы с таким персонажем как Шерлок Холмсом? Метод, который использует Шерлок Холмс, называется дедуктивным.

Понятие дедукция (лат. deductio – выведение) означает метод мышления, при котором частное положение логическим путѐм выводится из общего; цепь умозаключений (рассуждений), звенья которой связаны отношением логического следования.

Например: «Все металлы проводят ток. Золото — это металл. Значит, золото проводит ток».

3. Итог урока. На сегодняшнем занятии мы с вами рассмотрели такое понятие как «логическое следствие», а так же вы узнали, каким методом пользуется знаменитый сыщик Шерлок Холмс. Ребята, каждый из вас получит индивидуальную карточку, в которой нужно дополнить фразу. «Для меня сегодняшний урок…»

**Конспект занятия 5 по теме:**

***«Логическая структура математических теорем»***

*Основная цель:* познакомить обучающихся с основными типами логических структур математических теорем; развивать навыки составления теорем на основе различных логических структур.

*Планируемые результаты:*

*Предметные:* знание основных типов логических структур математических теорем; умение составлять и формулировать прямую теорему, обратную, противоположную, противоположную обратной.

*Метапредметные:* владение языком математической логики; навыки поиска и выделения необходимой информации; умение выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; умение строить логические рассуждения и делать обоснованные выводы и умозаключения; навыки планирования и организации учебно-познавательной деятельности; навыки самоконтроля; коммуникативные навыки в ходе комментирования решений и ответов учащихся.

*Личностные:* ценностное отношение к математическим знаниям; целеустремленность и увлеченность при решении математических задач*;* способность к логическим умозаключениям; готовность к самообразованию.

*Этапы занятия:*

1. Постановка цели занятия.
2. Теоретическая часть.
3. Решение практических заданий.
4. Подведение итогов.

1. На прошлом занятии, вы узнали, что такое «необходимое и достаточное условие», а так же что такое «условие» и «заключение» теоремы. Сегодня мы рассмотрим различные виды теорем, а так же вы сами попробуете их составить.

2. Теоремы $p(x) \rightarrow q(x)$ *и* $q(x) \rightarrow p(x)$ называются *взаимно обратными теоремами.* Иногда одну их них называют прямой, а другую – обратной.

Из определения взаимно обратных теорем следует, что если в формулировке прямой теоремы поменять местами условие и заключение, то получится формулировка обратной теоремы. Например, теорему обратной теореме Пифагора, можно сформулировать так: « Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник прямоугольный».

Как вы думаете, какая теорема называется противоположной? Теоремы *p(x)→ q(x)* и ¯*p(x →*¯*q(x)* называются *взаимно противоположными.* Например, для теоремы «Сумма (внутренних) углов треугольника равна 180» противоположной будет теорема, в которой вместо условия и заключения будут сформулированы их отрицания: «У многоугольника, не являющегося треугольников, сумма (внутренних) углов отлична от 180». Обе теоремы верны.

Бывают случаи, когда одна из взаимно противоположных теорем верна, а другая нет. Например, для теоремы о перпендикулярности диагоналей ромба противоположная ей теорема не верна.

Если теорема *q(x)→ p(x)* обратная для теоремы *p(x)→ q(x),* то теорема¬*q(x →*¯ *p(x)* называется *противоположной обратной.* Можно показать, что пары теорем: 1) прямая и противоположная обратной; 2) обратная и противоположная – всегда одновременно истинны или ложны.

Убедимся в этом, составив таблицу истинности.

| A | B | A | B | A→B | B→A | B | AA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | 1 | 1 | | 1 |
| | | 1 | | 1 | 0 | | 1 |
| | | 0 | | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | | 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 |

Например:

*Прямая* теорема «Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке» истина.

*Обратная* ей теорема «Если биссектрисы внутренних углов многоугольника пересекаются в одной точке, то этот многоугольник является треугольником» ложна (например, у ромба, являющегося четырехугольником, биссектрисы внутренних углов пересекаются в одной точке).

*Противоположная* теорема «Если многоугольник не является треугольником, то биссектрисы его внутренних углов не пересекаются в одной точке» (контрпример – ромб).

Теорема *противоположная обратной* «Если биссектрисы внутренних углов многоугольника не пересекаются в одной точке, то этот многоугольник не является треугольником», истинна.

Вспомним теорему Виета: Если уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни $x_1$ и $x_2$ , то для них выполняются равенства $x_1+x_2=-p$, $x_2\cdot x_2=q$.

Как будет звучать обратная теорема Виета?

Если числа $x_1$ и $x_2$ таковы, $x_1+x_2=-p$, $x_2\cdot x_2=q$, то $x_1$ и $x_2$ являются корнями квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Заметим, что при решении задач на уроках математики используется обратная теорема Виета.

2. Выполним следующие задания:

● Привести пример опровергающий утверждение

1) В любой четырехугольник можно вписать окружность;

2) Для любого треугольника сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны;

3) Сумма чисел с разными знаками есть число отрицательное;

4 ) В равнобедренном треугольнике один угол тупой.

● Сформулируйте обратную теорему, противоположную теорему и теорему противоположную обратной для данных теорем. Установите истинность каждой.

1) Угол называется развернутым, если обе его стороны лежат на одной прямой.

2) Если суммы противолежащих углов четырехугольника равны по 180°, то около четырехугольника можно описать окружность.

3) Если две параллельные прямые пересечены секущей, то образовавшиеся накрест лежащие углы равны.

Ответы:

1.

1) В прямоугольную трапецию или в ромб нельзя вписать окружность;

2) Например, треугольник со сторонами 2,3 и 4 ($2^2+3^2 \neq 4^2$) или равносторонний треугольник;

3) Например, -2+3+4= 5, 5 – число положительное;

4 ) Равнобедренный треугольник с углами при основании 45 градусов (два угла острых, один прямой);

2. 1) А – угол развернутый, В – обе стороны лежат на одной прямой.

*Прямая:* «Угол называется развернутым, если обе его стороны лежат на одной прямой» - истинна.

*Обратная:* «Если обе стороны угла лежат на одной прямой, то угол называется развернутым» - истинна.

*Противоположная:* «Угол не является развернутым, если обе его стороны не лежат на одной прямой» - истинна.

*Противоположная обратной:* «Если обе стороны угла не лежат на одной, то угол не является развернутым» - истинна.

**Итог урока.** Ребята вы теперь знаете основные типы логических структур математических теорем; умеете составлять и формулировать прямую теорему, обратную, противоположную, противоположную обратной.

Запишем домашнее задание. Сформулируйте обратную теорему, противоположную теорему и теорему противоположную обратной для данных теорем. Установите истинность каждой.

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то образовавшиеся накрест лежащие углы равны.

**Конспект занятия 6 по теме:**

***«Логические задачи и методы их решений»***

*Основная цель:* познакомить обучающихся с различными методами решения логических задач; формировать навыки и опыт решения логических задач.

*Планируемые результаты:*

*Предметные:* знание различных методов решения логических задач (метод рассуждений, метод таблиц, метод графов, метод решения с помощью языка математической логики); умение решать логические задачи различными методами.

*Метапредметные:* умение самостоятельно планировать пути достижения учебных целей; способность осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных задач; владение языком математической логики; умение строить логические рассуждения и делать обоснованные выводы и умозаключения; навыки самоконтроля; коммуникативные навыки в ходе комментирования решений и ответов учащихся.

*Личностные:* ценностное отношение к математическим знаниям; целеустремленность и увлеченность при решении математических задач; способность к логическим умозаключениям; готовность к самообразованию.

*Этапы занятия:*

1. Постановка цели занятия
2. Теоретическая часть.

3. Дидактическая игра.

4. Подведение итогов.

Решали ли вы логические задачи? А чем они отличаются от обычных задач?

Логические задачи решаются с помощью рассуждений. Логические задачи отличаются от обычных задач тем, что не требуют вычислений, а предполагают обработку информации в соответствии с заданным условием. Решение логических задач даёт возможность применить теоретические знания, полученные при изучении темы.

На сегодняшнем занятии, вы узнаете некоторые способы решения логических задач и научитесь применять их на практике.

Основные методы решения логических задач: Метод таблиц; Метод рассуждений; С помощью языка математической логики.

Метод: *метод графов.*

*Граф* - множество точек, изображенных на плоскости (листе бумаги, доске), некоторые пары из которых соединены отрезками. Точки называют вершинами графов, а отрезки - ребрами графов. Выделяя из словесных рассуждений главное - объекты и отношения между ними, графы представляют изучаемые факты в наглядной форме.

Примеры решения логических задач с использованием графов подкупают своей наглядностью и простотой, избавляют от лишних рассуждений, во многих случаях сокращают нагрузку на память. С одной стороны, графы позволяют проследить все логические возможности изучаемой ситуации, с другой, благодаря своей обозримости, помогают в ходе решения задачи классифицировать логические возможности, отбрасывать неподходящие случаи, не доводя до полного перебора всех случаев.

*Идея метода:* выявление и последовательное исключение логических возможностей, задаваемых условиями задачи.

Решим следующую задачу: Четыре футбольных команды: итальянская команда «Больцано», испанская – «Реал», российская – «Зенит», английская – «Челси» встретились в групповом этапе лиги чемпионов по футболу. Их тренировали тренеры из этих же четырех стран: итальянец Антонио, испанец Родриго, русский Николай, англичанин Марк. Известно, что национальность у всех четырех тренеров не совпадала с национальностью команд. Требуется определить тренера каждой команды, если известно:

а) Зенит не тренируется у Марка и Антонио.

б) Милан обещал никогда не брать Марка главным тренером.

*Решение:* Исходя из условий задачи, получаем следующий граф.


(Рисунок 3)

Приходим к выводу, что английская команда «Челси» тренируется у итальянца Антонио и испанская команда «Реал» тренируется у англичанина Марка.

*Ответ:* Российская команда «Зенит» тренируется у испанца Родриго; итальянская команда «Милан» тренируется у русского Николая; английская команда «Челси» тренируется у итальянца Антонио; испанская команда «Реал» тренируется у англичанина Марка.

4. Итог урока. Ребята мы с вами научились решать различными методами логические задачи (метод рассуждений, метод таблиц, метод графов, метод решения с помощью языка математической логики). Ребята, а сейчас я вам предлагаю назвать каждому по три момента, которые у вас получились хорошо в процессе урока, и предложить одно действие, которое улучшит вашу работу на следующем уроке.

## 2.2. Педагогический эксперимент: основные этапы и результаты

Опытно-экспериментальная часть работы осуществлялась на базе МБОУ Тумаковская СОШ в Ирбейском районе с целью обоснования необходимости формирования математической грамотности у обучающихся 9 класса.

В эксперименте приняли участие обучающиеся 9 класса.

Для выявления уровня сформированности основ математической грамотности в области «Математическая логика» мы выделили следующие компоненты:

- когнитивный (система знаний, которая необходима для решений актуальных задач учебной деятельности, а так же определяет уровень интеллектуального развития);

- праксиологический (совокупность умений, навыков и способов деятельности обучающихся, и их применении в собственной учебной деятельности).

На основе выделенных компонентов, а также для аналитической обработки результатов исследования и получения количественных показателей условно были выделены три уровня сформированности математической грамотности в области «Математическая логика»: низкий, средний и высокий.

Низкий уровень (пороговый) – знание базовых понятий, методов и правил, которые необходимы для решения задач. Умение применять знания при решении элементарных задач в одно действие.

Средний уровень (базовый) – знание базовых понятий, методов и правил, которые необходимы для решений задач. Решение типовых задач. Умения применять методы решения логических задач.

Высокий уровень (продвинутый) – знание понятий, методов и правил, которые необходимы для решения задач. Умение размышлять, строить самостоятельно алгоритм действий, уметь объяснять решение задачи.

Для выявления уровня сформированности математической грамотности в области «Математическая логика» обучающимся было предложено два среза.

*Срез 1*

Найдите значение логического выражения:

$((1 \wedge 1) \vee 0) \wedge (0 \vee 1)$

А) 1 Б) 2 В) 0

Дано отрицание числа $\neg A_{10}=74$. Найти $A_{10}=?$

А) 53 Б) 13 В) 40

Для какого из приведенного ниже имен ИСТИННО высказывание:

НЕ(Первая буква гласная) ИЛИ (Третья согласная)

Иван, Артем, Егор, Ирина

А) Иван Б) Артем В) Ирина

*Срез 2*

1. Три друга – Ваня, Петр и Игорь – раскрашивали рисунки карандашами трёх цветов: желтым, оранжевым, черным. Ваня раскрашивал рисунок не желтым и не оранжевым карандашом, Игорь – не черным карандашом. Каким карандашом раскрашивал каждый мальчик свой рисунок?

2. Перед тем, как Тортила отдала Буратино золотой ключик, она вынесла три коробочки. На красной было написано: «Здесь золотой ключик», на синей – «Зеленая коробочка пуста», на зеленой – «Здесь гадюка». Тортила прочла надписи и сказала: «Действительно, в одной коробочке лежит золотой ключик, в другой гадюка, а третья пуста, но все надписи неверны». Где же лежит золотой ключик, а где сидит гадюка?

3. Учитель проводил диктант по теме «Многоугольник». Каждый из учеников – Света, Вера, Витя, Оля и Надя – ошиблись в одном из пяти заданий диктанта, причем все они ошиблись в разных заданиях. По окончании работы обучающиеся высказались об ошибках, сделанных их одноклассниками, следующим образом:

1-й ученик – Света ошиблась в первом задании, а Витя – в четвертом

2-ой ученик – Вера ошиблась во втором, а Витя – в четвертом

3-ий ученик – Вера ошиблась во втором, а Света – в третьем задании

4-ый ученик – Оля ошиблась в первом задании, а Надя – во втором

5-ый ученик – Надя ошиблась в третьем задании, а Оля – в пятом.

Оказалось, что каждый из учеников был прав только в одном из двух своих утверждений. Определите, кто из ребят, в каком задании допустил ошибку.

Первый срез предполагает проверку когнитивного компонента, он включает в себя тестирование. Каждый правильный ответ оценивался в 5 баллов. Второй срез – праксиологический компонент, включает в себя 3 логические задачи разного уровня. Каждая решенная задача оценивалась в 5 баллов. Результаты констатирующего этапа педагогического эксперимента приведены в следующей таблице 3:

Таблица 3

Результаты констатирующего этапа педагогического эксперимента

| | 1 срез Когнитивный компонент) | 2 срез Праксиологический компонент | баллы | Уровень |
|---|---|---|---|---|
| Панова Мария | 0 баллов | 0 баллов | 20 баллов | Средний |
| Петров Василий | 0 баллов | 10 баллов | 20 балла | Средний |
| Разова Юлия | 0 баллов | 0 баллов | 0 баллов | Низкий |
| Нахаева Ольга | 10 баллов | 5 баллов | 15 баллов | Средний |
| Шмидт Вадим | 10 баллов | 5 баллов | 15 баллов | Средний |
| Ивановская София | 5 баллов | 5 баллов | 10 баллов | Низкий |
| Сучков Даниил | 0 баллов | 0 баллов | 0 баллов | Низкий |
| Карлин Денис | 10 баллов | 10 баллов | 10 баллов | Низкий |
| Шульц Илья | 5 баллов | 0 баллов | 5 баллов | Низкий |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Шульц Дарья | 10 баллов | 5 баллов | 15 баллов | Средний |
| Сидорова Алена | 0 баллов | 5 баллов | 5 баллов | Низкий |
| Тимошенко Александр | 0 баллов | 10 баллов | 10 баллов | Низкий |

*Обработка полученных данных*

Если сумма баллов 25-30 (max) , можно считать, что уровень сформированности основ математической грамотности в области «Математическая логика» высокий, если 15-25 баллов, то средний уровень, если менее 15,то низкий уровень.

На рис.1 представлена диаграмма уровня сформированности основ математической грамотности у обучающихся в области «Математическая логика» на констатирующем этапе педагогического эксперимента.

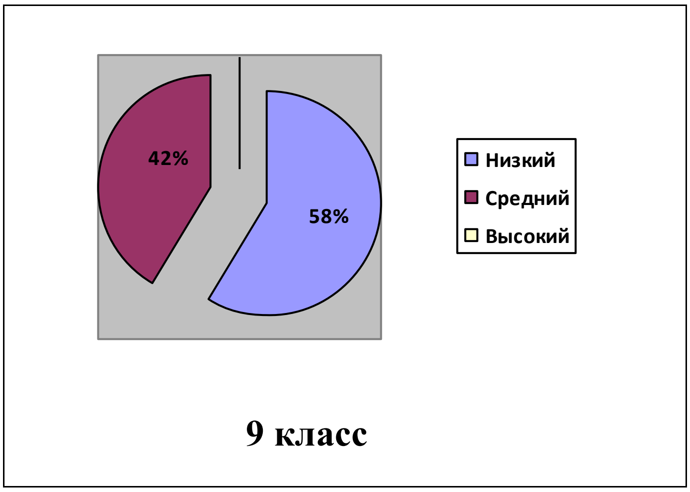


Рис 1. *Диаграмма уровня сформированности основ математической грамотности у обучающихся 9 класса на констатирующем этапе эксперимента*

Результаты констатирующего этапа педагогического эксперимента показали, что у 58 % обучающихся 9 класса (ученики, которые набрали менее 15 баллов) низкий уровень сформированности основ математической грамотности в области «Математическая логика». У 42% обучающихся, принявших участие в эксперименте средний уровень сформированности основ математической грамотности.

Основываясь на результатах диагностики, можно сделать вывод о необходимости формирования у большинства обучающихся 9 класса основ математической грамотности в области «Математическая логика». С этой целью было организовано экспериментальное обучение с применением авторской методики. В ходе педагогической практики было проведено 6 занятий. По наблюдениям, отметим следующее, что обучающиеся были активны на занятиях, ученикам очень понравились разные способы решения логических задач, а именно метод графов и метод таблиц, с помощью них они с легкостью решали задачи. Во время изучения тем ученики проявляли интерес к изучаемому материалу, задавали вопросы, проводили между собой дискуссии.

После целенаправленной работы по повышению уровня сформированности математической грамотности в области «Математическая логика», был проведен завершающий этап педагогического эксперимента. Обучающимся было предложено повторное тестирование - два контрольных среза.

*Срез 1*

1. Найдите значение логического выражения:

$((1 \land 1) \lor 0) \land (0 \lor 1)$

А) 1 Б) 2 В) 0

2. Дано отрицание числа $\neg A_{10}=74$. Найти $A_{10}=?$

А) 53 Б) 13 В) 40

2. Для какого из приведенного ниже имен ИСТИННО высказывание:

НЕ(Первая буква гласная) ИЛИ (Третья согласная)

Иван, Артем, Егор, Ирина

А) Иван  Б) Артем  В) Ирина

*Срез 2*

1. Три товарища – Витя, Серёжа и Коля – раскрашивали рисунки карандашами трёх цветов: красным, синим, зелёным. Витя раскрашивал рисунок не красным и не синим карандашом, Коля – не синим карандашом. Каким карандашом раскрашивал каждый мальчик свой рисунок?

2. Перед тем, как Тортила отдала Буратино золотой ключик, она вынесла три коробочки. На красной было написано: «Здесь золотой ключик», на синей – «Зеленая коробочка пуста», на зеленой – «Здесь гадюка». Тортила прочла надписи и сказала: «Действительно, в одной коробочке лежит золотой ключик, в другой гадюка, а третья пуста, но все надписи неверны». Где же лежит золотой ключик, а где сидит гадюка?

3. Учитель проводил диктант по теме «Определения». Каждый из учеников – Коля, Сережа, Ваня, Толя и Надя – ошиблись в одном из пяти заданий диктанта, причем все они ошиблись в разных заданиях. По окончании работы учащиеся высказались об ошибках, сделанных их одноклассниками, следующим образом:

1-й ученик – Коля ошибся в первом задании, а Ваня – в четвертом

2-ой ученик – Сережа ошибся во втором, а Ваня – в четвертом

3-ий ученик – Сережа ошибся во втором, а Коля – в третьем задании

4-ый ученик – Толя ошибся в первом задании, а Надя – во втором

5-ый ученик – Надя ошиблась в третьем задании, а Толя – в пятом.

Оказалось, что каждый из учеников был прав только в одном из двух своих утверждений. Определите, кто из ребят, в каком задании допустил ошибку.

Результаты завершающего эксперимента приведем в следующей таблице 4:

*Таблица 4*

Результаты завершающего этапа педагогического эксперимента

| ФИО ученика | 1 срез (Когнитивный компонент) | 2 срез (Праксиологический компонент) | Баллы | Уровень |
|---|---|---|---|---|
| Иванова Мария | 15 баллов | 10 баллов | 25 баллов | Высокий |
| Петров Василий | 10 баллов | 10 баллов | 20 баллов | Средний |
| Разова Юлия | 10 баллов | 5 баллов | 15 баллов | Средний |
| Нахаева Ольга | 15 баллов | 15 баллов | 30 баллов | Высокий |
| Шмидт Вадим | 10 баллов | 10 баллов | 20 баллов | Средний |
| Ивановская София | 15 баллов | 15 баллов | 30 баллов | Высокий |
| Сучков Даниил | 15 баллов | 10 баллов | 25 баллов | Высокий |
| Карлин Денис | 15 баллов | 15 баллов | 30 балло | Высокий |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | в | |
| Шульц Илья | 10 баллов | 10 баллов | 20 баллов | Средний |
| Шульц Дарья | 10 баллов | 10 баллов | 20 баллов | Средний |
| Сидорова Алена | 10 баллов | 15 баллов | 25 баллов | Высокий |
| Тимошенко Александр | 15 баллов | 15 баллов | 30 баллов | Высокий |

Анализ срезов показал некоторое повышение у обучающихся уровня сформированности математической грамотности в области «Математическая логика». Улучшилось качество выполнения заданий.

На рис.2 представлена диаграмма уровня сформированности математической грамотности у обучающихся 9 классов в области «Математическая логика» на завершающем этапе педагогического эксперимента.

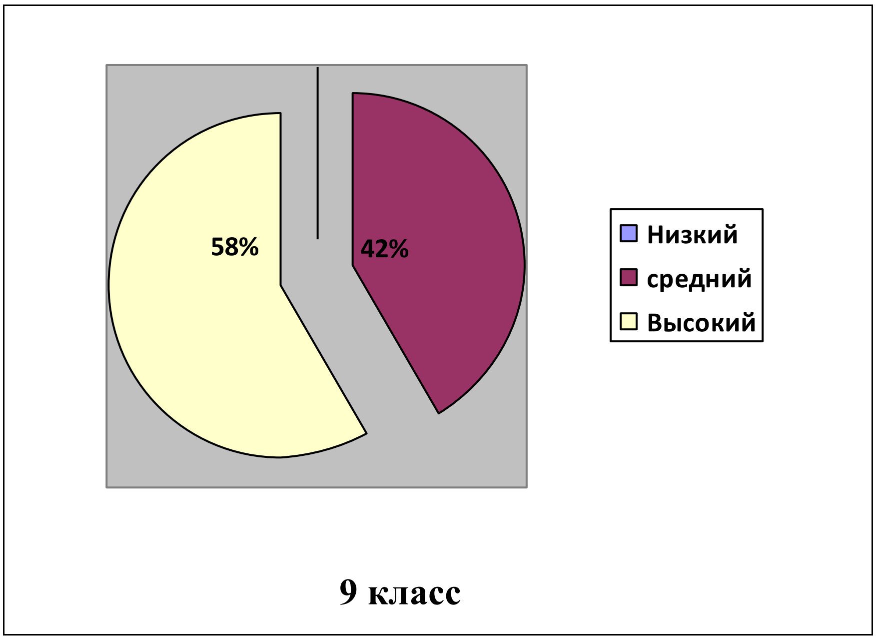

*Рис 2. Диаграмма уровня сформированности математической грамотности у обучающихся 9 класса на завершающем этапе эксперимента*

Сравнивая результаты проведенных экспериментов – констатирующего и завершающего – можно сделать вывод, что разработанные циклы уроков по теме «Элементы математической логики» в рамках математической подготовки обучающихся 9 класса позволяют повысить уровень сформированности математической грамотности в области «Математическая логика».

Результаты эксперимента и наблюдений позволяют сказать, что после изучения, обучающиеся не только научились использовать элементы математической логики и различные методы решения логических задач, но и стали более уверенными при аргументировании своих мыслей, значительно повысился познавательный интерес к вопросам математической логики.

**Выводы по 2 главе**

Результаты педагогического эксперимента подтвердили гипотезу исследования: если в процессе математической подготовки обучающихся 9 класса применять специальную методику обучения основам математической логики, то это будет способствовать формированию математической грамотности.

## Заключение

В ходе проведенного исследования мы пришли к выводу: что необходимо формировать у обучающихся основы математической грамотности в области «Математическая логика».

Математическая грамотность – это способность структурировать данные (анализировать ситуации), выделять математические отношения, создавать математические модели ситуаций, анализировать и преобразовывать их, интерпретировать полученные результаты [38].

Выделены специальные дидактические условия формирования математической грамотности у обучающихся 9 класса в области математической логики: а) особое содержание обучения (сведения из раздела «Математическая логика», логические задачи, методы решения логических задач); б) особые методы, формы и средства обучения (логические игры, логические карты для доказательства математических утверждений и др.).

С целью формирования у обучающихся математической грамотности разработан цикл уроков по теме «Элементы математической логики» для школьного курса математики "Алгебра 9 класс".

На базе МБОУ Тумаковская СОШ проведён педагогический эксперимент. Результаты итогового этапа эксперимента свидетельствуют о повышении уровня математической грамотности у большинства обучающихся, что подтверждает гипотезу исследования: если в процессе математической подготовки обучающихся применять специальную методику обучения основам математической логики, то это будет способствовать формированию математической грамотности.

Поставленные цели и задачи выпускной квалификационной работы достигнуты.

## Список используемой литературы

1. Алимов Ш.А. Алгебра. 9 класс. 17-е изд. - М.: 2012. - 287 с.

2. Богомолова О.Б. Логические задачи. 4-е изд., испр. и доп. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 277с. :ил.

3. Верещагин Н. К., Шень А. В. 31 Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — 4-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2012

4. Вендина А.А., Киричек К.А., Федюшкина А.В., Ивченко А.В. О возможности использования некоторых аспектов китайского математического образования в России // Интернет-журнал «Мир науки», 2018. №2. [Электронный ресурс]. URL: https://mirnauki.com/PDF/26PDMN218.pdf (дата обращения: 10.05.2021).

5. Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С. и др. Алгебра. 9 класс. С углубленным изучением математики. 7-е изд. - М.: 2006. - 368 с.

6. Голунова А.А. Обучение математике в профильных классах: учеб. -метод. пособие / А.А. Голунова. – 2-е изд., стер. – М .: ФЛИНТА, 2014. – 204 С.

7. Государственная программа «Развитие образования» на 2018–2025 годы, утв. постановлением Правительства РФ от 12.10.2017 года №1242 //

8. Демидов И.В. Логика: учебник 7-е издание, Москва, 2012.

9. Елифантьева С.С. Технология изучения элементов математической логики в основной школе: Дис… канд. пед. наук. ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, Ярославль, 2006.

10. Елифантьева С.С. Технология изучения элементов математической логики в основной школе: Дис… канд. пед. наук. ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, Ярославль, 2006.

11. Пономарёв И. Н. П56 Введение в математическую логику и роды структур: Учебное пособие. — М.: МФТИ, 2007. — 244 с.

12. Зарипова Р.М. Формирование ключевых компетенций у школьников на уроках математики.//Практика и тенденции социального партнерства в системе школа – СПО - ВУЗ: материалы VI Республиканской научно-методической конференции: в 2 ч. Ч. II; М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань, 2013 г. - С.175-178.

13. Зарукина Е. В. Активные методы обучения: рекомендации по разработке и применению: учеб.-метод. пособие / Е. В. Зарукина, Н. А. Логинова, М. М. Новик. СПб.: СПбГИЭУ, 2010. – 59 с.

14. Зимняя И.А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования // Высшее образование сегодня. 2003. № 5. С. 34–42.

15. Иванова Т.А., Симонова О.В. Структура математической грамотности школьников в контексте формирования их функциональной грамотности // Вестник ВятГУ. № 1. 2009. С. 125.

16. Идиатулин И.Р., Фаут Ю.В., Шашкина М.Б. Проблемы математической грамотности обучающихся и пути их решения // Информационные тех-нологии в математике и математическом образовании: материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-методической кон-ференции, посвященной 80-летию профессора Ларина Сергея Васильевича. Красноярск, 13–14 ноября 2019 г.: в 2 ч.

[Электронный ресурс] / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2019. Ч. 2. С. 49–54.

17. Кейв М.А., Власова Н.В. Инновационные процессы в профильном образовании: учебное пособие; Краснояр. гос. пед. ун-т им В.П. Астафьева. – Красноярск, 2015. – 168с.

18. Кларин М. Педагогические технологии и инновационные тенденции в современном образовании (зарубежный опыт) [Текст]/ М. Кларин// Инновационное движение в российском школьном образовании. - М., 2017. - с. .99

19. Козлова С.А.. Математика. 5 класс: учеб. для организации, осуществляющих образовательную деятельность. В 2 ч./ Козлова С.А., Рубин А.Г. –Изд. 2-е. – М.: Баласс, 2015. – 208 с.: ил. ( Образовательная система «Школа 2100»)

20. Козлова С.А.. Математика. 6 кл.: учеб. для общеобразовательных учреждений.: в 2-х частях./ Козлова С.А., Рубин А.Г. –Изд. 2-е. – М.: Баласс, 2013. – 208 с.: ил. ( Образовательная система «Школа 2100»).

21. Концепция развития математического образования в Российской Федерации, утв. распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 года №2506-р // [Электронный ресурс]. URL: http://government.ru/docs/9775/ (дата обращения: 21.04.2021).

22. Копытов Н.А.: Задачи на развитие логики: Введение в язык математики. - М.: АСТ-ПРЕСС, 1998

23. Математическая логика, Унучек С.А., 2018.

24. Математическая грамотность. В трех частях Ахметова К.П. (сост.) Дайыр Баспа 2017-2018

25. Муравин Г.К, Муравина О.В. Математика. 5 класс. 3-е изд., стер. М.: 2014. - 320с.

26. Муравин Г.К, Муравина О.В. Математика. 6 класс. 2-е изд., стер. - М.: 2014. - 320 с.

27. Математическая логика, Игошин В.И., 2016.

28. Популярная логика и занимательные задачи, Гусев Д.А., 2015.

29. Примерная основная образовательная программа основного общего образования: одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 8 апреля 2015 г. №1/15)

30. Примеры открытых заданий по математике (по материалам международного исследования образовательных достижений учащихся PISA 2003, 2012 гг.) // Исследование PISA-2018. Материалы. [Электронный ресурс]. URL: http://www.centeroko.ru/pisa18/pisa2018_pub.html (дата обращения: 21.04.2021).

31. Темишев Л.Д. Введение в математическую логику Мех-мат МГУ, 1-й курс, весна 2008 г.

32. Тюменева Ю.А., Александрова Е.И., Шашкина М.Б. Почему для российских школьников некоторые задания PISA оказываются труднее, чем для их зарубежных сверстников: экспериментальное исследование // Психология обучения. 2015. №7. С. 5–23.

33. Указ Президента РФ «О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 года» от 07.05.2018 г. № 204 // Российская газета. 2018. 9 мая.

34. Ульянова И.В. Современные средства обучения учащихся решению математической задачи в контексте

реализации ФГОС ООО нового поколения // Наука и школа. 2017. №3. С. 68-76.

35. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (утвержден приказом Минобрнауки России от 17 декабря 2010 г. № 1897)

36. Федеральный институт оценки качества образования. Концепция направления «математическая грамотность» исследования PISA-2021 //[Электронный ресурс]. URL:https://domodmyk.edumsko.ru/associations/kabinet/research/post/1148355 (дата обращения: 22.04.2021).