МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева» (КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики

Кафедра математики и методики обучения математике

Рыбкина Надежда Дмитриевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

КУРС ПО ВЫБОРУ "ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА» ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ПРОФИЛЬНОМУ ЕГЭ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Направление подготовки:
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль) образовательной программы:
Математика и Информатика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой:
д-р пед. наук, профессор
Шкерина Л.В.

20.05.2021
(дата, подпись)

Руководитель:
канд. пед. наук, доцент
Шашкина М.Б.

20.05.2021
(дата, подпись)

Дата защиты 29.06.2021

Обучающийся:
Рыбкина Н.Д.

20.05.2021
(дата, подпись)

Оценка ____________________

Красноярск 2021

Содержание

Введение

Качество математической подготовки обучающихся в течение нескольких последних лет является предметом многих исследований в теории и методике обучения математике. Есть содержательные линии, которые составляют основу математического образования выпускника общеобразовательной школы, являясь фундаментом его дальнейшего обучения, средством развития алгоритмического и логического мышления. Компонентом профессиональной компетентности современного образованного человека является способность и готовность выстраивать стратегию решения задач и проблем в различных видах деятельности. Основы этих качеств закладываются в том числе в процессе обучения математике.

Показательные и логарифмические неравенства изучаются в 10–11 классах на базовом и профильном уровнях. Этот материал является продолжением и расширением содержательно-методической линии уравнений и неравенств школьного курса математики. С одной стороны, его содержание основано на общих методах и подходах к решению алгебраических неравенств, изучаемых в основной школе в 5–9 классах. С другой – показательные и логарифмические неравенства относятся к трансцендентным, и при их решении используются определения и свойства показательной и логарифмической функций, свойства степеней с действительным показателем и логарифмов.

Одним из предметных результатов среднего общего образования является умение решать различные типы неравенств. На профильном ЕГЭ по математике данное умение проверяется в задании 15. По статистике к выполнению этого задания приступает не более 11 % экзаменуемых. Чаще всего в контрольно-измерительных материалах (КИМ) предлагаются именно логарифмические и показательные неравенства. Результаты экзамена за последние 11 лет говорят о том, что данное задание вызывает серьезные затруднения у экзаменуемых, несмотря на относительно невысокий уровень его сложности. При решении неравенств допускается много ошибок при использовании метода интервалов, определении и записи области допустимых значений переменного (ОДЗ), преобразованиях рациональных выражений, преобразованиях в процессе решения неравенства и др. Многие ошибки при решении неравенств свидетельствуют о пробелах в освоении материала курса математики основной школы. Также не исключено, что многие обучающиеся не знают, какой метод использовать при решении неравенства. Подобные затруднения при решении неравенств выявляются и на итоговой государственной аттестации в 9 классе.

Поэтому можно сделать вывод о том, что в школе часто уделяется недостаточное количество времени и внимания при изучении логарифмических и показательных неравенств. Для улучшения результатов выполнения данного задания необходимо повысить общий уровень математической подготовки обучающихся.

Большинство используемых традиционных технологий не всегда дают возможности для получения полноценных и качественных результатов математической подготовки обучающихся. Сейчас учитель должен быть не транслятором знаний, а организатором учебной деятельности. Поэтому актуален поиск новых моделей обучения, которые позволяют сформировать навыки XXI века, которые необходимы обучающимся. Это информационная грамотность, сотрудничество, творческий подход, гибкость мышления.

Также, не стоит забывать, что современные обучающиеся – это люди поколения Z. Они имеют определенные особенности в когнитивной и личностной сфере, не представляют свою жизнь без цифровых технологий.

Проблемы качества математической подготовки обучающихся описываются в работах Л.И. Боженковой, Е.Е. Волковой, В.А. Далингера, О.А. Табиновой, М.Б. Шашкиной, Л.В. Шкериной и др. Анализ различных научных источников позволил определить степень разработанности методических аспектов изучения неравенств в школе. Исследования в области решения уравнений и неравенств содержатся в учебно-методических комплектах и дидактических материалах под редакцией А.Г. Мерзляка, А.Г. Мордковича, Г.К. Муравина, С.М. Никольского и др. Отдельные аспекты изучения содержательной линии неравенств рассматривались в работах Н.А. Журавлевой, М.Б. Шашкиной, И.В. Яковлева и др. Особенности поколения Z и его обучения исследуются в работах Е.Е. Дурневой, Дж. Коатс, В.Д. Нечаева, А.В. Сапа и др.

Для обучения современного поколения целесообразно использовать потенциал электронного обучения. Оно реализуется с помощью информационных технологий, технических средств и информационно-телекоммуникационных сетей. В связи с пандемией, которая началась в 2020 году, использование элементов электронного обучения в образовании стало необходимым.

Поэтому для решения проблемы математической подготовки обучающихся и повышения качества результатов выполнения 15 задания ЕГЭ профильного уровня, можно использовать курс “Показательные и логарифмические неравенства”, который реализует идеи дистанционного обучения. А для того, чтобы содержание курса стало более интересным и наглядным, данный курс можно сопроводить некоторыми интерактивными методами. К ним относятся: кейс-метод, кластеры, разработка проектов, мозговой штурм, интервью и т.д. Данные методы реализуются с помощью онлайн-средств. Они вносят разнообразие в учебный процесс и повышают заинтересованность обучающихся.

Проблема исследования заключается в поиске ответа на вопрос: какие эффективные средства обучения использовать для современных обучающихся при подготовке к решению неравенств ЕГЭ профильного уровня?

Цель данной работы – разработка и апробация курса по выбору “Показательные и логарифмические неравенства” для подготовки к профильному ЕГЭ обучающихся 10-11 классов.

Объектом исследования является процесс обучения математике обучающихся 10-11 классов.

Предмет исследования – программа, содержание и методика реализации курса по выбору “Показательные и логарифмические неравенства” для подготовки к профильному ЕГЭ обучающихся 10-11 классов.

Гипотеза исследования: курс по выбору с использованием интерактивных методов, реализованных при помощи онлайн-средств, будет дополнять основной курс математики и способствовать более успешному и качественному освоению темы “Показательные и логарифмические неравенства”, а также повышению уровня математической подготовки обучающихся.

Задачи исследования:

1) выявить особенности математической подготовки обучающихся в современной школе на основе анализа психолого-педагогической и методической литературы;

2) описать возможности и инструменты электронного обучения;

3) отобрать содержание курса по выбору и разработать занятия с использованием интерактивных методов, реализованных при помощи онлайн-средств;

4) разместить курс по выбору в web-сервисе Google classroom;

5) проверить результативность разработанного курса по выбору в процессе опытно-экспериментальной работы.

Методы исследования: теоретические (анализ психолого-педагогической, научно-методической и учебной литературы по проблеме исследования); эмпирические (сравнение, сопоставление, педагогический эксперимент, анкетирование).

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемых источников и приложений.

Во введении обозначена проблема, определены и сформулированы цель, объект, предмет, гипотеза и задачи данного исследования.

В первой главе проведен анализ психолого-педагогической литературы по проблеме исследования, описаны особенности ФГОС и ЕГЭ по математике профильного уровня, выявлены возможности электронного обучения, выделены черты современного поколения обучающихся.

Во второй главе описана программа курса по выбору “Показательные и логарифмические неравенства” для подготовки к профильному ЕГЭ обучающихся 10-11 классов; разработаны занятия, на которых использованы интерактивные методы обучения, реализованные при помощи разных онлайн-средств; продемонстрированы результаты разработанного курса, полученные в ходе опытно-экспериментальной работы.

В заключении приведены основные результаты и перспективы проведенного исследования.

Глава 1. Теоретические основы изучения логарифмических и показательных неравенств с элементами электронного обучения

1.1. Особенности обучения математике в старших классах современного поколения обучающихся

В данном параграфе опишем особенности ФГОС, профильного ЕГЭ по математике. Выделим проблемы математической подготовки в современной школе. Приведем особенности цифрового поколения.

ФГОС или федеральные государственные образовательные стандарты – это совокупность некоторых требований, которые обязательны при реализации основных образовательных программ [42].

Основная задача ФГОС заключается в создании единого образовательного пространства по всей России, а также в обеспечении преемственности основных образовательных программ [42].

Перечислим основные требования ФГОС среднего общего образования к предметным результатам обучения по математике (для углубленного уровня) [42]:

1. сформированность представлений о математике как о части мировой культуры, а также о месте математики в современном мире, о способах описания разных явлений реального мира на математическом языке;
2. сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, которые позволяют описывать и изучать разнообразные процессы и явления;
3. владение разными методами доказательств и алгоритмами решения; умение применять их, а также проводить доказательные рассуждения при решении заданий;
4. владение стандартными приемами решения разных видов уравнений и неравенств, их систем;
5. сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

6. владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

7. сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

8. владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач;

9. сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

10. сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

11. сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

12. сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

13. владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению.

По итогам освоения образовательных программ среднего общего образования проводится ЕГЭ (единый государственный экзамен), который является основным инструментом оценки качества математической подготовки обучающихся по окончанию 11 класса [47].

Единый государственный экзамен представляет собой форму государственной итоговой аттестации, которая проводится с целью определения соответствия результатов освоения обучающимися основных образовательных программ среднего общего образования соответствующим требования ФГОС или образовательного стандарта [39].

К итоговой аттестации допускаются только те обучающиеся, которые: не имеют академических задолженностей; в полном объеме выполнили учебный или индивидуальный учебный план; имеют зачет за итоговое сочинение [30].

При проведении единого государственного экзамена используют контрольно-измерительные материалы (КИМ), которые содержат комплекс заданий по предмету, а также бланки для оформления ответов на задания экзамена [39].

Далее перечислим основные особенности профильного ЕГЭ по математике.

Экзаменационная работа профильного ЕГЭ по математике содержит в себе две части. Они различаются по содержанию, сложности, а также количеству заданий [39].

В первой части 8 заданий. В этих заданиях необходимо дать краткий ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Данные задания имеют базовый уровень сложности. Задания 1-8 направлены на проверку освоения базовых умений, а также практических навыков применения математических знаний, которые необходимы в повседневных ситуациях. Они также предназначены для определения математических компетенций обучающихся [39].

Во второй части 4 задания, на которые необходимо дать краткий ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби, и 7 заданий, в которых дается развернутый ответ. Задания под номерами 9-17 имеют повышенный уровень сложности, а 18 и 19 задания – высокий уровень сложности. Задания второй части осуществляют проверку освоения математики на профильном уровне и предназначены для более точной дифференциации абитуриентов вуза [39].

Содержание экзаменационной работы проверяет у обучающегося следующий комплекс умений по предмету [39]:

– умеет использовать приобретенные знания и умения как в практической деятельности, так и в повседневной жизни;
– умеет выполнять различные вычисления и преобразования;
– умеет решать разные виды уравнений и неравенств;
– умет выполнять действия с функциями;
– умеет выполнять действия с разными геометрическими фигурами, координатами, векторами;
– умеет работать с математическими моделями.

Максимальный первичный балл за экзамен составляет 32 балла.

Время выполнения экзаменационной работы по математике профильного уровня составляет 3 часа и 55 минут.

В настоящее время в школах существуют проблемы математической подготовки обучающихся. Уровень математического образования в школах снижается с каждым годом. Об этом можно судить, исходя из результатов профильного ЕГЭ по математике.

Многие темы школьной программы по математике усвоены недостаточно качественно [50].

Мы можем говорить о том, что содержание заданий ЕГЭ по математике влияет на качество математической подготовки школьников [17]. Задания, предложенные в открытом банке и типовых вариантах для подготовки к экзамену, определяют формат образовательных результатов обучения математики, которые должны быть более метапредметными и универсальными [48].

Содержание школьной математики превратилось в набор правил и формул. На уроках слабо формируется представление о доказательстве как освоенной интеллектуальной операции [22].

За последние три года в Красноярском крае наблюдается нестабильность доли участников профильного ЕГЭ по математике. Так, в 2018 году доля составила 55,16 % от общего числа экзаменуемых, в 2019 году – 48,73%, а в 2020 году – 58,44% [44, 45, 46].

Рассмотрим 15 задание ЕГЭ по математике профильного уровня, опишем основные особенности данного задания, основные ошибки, которые допускаются экзаменуемыми при выполнении этого задания.

В КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня 15 задание является алгебраическим заданием повышенного уровня сложности. Обучающимся необходимо решить некоторое неравенство. Это может быть логарифмическое, показательное, рациональное, иррациональное или смешанное неравенство.

15 задание – это задание повышенного уровня сложности, которое направлено на проверку следующих умений:

- решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, а также их системы;
- решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя для этого свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод;
- решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, а также их системы.

Чаще всего в КИМ предлагается решить показательные и логарифмические неравенства.

Приведем таблицу критериев оценивания задания 15, которые даны в методических материалах для председателей и членов предметных комиссий (таблица 1) [25].

Таблица 1

Критерии оценки выполнения 15 задания ЕГЭ

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

По статистике к выполнению 15 задания профильного ЕГЭ по математике приступает не более 11 % учащихся. Так, в 2018 г. в Красноярском крае максимальный балл за решение логарифмического неравенства получили 7,53 % обучающихся, а 2,05 % набрали меньше максимального балла. Решаемость задания составила 9,58 % [46]. В 2019 году решаемость составила 14,72 %, В 2020 году решаемость задания составила 8,39 % [44, 45].

Мы можем сказать, что, несмотря на невысокий уровень сложности данного задания, оно вызывает определенные трудности у экзаменуемых при решении.

Основные ошибки, которые допускаются при выполнении 15 задания [14, 48]:

- ОДЗ неравенства найдена неверно;
- ошибки при использовании метода интервалов;
- сужение ОДЗ неравенства;
- некорректное применение свойств логарифмов и степеней;

– ошибки в преобразовании рациональных неравенств;
– неверная рационализация логарифмического неравенства;
– при записи окончательного решения неравенства.

Поэтому мы можем сделать вывод, что в школе не уделяется достаточное количество времени и внимания для изучения логарифмических и показательных неравенств.

Чтобы повысить качество выполнения 15 задания ЕГЭ необходимо: повысить уровень изучения материала в основной школе, усилить внимание к данному разделу в старшей школе [28].

Нельзя не отметить, что на обучение математике также влияют особенности современного поколения. Современное поколение имеет большие отличия по сравнению с поколением учителей [49].

Согласно теории поколений, которая разработана Уильямом Штраусом и Нилом Хау в 1991 году, смена поколений происходит примерно каждые 20 лет [3, 36]. Эта смена поколений обусловлена рядом исторических, социально-экономических и культурных факторов, а также влиянием научно-технического прогресса [49].

Цифровое поколение или поколение Z – это поколение детей и молодежи, которые прошли социализацию в условиях распространения цифровых технологий в обыденной жизни, образования, а также профессиональной деятельности [29].

К данному поколению относятся дети, которые родились в начале 2000-ых годов и по настоящее время.

Учителя, работающие в школе в настоящее время, относятся к другим поколениям: Беби-бумеров, X и Y.

Можно сказать, что наличие культурного разрыва между педагогами и обучающимися может быть источником проблем во взаимодействии в ходе образовательного процесса [49].

Многие педагоги и исследователи в области образовании говорят о том, что современное поколение детей не следует учить так, как это делалось раньше, то есть у доски.

Отметим особенности данного поколения, которые влияют на качество обучения.

К когнитивным особенностям поколения Z относятся: способность быстро включатся в различные виды деятельности и заниматься несколькими делам одновременно; внимание не удерживается на одном занятии долгое время; характерность клипового мышления, которое основано на кратковременном удерживании информации [49].

К психологическим и личностным особенностям поколения Z относятся: прагматичность; ориентированность на быстрый результат; привыкли получать бонусы за удачно выполненные действия [49].

Особенности обучения поколения Z [49]:

– создание обучающих онлайн-курсов, которые дополняют основное общее образование и дают возможности для дистанционного освоение материала;

– подача учебного материала должна быть технологичной, наглядной и объемной;

– учебный материал должен быть четко структурирован;

– смена деятельности на различных этапах урока;

– использование на уроках контекста повседневной жизни и элементов геймификации в ходе учебного процесса;

– обеспечение оперативной обратной связи;

– использование на уроках активных и интерактивных методов обучения;

– живое общение с позитивным настроем на намеченный результат.

Таким образом, чтобы повысить уровень математической подготовки у обучающихся, необходимо учитывать особенности современного поколения.

Поэтому на уроках целесообразно использовать новые формы и средства обучения.

1.2. Изучение показательных и логарифмических неравенств в 10-11 классах

Рассмотрим теоретические аспекты изучения показательных и логарифмических неравенств в старшей школе. Приведем понятия показательного неравенства, логарифмического неравенства, рассмотрим основные свойства логарифмов и степеней, а также основные методы, которые можно использовать при решении логарифмических и показательных неравенств.

Показательное неравенство – это неравенство, которое содержит переменную в показателе степени [13].

Показательное выражение a^x имеет смысл только в том случае, если $a > 0$, $a \neq 1$, а переменная x принимает любые значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$. a – это основание, а x – показатель степени.

Приведем пример показательного неравенства:

$$2^{2x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} + 5 \leq 0$$

Рассмотрим разные свойства степеней с целыми, а также рациональными показателями:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, b \neq 0$
6. $a^0 = 1$
7. $a^1 = a$
8. $1^x = 1$
9. $0^x = 0,$ где $x \neq 0$

10. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

11. $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[x]{a^y}$

12. Если $a > 1$ и $x < y$, то $a^x < a^y$

13. Если $0 < a < 1$ и $x < y$, то $a^x > a^y$

Перечисленные свойства применимы только в том случае, если выполняется следующее условие:

$$a^x > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0$$

a^x принимает значения больше 1, при этом $x > 0$ или принимает значения, которые могут находиться в следующем промежутке $(0; 1)$, при этом $x < 0$.

Логарифмическое неравенство – это такое неравенство, которое содержит некоторые логарифмические выражения. Они могут находиться как в одной части неравенства, так и сразу в двух частях. Логарифмическое выражение – это выражение, в котором находится переменная под знаком логарифма [13].

Приведем пример логарифмического неравенства:

$$\frac{log_2 x - 5}{1 - 2log_2 x} \geq 2\, log_2 x$$

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$ называется показательная степень, в которую необходимо возвести a, чтобы получить b [19].

$$log_a b = x, b > 0, a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow a^x = b$$

a называется основанием, b – аргументом логарифма, а x – значением логарифма.

Перечислим основные свойства логарифмов:

1. $log_a a^x = x$ (данное свойство следует из определения логарифма)

2. $a^{log_a b} = b$ (данное свойство следует из определения и называется основным логарифмическим тождеством)

3. $log_a a = 1$

4. $log_a 1 = 0$

5. $log_a(bc) = log_a|b| + log_a|c|, bc > 0$

6. $log_a \frac{b}{c} = log_a|b| - log_a|c|, \ \frac{b}{c} > 0$

7. $log_a b^k = k \cdot log_a|b|, b^k > 0$

8. $log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot log_a b, a > 0, a \neq 1$

9. $log_a b = log_{a^n} b^n, n \neq 0$

10. $log_{a^n} b^k = \frac{m}{k} log_a b$

11. $log_a b = \frac{1}{log_b a}, a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$

12. $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}, a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1, a \neq 1$ (формула перехода от одного основания к другому)

13. $a^{log_c b} = b^{log_c a}, \ a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 0$

14. $a^{\sqrt{log_a b}} = b^{\sqrt{log_b a}}$

15. $log_{ac} b = \frac{log_{|a|} b}{(1 + log_{|a|}|c|)}$, где $ac \neq 0$.

Приведенные в данном параграфе свойства логарифмов и степеней используются при решении разных логарифмических и показательных неравенств.

Некоторые логарифмические и показательные неравенства можно свести к простейшим, линейным, квадратным или другим рациональным неравенствам с помощью разных преобразований или методов. В результате неравенства можно решить, используя метод интервалов или более простые приемы.

Часто при решении неравенств используется не один метод, а комбинация нескольких.

Основными методами, которые можно использовать при решении показательных и логарифмических неравенств, являются: логарифмирование и потенцирование, приведение подобных членов неравенства и их группировка, метод разложения на множители, метод почленного деления, способ введения новой переменной, метод рационализации или метод замены множителей, метод мажорант, решение с помощью равносильной системы.

Не все вышеперечисленные свойства логарифмов и степеней, а также методы решения логарифмических и показательных неравенств изучаются в школьном курсе математики.

Далее рассмотрим разные УМК по алгебре и началам анализа для старшей школы и проанализируем основное содержание темы “Логарифмические и показательные неравенства”.

В УМК под редакцией С.М. Никольского тема «Показательная и логарифмическая функции» изучается в 10 классе.

В главе “Рациональные уравнения и неравенства“ есть параграф, который посвящен методу интервалов решения неравенств.

Изложение темы «Показательная функция» начинается со свойств степеней. В учебнике рассматриваются свойства степеней не с целыми, а рациональными показателями.

В УМК под редакцией Никольского С.М. данные свойства представлены в виде теорем с доказательством.

Далее изучается показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 0$. Она рассматривается на множестве рациональных чисел. Строятся графики данной функции при $a > 0$ и $0 < a < 1$, а также описываются свойства показательной функции.

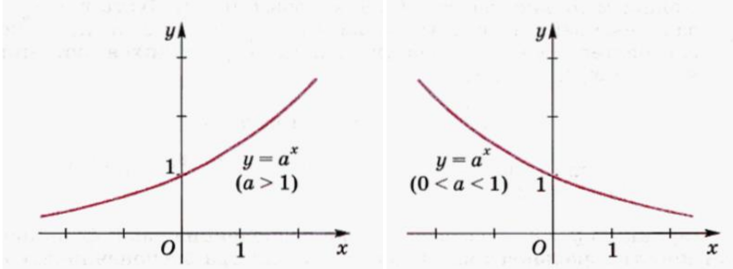


Рисунок 1 – Графики показательной функции при $a > 0$ и $0 < a < 1$

Далее изучаются логарифмы. Приведем понятие логарифма, указанное в УМК под редакцией Никольского С.М..

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называют число α, такое что $b = a^{\alpha}$ [6].

Логарифмы положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) обозначают так: $\alpha = log_a b$ [6].

В данном УМК вместе с понятием логарифма даются понятия десятичного логарифма и натурального логарифма, а также приводятся примеры их вычисления.

В учебнике приводятся следующие понятия десятичного и натурального логарифмов.

Логарифм положительного числа b по основанию e называют натуральным логарифмом числа b и обозначают lnb, то есть вместо $log_e b$ пишут lnb [6].

Примеры вычисления натуральных логарифмов: $ln\, e^3 = 3,\, ln\frac{1}{e} = -1$.

Логарифм положительного числа b по основанию 10 называют десятичным логарифмом числа b и обозначают lnb, то есть вместо $log_{10} b$ пишут $lg\, b$ [6].

Примеры вычисления десятичных логарифмов: $lg\, 1 = 0$, т.к. $1 = 10^0$; $lg\, 100 = 2$, т.к. $100 = 10^2$; $lg\, 0{,}01 = -2$, т.к. $0{,}01 = 10^{-2}$.

Далее в УМК рассматриваются и доказываются некоторые свойства логарифмов, которые приведены выше. Также данные свойства показываются на примерах.

В УМК нет указания, что в левой части формул числа b и c могут быть отрицательными, поэтому в логарифмах произведения, частного и степени нет знака модуля.

Далее рассматривается логарифмическая функция $y = log_a x$. Она определена лишь на множестве положительных чисел. При $a > 1$ логарифмическая функция возрастает, а при $a \in (0; 1)$ – убывает [6].

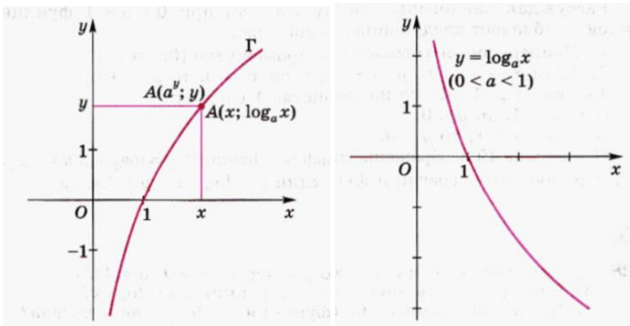


Рисунок 2 – Графики логарифмической функции при $a > 1$ и $0 < a < 1$

После рассматриваются свойства для логарифмической функции, с разными основаниями.

Также отдельный параграф отводится для изучения десятичных логарифмов.

Далее изучаются простейшие показательные и логарифмические уравнения, а также неравенства.

Приведем определения простейшего показательного неравенства и простейшего логарифмического неравенства, которые указаны в рассматриваемом УМК.

Пусть a – данное положительное, не равное 1 число, b – данное действительное число. Тогда неравенства $a^x > b$ и $a^x < b$ называются простейшими показательными неравенствами [6]..

Приведем примеры заданий с простейшими показательными неравенствами:

$$2^x < 3;\ 81 \cdot 3^x > 1;\ 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x < -5;\ 49 \cdot 4^x - 16 \cdot 7^x > 0.$$

Всего в учебнике 6 заданий (36 примеров), в которых предлагается решить простейшие показательные неравенства.

Пусть a – данное положительное, не равное 1 число, b – данное действительное число. Тогда неравенства $log_a\, x > b$ и $log_a\, x < b$ называются простейшими логарифмическими неравенствами [6].

Всего в учебнике 6 заданий (28 примеров), в которых предлагается решить простейшие показательные неравенства. Приведем примеры заданий, в которых необходимо решить простейшие логарифмические неравенства:

$$5\,log_2\,x > 1;\; log_3\,x + log_9\,x + log_{27}\,x < \frac{11}{3};\; log_3\,x + log_4\,x > log_2\,0{,}5.$$

В отдельном параграфе рассматриваются неравенства, которые сводятся к простейшим заменой неизвестного. Данная тема рассматривается в УМК на примерах. Предлагается 18 заданий (83 примера), в которых необходимо решить показательные и логарифмические неравенства. Например:

$$9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{2+3x} \geq \frac{1}{81} \text{ и } log_2(log_3\,x) > 1.$$

В 11 классе изучается понятие равносильности неравенств, перечислены равносильные преобразования.

Пусть даны два неравенства $f(x) > g(x)$ и $\varphi(x) < \omega(x)$. Если любое решение первого неравенства является решением второго, а любое решение второго неравенства является решением первого, то таки неравенства называются равносильными. Иными словами, два неравенства равносильны, если совпадают множества всех решений этих неравенств [8].

Замену одного неравенства другим равносильным ему неравенством называют равносильным преобразованием неравенства [8].

Основные преобразования неравенств [8]:

1. перенос члена неравенства (с противоположным знаком) из одной части неравенства в другую;
2. умножение (деление) обеих частей неравенства на положительное число;
3. применение тождеств;
4. возведение неравенства в нечетную степень;
5. извлечение корня нечетной степени из обеих частей неравенства;
6. логарифмирование показательного неравенства.

Применение преобразований 1-5 приводит к неравенству с тем же знаком, а применение преобразования 6 при $a > 1$ приводит к неравенству с тем же знаком, а при $0 < a < 1$ к неравенству с противоположным знаком.

Вводится понятие логарифмирования показательного неравенства.

Замену неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ неравенством $f(x) > g(x)$ (при $a > 0$) или неравенством $f(x) < g(x)$ (при $0 < a < 1$) называют логарифмированием показательного неравенства [8].

Для решения нестрогого неравенства $f(x) \geq g(x)$ (1) надо: решить уравнение $f(x) = g(x)$ (2); решить неравенство $f(x) > g(x)$ (3).

И тогда множество решений неравенства (1) есть объединение всех решений уравнения (2) и всех решений неравенства (3).

Предлагаются следующие задания, в которых необходимо решить показательные неравенства:

$$2^{x+1} > 2^{x^2-5} \text{ и } \left(\frac{2}{5}\right)^{4-x} < \left(\frac{5}{2}\right)^{2x+1}.$$

В параграфе всего 8 заданий (26 примеров), в которых необходимо решить показательные неравенства.

Рассматривается решение неравенств с помощью систем. Для логарифмических неравенств приведено следующее правило.

Неравенство $log_a f(x) > log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно двойному неравенству $f(x) > g(x) > 0$, а при $0 < a < 1$ равносильно двойному неравенству $0 < f(x) < g(x)$ [8].

Также при решении показательного или логарифмического неравенства можно использовать следующие правила [8].

Множество решений каждого из неравенств $f(x) \cdot g(x) > 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ есть объединение множеств решений двух систем $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$.

Множество решений каждого из неравенств $f(x) \cdot g(x) < 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ есть объединение множеств решений двух систем $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Предлагается решить следующие логарифмические, а также показательные неравенства:

$$log_2(x^2 - 5x - 34) > log_2(x + 6);\ \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3}{3^x} < 0;\ log_x \frac{8x-7}{8x+13} \geq log_x \frac{14x-9}{8x+13}.$$

В параграфе “Другие преобразования неравенств” приведены следующие преобразования (также к ним приведены примеры) [8]:

1. потенцирование логарифмических неравенств;

Пусть в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны, тогда на множестве M равносильны неравенства: $log_a f(x) > log_a g(x)$ и $f(x) > g(x)$, если $a > 1$; $log_a f(x) > log_a g(x)$ и $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

2. приведение подобных членов;

Пусть в каждой точке множества *M* определена функция $\varphi(x)$. Тогда на множестве *M* равносильны неравенства $f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) > 0$ и $f(x) > 0$

3. применение формул.

Пусть в каждой точке множества *M* определены обе части некоторой формулы (логарифмической, тригонометрической и т.п.). Тогда, применив эту формулу при решении неравенства, получим неравенство того же знака, равносильное на множестве *M* исходному неравенству.

По данной теме в 6 заданиях даны логарифмические неравенства (18 примеров). Предлагается решить следующие неравенства:

$$log_{25}(x^2 - 7) > log_{25}(x - 1);\ log_{\frac{\sqrt{10}}{3}}(1 - 3x) < 2;\ 2^{log_2(3-2x)} < 4.$$

Также в одном из параграфов рассматривается применение сразу нескольких преобразований к неравенству (на примерах). Предлагается 4 задания (14 примеров), в которых необходимо решить логарифмические неравенства. Например:

$$log_2(x + 1) + log_2(3x - 1) > log_2(9x + 5) \text{ и } log_{11}\frac{1}{4x-7} > log_{11}\frac{1}{5x-14}.$$

В УМК под редакцией Г.К. Муравина основные свойства степеней начинают изучаться в 10 классе. Степени рассматриваются с рациональными показателями. Некоторые свойства учащиеся должны доказать самостоятельно.

Далее рассматривается показательная функция, а также ее свойства и график.

Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 0$ называют показательной [23].

Аргументом функции $y = a^x$ является показатель степени, поэтому такие функции называются показательными. Основанием степени с рациональным показателем может быть только положительное число, отличное от 1 [23].

Также без доказательства принимается то, что степени с действительными показателями обладают такими же свойствами, что и степени с рациональными показателями.

Вначале рассматривается функция $y = a^x$ при $a = 2$, строится ее график. Далее в одной системе координат рассматриваются графики показательной функции с основаниями, которые больше 1. На основании этого формулируются свойства, общие для всех функций вида при $a > 1$.

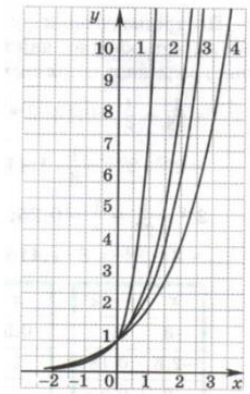


Рисунок 3 – Графики показательных функций с основаниями больше 1

Далее строится график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и делается вывод о свойствах показательной функции при $0 < a < 1$ (в этом случае показательная функция убывает).

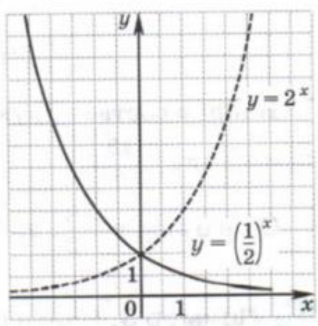


Рисунок 4 – Графики показательных функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = 2^x$

В этом же параграфе даются задания, в которых необходимо решить показательные неравенства. Всего предлагается 2 задания (11 примеров).

Приведем примеры заданий:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 16;\ \frac{2^x - 0.5}{3+x} > 0.$$

После изучения темы “Показательная функция” рассматривается понятие логарифма, а также обосновывается необходимость его введения. При решении уравнения $2^x = 3$ число 3 нельзя представить в виде степени с основанием 2 и рациональным показателем. Строятся графики функции $y = 2^x$ и $y = 3$, они пересекаются в точке, а это значит, что уравнение $2^x = 3$ имеет корень [23].

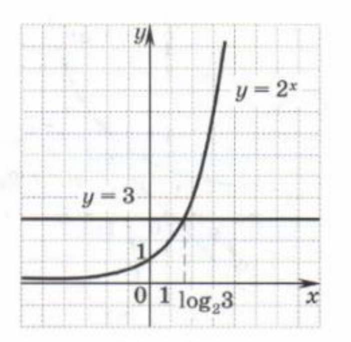


Рисунок 5 – Графическое решение уравнения $2^x = 3$

Дано следующее определение логарифма.

Показатель степени, в которую нужно возвести число a ($a > 0$, $a \neq 1$), чтобы получит число b, называется логарифмом b по основанию a и обозначается $log_a b$ [23].

В этом же параграфе дается основное логарифмическое тождество: $a^{log_a b} = b$.

Далее сразу изучается логарифмическая функция, рассматриваются ее графики при $a > 0$ и $0 < a < 1$ и свойства. Основные свойства выделяются путем сравнения графиков показательной и логарифмической функций. Указывается, что показательная функция и логарифмическая функция являются взаимно обратными.

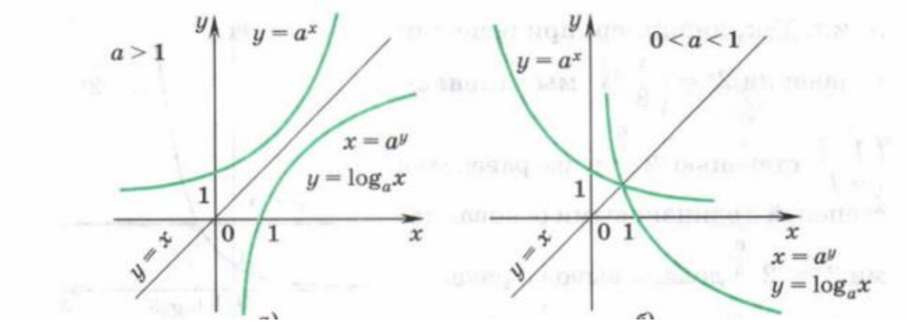


Рисунок 6 **–** Графики логарифмической функции при $a > 0$ и $0 < a < 1$

Также, в качестве примеров, приведены полные решения следующих логарифмических неравенств: $log_{x+2}(5-1) > 1$ и $log_3\, log_{0,5}(2x+1) > 1$.

Дано понятие области допустимых значений.

Область допустимых значений – это множество значений переменной x, при которых все входящие в данное неравенство выражения имеют смысл [23].

Есть 4 задания (22 примера), в которых необходимо решить логарифмические неравенства, например:

$$log_5(x+2) > 2;\ log_{x+4}\frac{x^2-1}{3} < 0;\ log_{0,6}\, log_{0,5}(x+1) > 0.$$

В одном из заданий предлагается решить неравенства, используя метод интервалов (6 примеров), например:

$$\frac{log_5 x - 2}{2 - log_6 x} > 0.$$

В следующем параграфе приводятся основные свойства логарифмов. Есть замечание насчет того, что в левой части формул логарифма произведения, частного и степени, числа a и b могут быть отрицательными.

Указанные свойства даются без доказательства.

Также приводятся понятия логарифмирования и потенцирования равенства.

Логарифмирование равенства по основанию – это нахождение логарифма с одинаковым основанием обеих частей этого равенства [23].

Потенцирование равенства – это нахождение числа по известному его логарифму [23].

Рассматриваются десятичные (логарифмы с основание 10) и натуральные логарифмы (логарифмы с основанием e).

В заданиях предлагается решить логарифмические неравенства. Таких примеров 10. Например:

$$log_{\pi}(x+27) - log_{\pi}(16-2x) < log_{\pi} x; log_x log_2(4^x - 12) \leq 1.$$

В параграфе, который называется "Функции и графики" говорится, что при решении неравенств могут использоваться свойства монотонности, т.е. возрастания и убывания функции. Также даны 4 примера, в которых необходимо решить показательное и логарифмические неравенства.

Также упоминается важное свойство непрерывных функций – сохранение знака на промежутках области определения, на которых она не обращается в 0 [23]. На этом свойстве основано решение неравенств методом интервалов.

В параграфе "Уравнения и неравенства" вводится понятие равносильности.

Неравенства одним и тем же множеством решений называют равносильными. В большинстве случаев в процессе решения исходное неравенство заменяется более простым и т.д., пока оно не будет приведено к простейшему виду [23].

При замене одного неравенства другим могут встретиться три случая:

1. множества решений первого и второго неравенства совпадают (решения второго неравенства можно сразу записать в ответ);

2. множество решений второго неравенства содержит все решения первого, в этом случае второе неравенство называют следствием первого и при этом решения второго, которые не являются решениями первого, называют посторонними;

3. множество решений второго неравенства содержит не все решения первого, то есть решения теряются.

Преобразования называют равносильными, если они не могут изменить множества решений [23].

Преобразования называют неравносильными, если их применение может привести к посторонним решениям или потере решения. Неравносильное преобразование не гарантирует сохранения множества решений [23].

Две причины неравносильности преобразований – это изменение области допустимых значений и расширение сферы действия правил.

В учебнике под редакцией Г.К. Муравина для 11 класса отсутствует теория, которая касается логарифмических и показательных неравенств. Предложены несколько заданий, в которых необходимо решить данные виды неравенств:

$$5^{2x+1} > 5^x + 4;\ 2\,log_5\,x - log_x\,125 < 1;\ log_{100}\,x^2 + lg^2x < 2.$$

Изучение темы “Показательная функция” по УМК под редакцией А.Г. Мордковича начинается в 11 классе.

Перед этим изучаются степени с любыми рациональными показателями. Далее в учебнике приводятся свойства степеней.

Вначале изучается показательная функция на примерах. Рассматриваются две функции – $y = 2^x$и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, описываются их свойства, а также строятся графики. Затем формулируется общее определение показательной функции, рассматриваются ее основные свойства и строятся графики при $a > 1$ и $0 < a < 1$.

В ученике даётся следующее определение показательной функции: функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют показательной функцией [26].

Рисунок 7 – Графики показательной функции $y = a^x$ при $a > 1$ и $0 < a < 1$

На основе свойства монотонности показательной функции приведены теоремы 2 и 4, касающиеся неравенств.

Теорема 2. Если $a > 1$, то неравенство $a^x > 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$.

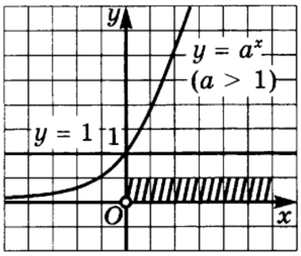


Рисунок 8 – Графическое решение неравенства $a^x > 0$ при $a > 1$

Неравенство $a^x < 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$.

Теорема 4. Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$;

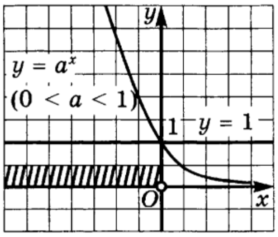


Рисунок 9 – Графическое решение неравенства $a^x > 1$ при $0 < a < 1$

Неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$.

Далее в тексте учебника дается определение показательного неравенства.

Показательными неравенствами называются неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где a – положительное число, отличное от 1, неравенства, сводящиеся к этому виду [26].

Также рассматривается теорема равносильности. В ней говорится, что если показательное неравенство имеет вид $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то оно равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, при $a > 1$, а также равносильно неравенству $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$ [26].

Далее приводятся примеры с подробным решением разных показательных неравенств. При их решении используется метод введения новой переменной, метод почленного деления.

В задачнике 11 класса есть множество заданий, которые связаны с показательными неравенствами. Всего дано 46 заданий. Предлагаются задания, в которых необходимо решить неравенство, найти количество целочисленных решений неравенства, количество натуральных чисел, являющихся решением неравенства. Приведем несколько примеров:

$$4^{5x-1} > 16^{3x+2};\ 2^x \cdot 3^x \geq 36^x \cdot \sqrt{6};\ 7^{2x+1} + 7^{2x+2} + 7^{2x+3} \geq 57.$$

В учебнике для 11 класса под редакцией А.Г. Мордковича впервые рассматривается понятие логарифма и говорится о необходимости его введения.

Необходимость введения логарифма рассматривается на примере графического решения уравнения. Вследствие чего возникает трудность, которая заключается в том, что по чертежу невозможно определить значение корня, можно лишь установить, что он заключен в промежутке от 2 до 3 [26].

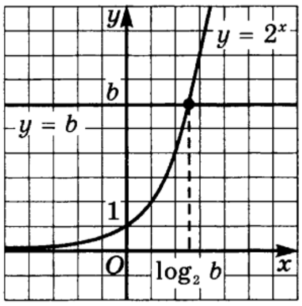


Рисунок 10 – Графическое решение уравнения $2^x = b$

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a, называют показатель степени, в которую необходимо возвести число a, чтобы получить число b [26].

Пример: $log_2 8 = 3$, т.к. $2^3 = 8$.

Далее даются свойства логарифмов. Некоторые свойства предлагается обосновать самостоятельно.

Также изучается понятие логарифмирования (операция по нахождению логарифма числа).

Рассматривается логарифмическая функция, ее график, ее основные свойства.

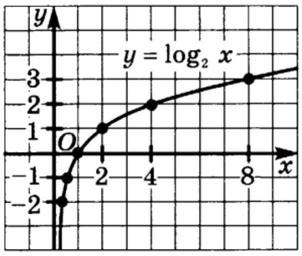


Рисунок 11 – Графики логарифмической функции

Также в данном параграфе предлагается решить несколько логарифмических неравенств, например: $log_2 x > 0$ и $log_{\frac{2}{3}} x \leq 0$.

Далее авторы ученика приводят несколько теорем с доказательством, в которых говорится о свойствах логарифмов.

Затем рассматривается понятие потенцирования (нахождение выражения, логарифм которого представлен через логарифмы некоторых чисел) и десятичные логарифмы.

После рассматриваются логарифмические неравенства и две теоремы о равносильности двух систем неравенств.

Логарифмическими неравенствами называются неравенства вида $log_a f(x) > log_a g(x)$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, и неравенства, сводящиеся к этому виду [26].

Теорема 1. Пусть $a > 1$ и X – решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$. Тогда неравенство $log_a f(x) > log_a g(x)$ равносильно на множестве X неравенству $f(x) > g(x)$.

Теорема 2. Пусть $0 < a < 1$ и X – решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$. Тогда неравенство $log_a f(x) > log_a g(x)$ равносильно на множестве X неравенству $f(x) < g(x)$.

На практике даны теоремы применяются следующим образом. Переходят от неравенства $log_a f(x) > log_a g(x)$ при $a > 1$ к равносильной ему системе неравенств [26]:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

При $0 < a < 1$ переходят к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

В задачнике предложено множество заданий по логарифмическим неравенствам. Всего 47 разных заданий. Например:

$$log_5 x > log_5(3x - 4); \frac{1 - log_4 x}{1 + 2\, log_4 x} \leq \frac{1}{2}; \; log_2 \frac{1}{6 - x} \leq log_{0,5} x^2.$$

В главе “Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств” вводится понятие равносильности неравенств.

Два неравенства с одной переменной $f(x) > g(x)$ и $p(x) > h(x)$ называются равносильными, если их решения (т.е. множества частных решений) совпадают [26].

Также сформулированы 6 теорем равносильности неравенств. Далее рассмотрим данные равносильности, которые приведены в УМК под редакцией Мордковича А.Г. [26]:

Теорема 1. Если любой член неравенства перенести в другую часть неравенства с противоположным знаком, то получится неравенство, которое равносильно данному.

Теорема 2. При возведение обеих частей неравенства в нечетную степень, получим неравенство равносильное данному.

Теорема 3. если показательное неравенство имеет вид $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то оно равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, при $a > 1$, и равносильно неравенству $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Теорема 4.

1. При умножении обеих частей неравенства $f(x) > g(x)$ на выражение $h(x)$, которое принимает положительные значения при всех $x \in$ ОДЗ $f(x) > g(x)$, то получим неравенство $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$, которое равносильно данному.

2. При умножении обеих частей неравенства $f(x) > g(x)$ на выражение $h(x)$, которое принимает отрицательные значения при всех $x \in$ ОДЗ $f(x) > g(x)$, и изменив при этом знак неравенства, получим неравенство $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$, которое равносильно данному.

Теорема 5. При возведение обеих частей неравенства, которые не отрицательны в ОДЗ, в нечетную степень, получим неравенство равносильное данному в его ОДЗ.

Теорема 6. X является решением системы неравенств вида $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Тогда неравенство $log_a f(x) > log_a g(x)$ равносильно на множестве X неравенству f(x) $> g(x)$ при $a > 1$, а при $0 < a < 1$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

В задачнике представлены задания, в которых необходимо решить логарифмические и показательные неравенства с помощью теорем равносильности, методом введения новой переменной, функционально-графическим методом. Например:

$$log_{14}(x-1) \leq log_{14}(2x+3) \text{ и } 3^{2x} - 2 \cdot 3^x \geq 0.$$

Проанализировав содержание разных УМК для старших классов, можно сказать, что изложение темы доступно и понятно.

Но наиболее полно и детально темы “Логарифмические и показательные неравенства” представлены в учебниках математики под редакцией С.М. Никольского и А.Г. Мордковича. В учебниках для 11 класса есть отдельная глава, которая посвящена решению неравенств.

Все представленные задания соответствуют теме. Более разнообразные задания представлены в учебниках математики под редакцией С.М. Никольского и А.Г. Мордковича.

Но стоит отметить, что при решении разных логарифмических и показательных неравенств на ЕГЭ по математике профильного уровня, материалов рассмотренных УМК не достаточно.

1.3. Дидактические возможности электронного обучения математике

В данном параграфе опишем особенности электронного обучения, его достоинства, модели, инструменты.

В Концепции развития математического образования в Российской Федерации отмечается важность математики в современном мире. Математика занимает особое место в нашей жизни, а также является важной частью мирового научно-технического прогресса. Изучение математики способствует развитию познавательных способностей человека, в том числе и логического мышления [18].

В настоящее время учителя сталкиваются с некоторыми проблемами на уроках математики. К ним относятся [20].

1. низкая активность учащихся на уроке;
2. низкое усвоение и понимание учебного материала на уроке;
3. отсутствие развития критического, а также творческого мышления;
4. отсутствие мотивация на уроке;
5. отсутствие интереса к изучаемой теме урока;
6. у обучающихся нет навыков работы в группе.

Мобильные телефоны, компьютеры, планшеты, а также сеть Интернет стали неотъемлемой частью жизни детей поколения Z. Поэтому для повышения качества математического образования и решения перечисленных проблем, можно использовать электронное обучение.

Электронное обучение – это организация образовательной деятельности с применением информационных технологий, технических средств и информационно-телекоммуникационных сетей, обеспечивающих взаимодействие обучающихся и учителей [43].

Дистанционные образовательные технологии – это такие образовательные технологии, которые реализуются по большей части с использованием информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном взаимодействии педагогов и обучающихся (на расстоянии) [43].

Электронное обучение может осуществляться в аудитории или дистанционно.

При реализации образовательных программ с применением электронного обучения либо дистанционных образовательных технологий, должны быть созданы условия для функционирования электронной информационно-образовательной среды, которая включает в себя электронные информационные ресурсы, электронные образовательные ресурсы, совокупность информационных и телекоммуникационных технологий, соответствующих технологических средств и обеспечивающих освоение обучающимися образовательных программ в полном объеме и независимо от места нахождения обучающихся [43].

Перечислим основные достоинства электронного обучения [37, 38]:

1. повышение информационной культуры детей в ходе образовательного процесса;
2. освоение учителями новых информационных технологий;
3. каждый обучающийся может работать индивидуально в своем темпе, может многократно пересматривать ученый материал и возвращаться к нему;
4. применение дополнительных ресурсов для подачи материала, в которых содержатся разные видео и аудиофайлы, анимация или графика (способствует лучшему освоению информации и более наглядному представлению);
5. повышение заинтересованности и мотивации обучающихся;

6. возможность выстроить разноуровневую систему и индивидуализировать подходы, принимая во внимание потребности обучающихся.

Существует несколько моделей электронного обучения. К моделям, которые представляют собой совокупность электронного и традиционного обучения относятся: обучение с веб-поддержкой, смешанное обучение и полное электронное или онлайн-обучение [53].

К моделям смешанного обучения относятся [9]:

– смена рабочих зон (в ходе данной модели обучающиеся делятся на группы и через некоторое время переходят из одной рабочей зоны в другую);

– перевернутый класс (данная модель меняет классическое понимание классной и домашней работ);

– индивидуальный план (подразумевает работу с отдельными обучающимися);

– смена классов (в этом случае модель действует на уровне школы, а рабочей зоной является компьютерный класс);

– гибкий план (максимально учитываются потребности обучающегося, онлайн-обучение является основой);

– виртуальная модель (посещение школы необязательно).

Информационное общество допускает использование обучающимися новых средств для поиска, отбора, а также обработки различной информации. Развитие информационных технологий способствует развитию электронных образовательных технологий, что ведет к расширению возможностей их применения при обучении математики в школе [40].

Также использованию элементов электронного обучения в образовательном процессе способствует вынужденная ситуация в связи с пандемией 2020-2021 гг. Образовательные учреждения перешли на дистанционный либо смешанный формат работы, в связи с чем возникла острая необходимость освоения педагогами электронного обучения и дистанционных образовательных технологий.

Можем говорить о том, что электронная поддержка в обучении на сегодняшний день – это неизбежная реальность.

Выделим дидактические принципы электронного обучения: принцип деятельности, принцип поддерживающей дружественной среды, принцип личностно-опосредованного взаимодействия, принцип открытости коммуникативного пространства, принцип индивидуального подхода [40].

Ориентация электронного обучения на самостоятельную учебно-познавательную деятельность обучающихся, а также на повышение качества коллективного сотворчества переносит акцент с методов обучения, которые требуют участие преподавателя, на самообучение и обучение в группах [40].

К методам самообучения относятся: чтение, просмотр видео, исследование, рефлексия, интерактивное занятие, тесты, проекты.

К методам обучения в группах относятся: лекции, дискуссии, мозговой штурм, групповое решение задач (кейсы и сценарии), индивидуальная практика с оценкой другими обучаемыми, командные проекты, совместная разработка контента.

К методам обучения с преподавателем относятся: инструктирование, ответы на вопросы, коучинг и обратная связь по результатам.

К необходимости введения в образовательный процесс электронного обучения приводит также возникший в связи с пандемией особый режим работы образовательных учреждений: чередование очного и дистанционного обучения, использование онлайн и оффлайн-режимов работы.

Образовательная практика в школе показала, что до пандемии в школах на уроках математики использовались в основном компьютер и проектор, а также интерактивная доска.

Можно выделить несколько направлений в практике перевода очного обучения в онлайн-режим или дистанционное обучение. К ним относятся: обучение с применением образовательных онлайн-платформ и проведение уроков с использованием социальных сетей, электронной почты, а также мессенджеров [4, 15].

Для обеспечения такого обучения используются следующие инструменты [1]:

- системы управления цифровым обучением, такие как Google Classroom, Moodle);
- приложения для обучения, созданные на базе мобильных устройств;
- программы с расширенной оффлайн-функциональностью;
- массовые открытые онлайн-курсы или МООК;
- сервисы самообучения;
- программы, которые обеспечивают возможность совместной работы в онлайн-режиме, такие как Zoom, Skype;
- инструменты для создания цифрового учебного контента, а также электронные базы с учебными материалами.

Самоизоляция поспособствовала повышению востребованности услуг провайдеров онлайн-знаний, а также интереса к электронному обучению [5]. Некоторые крупные издательства отметили увеличение востребованности учебных материалов и сервисов в цифровом формате [2].

Но в ходе дистанционного обучения во время пандемии учителя и обучающиеся столкнулись с трудностями. Среди них можно выделить следующие: сложности с адаптаций к новому онлайн-режиму; низкая компьютерная грамотность; незнание основ тайм-менеджмента; технические неполадки, связанные с Интернет-соединением, несовместимостью разных обучающих платформ с операционными системами и браузерами; отсутствие мотивации у обучающихся; отсутствие социального взаимодействия [41].

Дистанционное обучение показало, что учителя и обучающиеся оказались не готовы к электронному обучению. Причем в большей степени это коснулось учителей. Большую роль сыграла недостаточность ИКТ-подготовки.

По статистике не менее чем у 41,4% учителей, которые старше 30 лет и получившие образование более 5 лет назад, использование ИКТ-подготовки не входило в программу их образования. Из этого следует, что эти педагоги с самого начала не были готовы к использованию разных ИКТ в ходе учебного процесса [11].

Выводы по первой главе

В данной главе было показано, что для повышения качества математического образования у современного поколения обучающихся, можно использовать электронное обучение.

Применение электронного обучения позволит повысить продуктивность обучающихся на уроке математики. Оно делает уроки математики более интересными и познавательными. Но такие положительные результаты при использовании электронного обучения возможны при условии его умелой реализации.

Также, мы можем говорить о том, что материалов УМК не достаточно при подготовке к решению разных логарифмических и показательных неравенств на ЕГЭ профильного уровня по математике. Поэтому необходимо использовать дополнительную литературу или интернет-ресурсы.

Глава 2. Организационно-методическое обеспечение курса по выбору “Показательные и логарифмические неравенства” для подготовки к профильному ЕГЭ обучающихся 10-11 классов

2.1. Учебная программа, содержание и основные методические идеи курса

В данном параграфе опишем программу курса “Показательные и логарифмические неравенства”.

Пояснительная записка

Современные дети очень много времени проводят в сети Интернет. Поэтому предлагается организовать обучение с помощью компьютера и Интернета.

15 задание ЕГЭ по математике профильного уровня является одним из заданий повышенного уровня сложности. К его выполнению приступает малое число учащихся. В этом задании также допускается большое количество ошибок при решении.

Курс “Показательные и логарифмические неравенства” реализует идею дистанционного обучения. Предполагается последовательное изучение основных типов неравенств.

Данный курс начинается с исследования разных типов алгебраических неравенств, которые являются основой для изучения трансцендентных неравенств.

Курс “Показательные и логарифмические неравенства” предназначен для учащихся 10-11 классов. Он будет полезен и интересен тем учащимся, которые сдают профильное ЕГЭ по математике и намерены выполнять задания из второй части экзамена.

Цель курса: повышение интереса и качества учебы, ее результатов в ходе использования курса, а также подготовка к сдаче профильного ЕГЭ по математике.

Задачи курса:

1. познакомить учащихся с особенностями дистанционного обучения;

2. повысить качество обучения школьников с помощью курса;

3. расширить знаний о методах и приемах решения разных типов неравенств;

4. развить умения анализировать свою деятельность, а также результаты;

5. развить умение находить наилучший способ решения разных неравенств;

Курс “Показательные и логарифмические неравенства” содержит 9 разделов для изучения. Первые шесть разделов изучают в 10 классе, остальные три – в 11 классе.

Занятия по данному курсу включают в себя материал и задания по изучаемой теме, а также домашнюю работу.

Некоторые занятия по возможности будут проводиться с использованием интерактивных методов, которые реализуются с помощью онлайн-средств. Это такие интерактивные методы, как: мозговой штурм, кейс-метод, кластеры, проекты, интервью и т.д.

Изучаемый материал представлен в виде презентаций, статей или видеоматериалов. В ходе занятия выполняются задания по рассматриваемой теме (совместно либо самостоятельно при помощи комментариев на курсе или в ходе видеоконференции). Для закрепления материала также предложны задания, созданные при помощи разных онлайн-сервисов, которые выполняются индивидуально.

Задания домашней работы необходимо выполнить каждому обучающемуся самостоятельно и отправить на проверку учителю. Срок сдачи заданий – в течение недели до следующего занятия.

Максимальный балл за выполненное задание – 100 баллов. В комментариях обучающиеся анализируют свою работу и оценивают ее по 100 бальной шкале, а после этого она проверяется учителем.

Обучающиеся также проверяют некоторые работы других участников курса и оценивают их.

По изученному разделу курса предусмотрено тестирование, которое выполняется каждым учащимся самостоятельно на разработанном курсе. В тесте есть теоретические вопросы по изученной теме и задания на решение неравенств. В конце изучения курса проводится итоговое тестирование.

Курс “Показательные и логарифмические неравенства” рассчитан на 51 час. Занятия по курсу проходят один раз в неделю и занимают по времени 1 час.

Планируемые результаты

Метапредметными результатами являются:

1. Регулятивные УУД:

– умеет ставить перед собой цели и задачи;

– умеет осуществлять самопроверку;

– умеет планировать, управлять, контролировать и корректировать собственную деятельность во время работы с курсом;

– умеет анализировать и исправлять ошибки.

2. Коммуникативные УУД:

– умеет аргументировать свое мнение в ходе дискуссии;

– умеет планировать сотрудничество с учителем и своими сверстниками.

3. Познавательные УУД:

– умеет ориентироваться в своей системе знаний;

– умеет отличать новое от уже известного;

– умеет работать с готовой информацией;

– умеет использовать знаково-символические средства математики;

– умеет строить логическую цепочку рассуждений;

– умеет самостоятельно создавать алгоритмы деятельности.

Личностными результатами являются [42]:

– способность учащихся к самоопределению и развитию;

– сформированность к мотивации и познавательной деятельности.

Предметными результатами являются [42]:

– умеет работать с учебным математическим текстом (то есть умеет анализировать и извлекать необходимую информацию);

– умеет точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики;

– знает символьный язык алгебры, приемы и методы выполнения тождественных преобразований выражений, решений неравенств, а также систем неравенств;

– владеет методами доказательств и алгоритмов решения и умеет их применять;

– умеет проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

– владеет стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных и логарифмических неравенств, их систем;

– владеет понятийным аппаратом по теме неравенства;

– знает основные теоремы о неравенствах, формулы, свойства и умеют их применять;

– умеет находить нестандартные способы решения задач.

Требования к знаниям и умениям учащихся.

Выполнение практических заданий способствует закреплению у учащихся теоретического материала, а также развитию навыков решения разных типов неравенств.

Опишем основное содержание курса “Показательные и логарифмические неравенства”.

10 класс

Первый раздел курса – “Основные понятия”. На изучение отводится 2 часа.

Неравенство. Строгое и нестрогое неравенство. Алгебраические неравенства. Общие этапы решения разных типов неравенств. Свойства неравенств. Область допустимых значений.

Второй раздел курса – “Решение линейных неравенств”. На работу с разделом отводится 3 часа.

Линейное неравенство. Равносильные преобразования при решении линейных неравенств. Графический метод решения линейных неравенств. Неравенства, сводящиеся к линейным.

Третий раздел курса – “Решение квадратных неравенств”. На изучение отводится 3 часа.

Квадратное неравенство. Методы решения квадратного неравенства. Неравенства, сводящиеся к квадратным.

Четвертый раздел – “Решение рациональных неравенств”. На изучение отводится 3 часа.

Равносильные неравенства. Этапы решения рациональных неравенств. Равносильные преобразования. Рациональные неравенства. Метод интервалов.

Пятый раздел – “Решение иррациональных неравенств”. На данный раздел отводится 4 часа.

Иррациональные неравенства. ОДЗ при решении иррациональных неравенств. Этапы решения иррациональных неравенств. Равносильные преобразования. Замена переменной. Умножение на сопряженное.

11 класс

Шестой раздел курса – “Решение показательных неравенств”. Отводится 8 часов на работу с данным разделом.

Показательное выражение. Свойства показателя степени. Показательное неравенство. Общая схема решения показательных неравенств. Логарифмирование показательного неравенства. Приведение подобных членов показательного неравенства и их группировка. Метод разложения на множители при решении показательных неравенств. Метод почленного деления при решении показательных неравенств. Способ введения новой переменной при решении показательных неравенств. Метод рационализации или метод замены множителей при решении показательных неравенств. Метод мажорант при решении показательных неравенств.

Седьмой раздел курса – “Решение логарифмических неравенств”. Количество часов, отведенное для данного раздела – 8 часов.

Понятие логарифма, основные свойства логарифмов, логарифмические неравенства. Простейшее логарифмическое неравенство. ОДЗ при решении логарифмических неравенств. Общая схема решения логарифмических неравенств. Потенцирование логарифмического неравенства. Способ введения новой переменной. Метод рационализации или метод замены множителей. Решение логарифмического неравенства с помощью равносильной системы.

Восьмой раздел курса – “Решение смешанных неравенств”. Количество часов, отведенное для данного раздела – 3 часа.

Девятый раздел курса – “Решение 15 задания ЕГЭ профильного уровня”. На решение неравенств из 15 задания ЕГЭ в курсе отводится 13 часов.

15 задание ЕГЭ по математике профильного уровня. Правила оформления 15 задания профильного ЕГЭ по математике. Критерии оценивания 15 задания. Решение 15 задания ЕГЭ.

Таблица 2

Учебно-тематический план курса “Показательные и логарифмические неравенства”

№ занятия	Наименование разделов и тем	Количество часов
10 класс		
1.	**Основные понятия.**	**2**
1.1	Неравенство. Строгое и нестрогое неравенство. Общие этапы решения разных неравенств. Алгебраические неравенства. Область допустимых значений.	1
1.2	Тестирование по теме	1

2.	**Решение линейных неравенств**	**3**
2.1	Линейное неравенство. Равносильные преобразования при решении неравенств. Графический метод решения линейных неравенств. Неравенства, сводящиеся к линейным.	1
2.2	Решение заданий по теме “Линейные неравенства”	1
2.3	Тестирование по теме	1
3.	**Решение квадратных неравенств**	**3**
3.1	Квадратное неравенство. Методы решения квадратного неравенства. Неравенства, сводящиеся к квадратным.	1
3.2	Решение заданий по теме “Квадратные неравенства”	1
3.3	Тестирование по теме	1
4	**Решение рациональных неравенств**	**3**
4.1	Рациональные неравенства. Этапы решения рациональных неравенств. Равносильные преобразования. Метод интервалов.	1
4.2	Решение заданий по теме “Рациональные неравенства”	1
4.3	Тестирование по теме	1
5	**Решение иррациональных неравенств**	**4**
5.1	Иррациональные неравенства. ОДЗ при решении иррациональных неравенств. Этапы решения иррациональных неравенств. Равносильные преобразования.	1
5.2	Замена переменной. Умножение на сопряженное.	1
5.3	Решение заданий по теме “Иррациональные неравенства”	1
5.4	Тестирование по теме	1
	Подведение итогов	**2**
	Итого:	**17**
	11 класс	
6.	**Решение показательных неравенств**	**8**
6.1	Показательное выражение. Свойства показателя степени.	1
6.2	Показательное неравенство. Типы показательных неравенств. Общая схема решения показательных неравенств. Логарифмирование показательного неравенства.	1
6.3	Приведение подобных членов показательного неравенства и их группировка. Метод разложения на множители при решении показательных неравенств.	1
6.4	Метод почленного деления при решении показательных неравенств. Способ введения новой переменной при решении показательных неравенств	1
6.5	Метод рационализации или метод замены множителей при решении показательных неравенств. Метод мажорант при решении	1

	показательных неравенств.	
6.6-6.7	Решение заданий по теме “Показательные неравенства”	2
6.8	Тестирование по теме	1
7.	**Решение логарифмических неравенств**	**8**
7.1	Логарифм. Основные свойства логарифмов.	1
7.2	Логарифмические неравенства. Простейшее логарифмическое неравенство. ОДЗ при решении логарифмических неравенств. Общая схема решения логарифмических неравенств. Потенцирование логарифмического неравенства.	1
7.3	Способ введения новой переменной при решении логарифмического неравенства.	1
7.4	Метод рационализации или метод замены множителей при решении логарифмического неравенства.	1
7.5	Решение логарифмического неравенства с помощью равносильной системы.	1
7.6-7.7	Решение заданий по теме “Логарифмические неравенства”	2
7.8	Тестирование по теме	1
8	**Решение смешанных неравенств**	**3**
8.1-8.2	Решение заданий по теме “Смешанные неравенства”	2
8.3	Тестирование по теме	1
9	**Решение 15 задания ЕГЭ профильного уровня**	**13**
9.1	15 задание ЕГЭ профильного ЕГЭ по математике. Правила оформления. Критерии оценивания 15 задания.	1
9.2-9.11	Решение 15 задания ЕГЭ	10
9.12	Тестирование по теме	2
	Подведение итогов	**2**
	Итого:	**34**
	Всего:	**51**

Опишем основные методические идеи курса по выбору.

Курс реализует идею дистанционного обучения, т.к. нынешние обучающиеся являются поколением цифровых технологий. Поэтому актуален поиск новых форм, способов и методов, позволяющих повысить результаты обучения.

Работа на курсе “Показательные и логарифмические неравенства” строится на последовательном изучении разных видов неравенств: от простейших линейных неравенств до неравенств уровня профильного ЕГЭ по математике. Обучающиеся должны понять, что без навыков решения алгебраических неравенств нет смысла приступать к изучению трансцендентных неравенств.

Курс “Показательные и логарифмические неравенства” будет способствовать росту качества и результатов при решении неравенств на ЕГЭ по математике профильного уровня, т.к. на занятиях используются разные интерактивные методы, повышающие познавательную активность обучающихся.

Курс дает возможность обучающимся подробно изучить различные способы решения показательных и логарифмических неравенств. Поэтому предлагаются задания не только на решение данных неравенств, но и на составление собственных примеров, на оценивание выполненных заданий по установленным критериям, на нахождение и исправление ошибок в примерах.

2.2. Фрагменты занятий с использованием интерактивных методов и онлайн-средств

В данном параграфе опишем фрагменты нескольких занятий курса “Показательные и логарифмические неравенства”, на которых используются интерактивные методы и онлайн-средства.

Интерактивные методы можно использовать как при очном обучении, так и при дистанционном.

Интерактивные методы – это такие методы, предполагающие взаимодействие между обучащимися и учителем, в ходе которого в обучении реализуются идеи взаимообучения, а также мыслительной деятельности [21]. Роль учителя на занятии, при использовании интерактивных методов – направлять деятельность учащихся к достижению поставленной цели урока [52]. Он является организатором учебного процесса, а также создает необходимые условия для инициативы обучающихся [12].

Взаимодействие учителя и учащихся на таком уроке можно представить в виде следующей схемы.

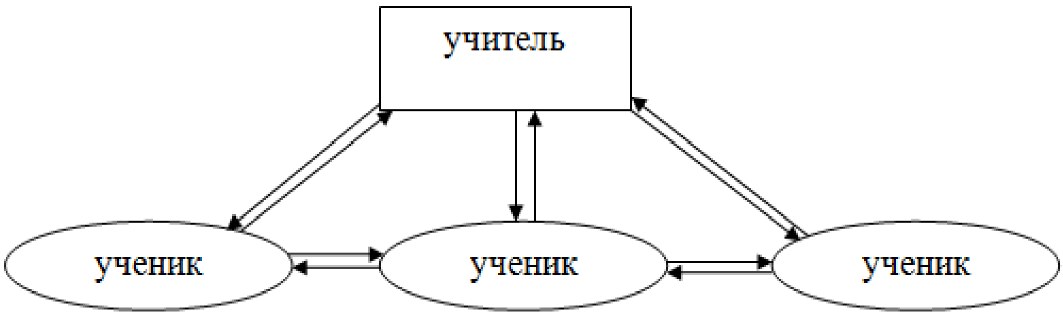


Рисунок 12 – Схема взаимодействия между учителем и обучающимися при использовании интерактивного метода на уроке

Задачи интерактивных методов [51]:

1. формирование умений поиска необходимой информации по теме занятия, ее анализу, выбору правильного решения поставленной проблемы;
2. умение формулировать и выражать свое мнение, а также грамотно его аргументировать;
3. выработка у обучающихся навыков совместной работы в группе (уважение мнения других участников, проявление терпимости к иным точкам зрения).

Существует множество интересных онлайн-средств, которые можно использовать при реализации интерактивных методов обучения на уроке.

Онлайн-средствами называются сайты или приложения, которые можно использовать при обучении [31]. С их помощью можно:

1. разнообразить деятельность учащихся на занятии;
2. представить изучаемую информацию урока в более наглядном виде, систематизировать ее;
3. на некоторых есть возможность совместной работы в режиме реального времени (можно поделить работу на уроке между учащимися так, что каждый будет выполнять свою часть задания по теме).

Причина использования интерактивных методов и онлайн-средств на курсе при подготовке к выполнению 15 задания ЕГЭ – это активизация познавательной деятельности обучающихся, а также упрощение процесса усвоения изучаемого материала через разнообразие заданий.

Приведем фрагменты занятий, на котором используются интерактивные методы и онлайн-средства их реализации.

Занятие с использованием кластера

Цели занятия:

1. развитие интереса к изучению математики;
2. развитие компетентности в области ИКТ;
3. развитие творческого интереса обучающихся.

Планируемые результаты:

Личностные: готовность и способность к саморазвитию и личностному самоопределению; сформированность мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности.

Предметные: умение самостоятельно анализировать и отбирать необходимую информацию, а также умение преобразовывать и представлять ее в удобном виде; умение самостоятельно изучать материал.

Метапредметные: умение контролировать и оценивать свои действия, умение ставит перед собой цели и задачи; владения основами самоконтроля, самооценки, принятия решения; умение осознанно использовать речевые средства; умение организовывать ученое сотрудничество; умение использовать ИКТ.

Оборудование: компьютер, телефон или планшет у каждого обучающегося.

План урока:

1. Организационный момент (6 минут)
2. Работа с лекцией и создание кластера (40 минут)
3. Представление кластеров (12 минут)
4. Рефлексия (2 минуты)

Описание занятия:

Данное занятие является первым на курсе “Показательные и логарифмические неравенства”. Перед тем, как начать работу по первой теме, учитель в ходе видеоконференции кратко описывает цели и программу курса. Затем дает указания по выполнению задания по теме “Основные понятия”. Далее обучающиеся самостоятельно с ней работают.

Всем предлагаются следующие задачи:

1. Внимательно прочитайте материал лекции по теме “Основные понятия”.

2. Выделите важные элементы лекции и представьте их в виде кластера и приведите свои примеры. При его создании можете использовать следующие сервисы: Mindomo, Canva.

Кластер – это такая форма организации информации, когда выделяются смысловые единицы, которые представляются в схеме, также указываются все связи, которые присущи этим единицам [16].

3. Представьте свои результаты по созданию кластера в ходе видеоконференции.

Таблица 3

Занятие с использованием кластера

Этап	Деятельность		Необходимое оборудование
	Учитель	Обучающиеся	
Организационный момент	Всем здравствуйте. Мы начинаем работу с курсом “Показательные и логарифмические неравенства”. Курс реализует идею дистанционного обучения. Цель данного курса: повышение интереса и качества учебы, ее результатов в ходе использовании курса, а также подготовка к сдаче профильного ЕГЭ по математике. Курс состоит из 9 разделов для изучения и включает в себя основные типы неравенств. От решения алгебраических неравенств мы перейдем к трансцендентным, которые встречаются в КИМах профильного ЕГЭ по математике.	Слушают учителя и задают вопросы	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет
Работа с лекцией и создание кластера	Сегодняшнее занятие посвящено основным понятиям, которые связаны с неравенствами. Вам необходимо внимательно	Самостоятельно выполняют задание	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет

	прочитать материал лекции по теме “Основные понятия”. Выделите важные элементы лекции и представьте их в виде кластера и приведите свои примеры. При его создании можете использовать следующие сервисы: Mindomo, Canva. Представьте свои результаты по созданию кластера в ходе видеоконференции. На выполнение данного задания у вас 40 минут. Если возникнут вопросы, можете задать их в видеоконференции или в комментариях к заданию на курсе.		
Представление кластеров	Сейчас каждый представит свой кластер по теме “Основные понятия”. Затем мы обсудим получившиеся результаты,	Выступают и представляют свои работы	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет
Рефлексия	Все молодцы, отправьте свои работы на курс. Давайте подведем итоги. Понравилось ли вам такое занятие? Что вы узнали сегодня? Было ли вам полезно данное занятие?	Оценивают свою деятельность на занятии	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет

Занятие с использованием мозгового штурма

Цели занятия:

1. развитие интереса к изучению математики и решению неравенств;
2. отработка навыков решения квадратных неравенств разными способами;
3. развитие компетентности в области ИКТ.

Планируемые результаты:

Личностные: готовность и способность к саморазвитию и личностному самоопределению; сформированность мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности.

Предметные: умение анализировать и отбирать необходимую информацию, а также умение преобразовывать и представлять ее в удобном виде.

Метапредметные: умение контролировать и оценивать свои действия; умение оценивать правильность выполнения задания; умение ставит перед собой цели и задачи; владения основами самоконтроля, самооценки, принятия решения; умение осознанно использовать речевые средства; умение организовывать ученое сотрудничество; умение использовать ИКТ.

Оборудование: компьютер или планшет у каждого обучающегося, доступ в сеть Интернет, тетрадь у каждого обучающегося.

План урока:

1. Организационный момент (2 минуты)
2. Мозговой штурм (33 минуты)
3. Решение заданий (23 минуты)
4. Рефлексия (2 минуты)

Описание занятия:

Занятие с использованием интерактивного метода мозговой штурм проходит при изучении третьего раздела программы курса (занятие 1).

Суть данного метода в том, чтобы оперативно решить некоторую проблему при помощи группового обсуждения. Особенность метода – это творческие и креативные варианты решения, которые предложены учащимися [10]. Учащиеся высказывают как можно больше идей по решению данной проблемы. Важно, чтобы все, кто хочет, высказали свои идеи. Лучше сразу записывать на доске либо на отдельном листе.

Обучающиеся должны принять участие в мозговом штурме, в ходе которого предложить как можно больше идей по решению одного квадратного неравенства. Ставится вопрос: “Каким способом удобнее решить квадратное неравенство $x^2 - 7x + 6 > 0$?”. Свои идеи необходимо представить на онлайн-доске. Для этого можно использовать сервисы: Miro, Conceptboard и др. Далее каждый обучающийся выбирает один метод и самостоятельно описывает его. После этого проводится совместное обсуждение данных методов, выделяются его плюсы и минусы, выбирается наиболее удобный метод решения квадратного неравенства. Далее решаются разные квадратные неравенства, а также неравенства, сводящиеся к квадратным.

Таблица 4

Занятие с использованием мозгового штурма

Этап	Деятельность		Необходимое оборудование
	Учитель	Обучающиеся	
Организационный момент	Всем добрый день. Начнем работу с вопроса. Что вы помните о квадратных неравенствах?	Отвечают на вопрос	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет
Мозговой штурм	А теперь проведем мозговой штурм. “Каким способом удобнее решить квадратное неравенство $x^2 - 7x + 6 > 0$?”. Сейчас мы поработаем в онлайн-доске. Каждый выбирает один метод и кратко описывает его, а также приводит решение указанного неравенства. Далее мы обсудим получившиеся результаты и выделим плюсы и минусы каждого метода.	Предлагают свои идеи (среди них могут быть: метод интервалов, графическое решение неравенства, онлайн-решение и т.д.) Работают с онлайн-доской и участвуют в обсуждении	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет
Решение заданий	На курсе есть список квадратных неравенств, вам необходимо решить квадратные неравенства наиболее рациональным методом. Все неравенства отправьте на курс. До следующего занятия вам необходимо выполнить задания лабораторной работы, а также проверит несколько заданий своих одноклассников и оценить правильность их	Решают квадратные неравенства	Компьютер (планшет, телефон), доступ в Интернет и тетрадь

	выполнения.		
Рефлексия	Если у вас остались вопросы по теме, можете задать их сейчас или в комментариях на курсе. Подведем итоги. Что вам понравилось на сегодняшнем занятии? Все ли было понятно? Интересна ли вам такая работа?	Оценивают свою деятельность на занятии	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет

Занятие с использованием кейс-метода

Цели занятия:

1. развитие интереса к изучению математики и решению неравенств;
2. отработка практических навыков при решении простейших логарифмических и показательных неравенств;
3. развитие компетентности в области ИКТ.

Планируемые результаты:

Личностные: готовность и способность к саморазвитию и личностному самоопределению; сформированность мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности.

Предметные: умение анализировать и отбирать необходимую информацию.

Метапредметные: умение контролировать и оценивать свои действия; умение оценивать правильность выполнения задания; умение ставит перед собой цели и задачи; владения основами самоконтроля, самооценки, принятия решения; умение осознанно использовать речевые средства; умение организовывать ученое сотрудничество; умение использовать ИКТ.

Оборудование: компьютер или планшет у каждого обучающегося, доступ в сеть Интернет, документ с заданием кейса, тетрадь.

План занятия:

1. Организационный момент (2 минуты)
2. Работа с кейсом (29 минут)
3. Подведение итогов работы с кейсом (5 минут)

4. Решение показательных неравенств (20 минут)
5. Рефлексия (2 минуты)

Описание занятия:

Занятия с использованием кейс-метода проводятся в ходе изучения 7 и 8 разделов. Они проводятся в ходе видеоконференции. Обучающиеся делятся на группы по два-три человека.

Это такой метод, при котором новые знания получаются индивидуально или совместно в группе при анализе конкретной ситуации, которая не дается учащимся в готовом виде [35]. Каждой группе выдается кейс, то есть набор с некоторыми материалами (это может быть распечатанный материал, видео- или аудио- запись, либо электронный вариант материалов) [27].

Обучающимся необходимо проанализировать ситуацию, которая описана в кейсе и по ней составить неравенство, а затем решить его наиболее удобным способом.

Кейс 1 (для показательных неравенств).

Название: показательная функция в нашей жизни.

Введение:

Разные функциональные зависимости существуют практически во всех сферах жизни человека. а другие постоянными. Показательная функция не является исключением. Она находит применение в разных сферах науки, таких как биология, физика, химия, экономика и т.д.

Текст:

Бактерия кишечной палочке в питательной среде делится каждые 20 минут. Общее число бактерий за каждый час увеличивается в 8 раз.

Найдите количество часов, за которое число бактерий не превысит 4096.

Кейс 2 (для логарифмического неравенства).

Название: логарифмы в нашей жизни.

Введение:

С появлением логарифмов значительно упростились трудные вычисления. Основные свойства логарифмов помогают на практике многом людям. Они находят применение в разных сферах, в том числе и в информатике.

Текст:

В трех книгах одинаковое число страниц. Количество информации, которое несут все три книги, превышает 3Мб. Найдите, какое сообщение может нести одна книга.

Также всем группам предлагаются следующие задачи:

1. Внимательно прочитайте задачу. О чем говорится в задаче?
2. Что необходимо найти в задаче?
3. Определите, какой вид имеет показательная/логарифмическая функция в задаче.
4. Составьте неравенство.
5. Решите неравенство (для этого вам необходимо изучить лекцию на курсе).
6. Опишите ход своих действий при решении неравенства в любом удобном для вас виде с помощью онлайн-средств (это может быть презентация, буклет, схема). Представьте свое решение в ходе видеоконференции.

Таблица 5

Занятие с использованием кейс-метода

Этап	Деятельность		Необходимое оборудование
	Учитель	Обучающиеся	
Организационный момент	Здравствуйте, сегодня на занятии мы поработает с кейсами. Материалы кейса представлены на нашем курсе. Зайдите на курс и ознакомьтесь с тем, что такое метод-кейсов и с его содержанием.	Слушают учителя	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет
Работа с кейсом	На работу с кейсом у вас есть 20 минут. Если возникнут вопросы, то можете их задавать в	Работают с кейсом	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в

	комментариях или в видеоконференции		Интернет
Подведение итогов работы с кейсом	Какое неравенство у вас получилось? Каким способом вы его решили?	Принимают участие в обсуждении	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет
Решение показательных неравенств	На курсе есть список неравенств, вам необходимо решить простейшие показательные/логарифмические неравенства. Все неравенства отправьте на курс. До следующего занятия вам необходимо выполнить задания лабораторной работы, а также проверит несколько заданий своих одноклассников и оценит правильность их выполнения.	Решают неравенства	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет, тетрадь
Рефлексия	Если у вас остались вопросы по теме, можете задать их сейчас или в комментариях на курсе. Также на сайте выставлена лекция по сегодняшней теме. Подведем итоги. Что вам понравилось на сегодняшнем занятии? Все ли было понятно? Что бы вы изменили?	Оценивают свою деятельность на занятии	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет

Занятие с использованием проектов

Цели занятия:

1. развитие интереса к изучению математики;
2. развитие творческой активности обучающихся;
3. развитие компетентности в области ИКТ.
4. обобщение и систематизация изученного материала курса.

Планируемые результаты:

Личностные: готовность и способность к саморазвитию и личностному самоопределению; сформированность мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности.

Предметные: умение анализировать и отбирать необходимую информацию, а также умение преобразовывать и представлять ее в удобном виде.

Метапредметные: умение контролировать и оценивать свои действия, умение самостоятельно планировать пути своей деятельности; владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решения; умение ставит перед собой цели и задачи; умение осознанно использовать речевые средства; умение организовывать ученое сотрудничество; умение использовать ИКТ.

Оборудование: компьютер, телефон или планшет у каждого обучающегося, доступ в сеть Интернет.

План урока:

1. Организационный момент (2 мин)
2. Работа над проектами (95 мин)
3. Подведение итогов работы над проектами (20 мин)
4. Рефлексия (3 мин)

Описание занятия:

Данное занятие является итоговым занятием всего курса. Обучающиеся работают в парах и выполняют проект по теме "Неравенства". В нем необходимо отразить всю изученную информацию по курсу и привести примеры. Форму представления проекта обучающиеся выбирают сами. Это может быть брошюра, ментальная карта, доска, инфографика и т.д. Для выполнения проекта можно использовать разные онлайн-сервисы, такие как: Canva, Mindomo, Miro, Conceptboard.

После завершения работы над проектами обучающиеся представляют их всем в ходе видеоконференции.

Таблица 6

Занятие с использованием проектов

Этап	Деятельность		Необходимое оборудование
	Учитель	Обучающиеся	
Организационный момент	Всем здравствуйте. Сегодня у нас завершающее занятие по нашему курсу. Чтобы подвести итоги, выполним небольшой проект. Тема "Неравенства". В нем	Слушают учителя и задают вопросы	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет

	необходимо кратко отразить всю изученную информацию по курсу и привести примеры. Форма представления проекта – в виде брошюры, ментальной карты, доски, инфографики и т.д. Используйте любую форму и любой онлайн-сервис на ваш выбор. У вас на выполнение 95 минут.		
Работа над проектами	Консультирует обучающихся по возникшим вопросам	Работают над проектами	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет
Подведение итогов работы над проектами	Сейчас вы представите свои проекты, а затем выберем лучший. Перед сдачей экзамена вы можете просмотреть этот краткий конспект всех тем	Представляют свои проекты	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет
Рефлексия	Подведем итоги. Понравилось ли вам работать с курсом? Что вам не понравилось? Был ли он полезен? Остались ли у вас вопросы?	Участвуют в беседе	Компьютер (планшет, телефон) и доступ в Интернет

Представленные занятия, способствуют развитию познавательного интереса и повышению мотивации обучающихся. У каждого есть возможность принять участие в учебном процессе, выразить свое мнение и идеи, а также научится взаимодействовать друг с другом и работать самостоятельно.

2.3. Результаты опытно-экспериментальной работы

Исследование проводилось в течение 2020 и 2021 учебного года. Оно включает в себя три этапа. Первый этап заключался в анализе литературы по теме исследования, а также выборе содержания и создании программы курса. Второй – в создании материалов курса “Показательные и логарифмические неравенства” и занятий с использованием интерактивных методов и онлайн-средств их реализации.

Курс “Показательные и логарифмические неравенства” был создан и размещен в web-сервисе Google classroom. Чтобы создать курс, необходимо в браузере Google открыть приложения Google и выбрать “Класс”.

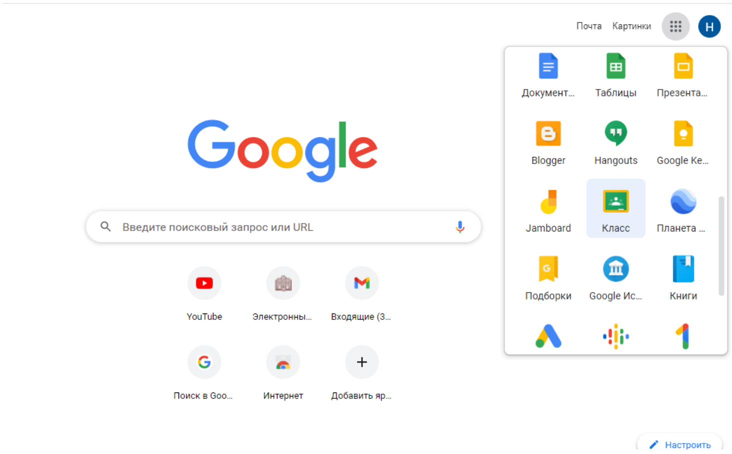


Рисунок 13 – Приложение Google “Класс”

Мы можем создать курс или присоединиться к существующему. При создании собственного курса обязательно указывается его название. Раздел, предмет и аудитория указываются по желанию.

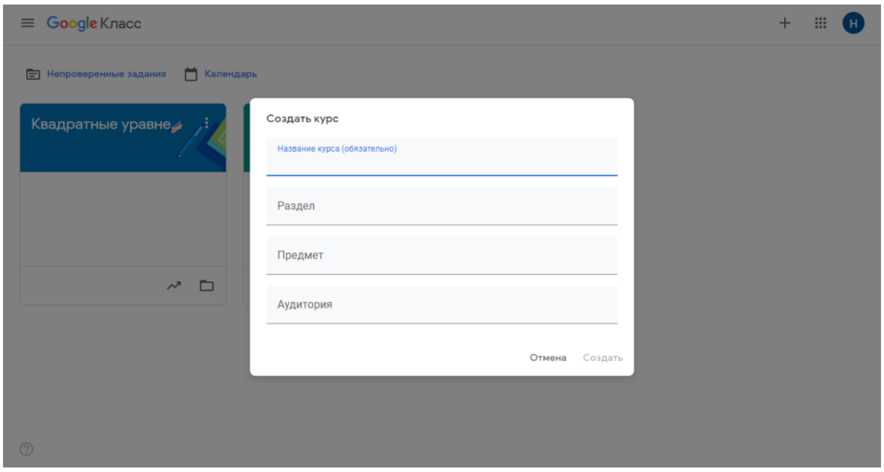


Рисунок 14 – Создание курса Google

Сам курс “Показательные и логарифмические неравенства” состоит из 3 вкладок.

На первой вкладке, которая называется “Лента” расположены сведения о курсе. Это название курса, предмет изучения, аудитория, для которой создан курс, а также небольшое описание курса.

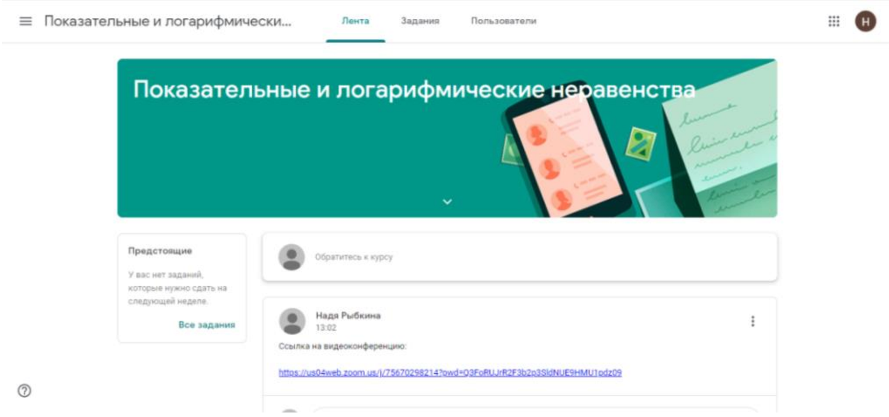


Рисунок 15 – Вкладка курса “Лента”

В ленте также расположено объявление, в котором указана постоянная ссылка для подключения к видеоконференции в Zoom, и блок с объявлениями о предстоящих заданиях.

В данной вкладке обучающиеся, по желанию, могут обращаться к курсу, задавать вопросы и оставлять свои комментарии.

Вторая вкладка курса называется “Задания”. В ней находятся 9 разделов курса и 2 итоговых занятия. В каждом разделе находятся несколько занятий.

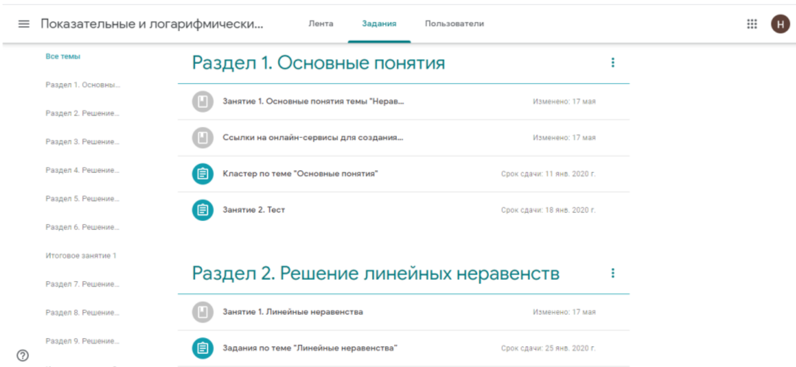


Рисунок 16 – Вкладка курса “Задание”

В левой части страницы есть фильтр, в котором указаны все темы курса. С его помощью можно сразу перейти в любой раздел курса и найти необходимую информацию.

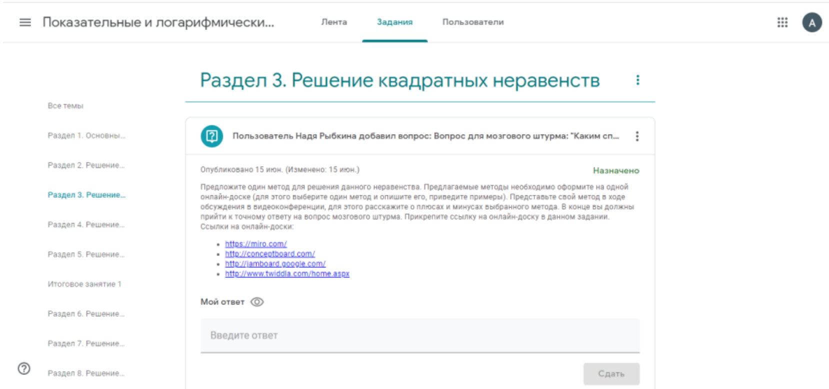


Рисунок 17 – Использование фильтра при работе с курсом

Каждый раздел содержит материалы для изучения, задания по изучаемой теме курса, домашнюю работу и тест. Кроме того к некоторым темам созданы или прикреплены материалы или ссылки, которые необходимы для проведения занятия с использованием интерактивных методов и онлайн-средств. Примеры таких заданий представлены на рисунках 18 и 19.

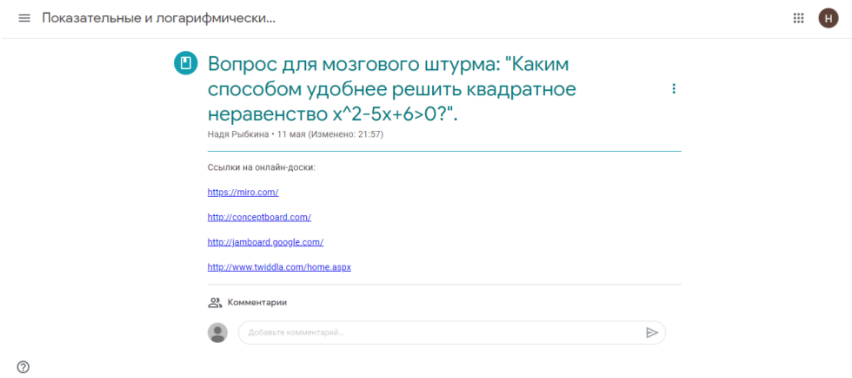


Рисунок 18 – Пример вопроса для мозгового штурма и список ссылок на онлайн-доски

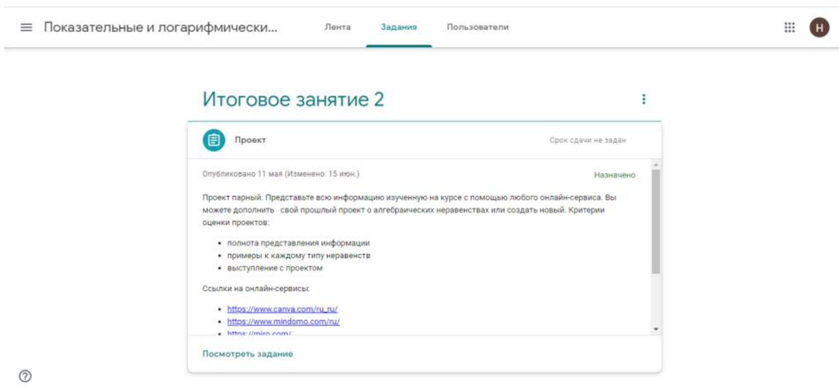


Рисунок 19 – Пример использования проектов

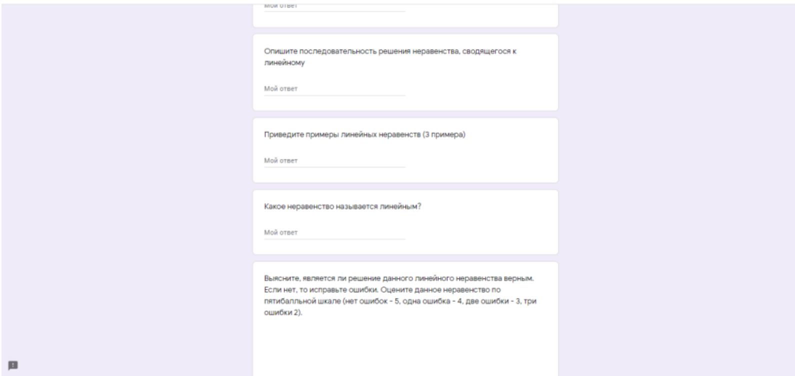


Рисунок 20 – Вопросы теста по теме “Линейные неравенства”

Также по некоторым темам курса созданы небольшие задания для закрепления пройденного материала. Они созданы с помощью различных онлайн-сервисов.

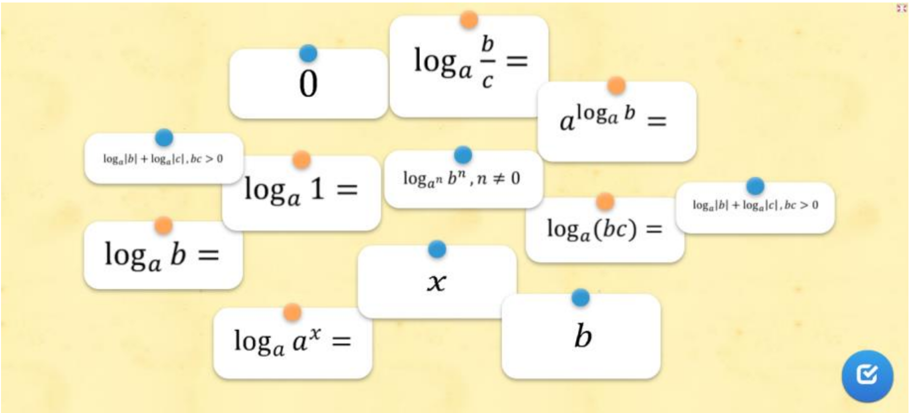


Рисунок 21 – Задание для закрепления темы “Логарифм. Основные свойства логарифмов”, созданное при помощи сервиса Learning Apps

На курсе также размещены разные ссылки, которые будут полезны обучающимся при подготовке к профильному ЕГЭ по математике. Это ссылки на сайт ФИПИ, сдам ГИА, Ларина и др.

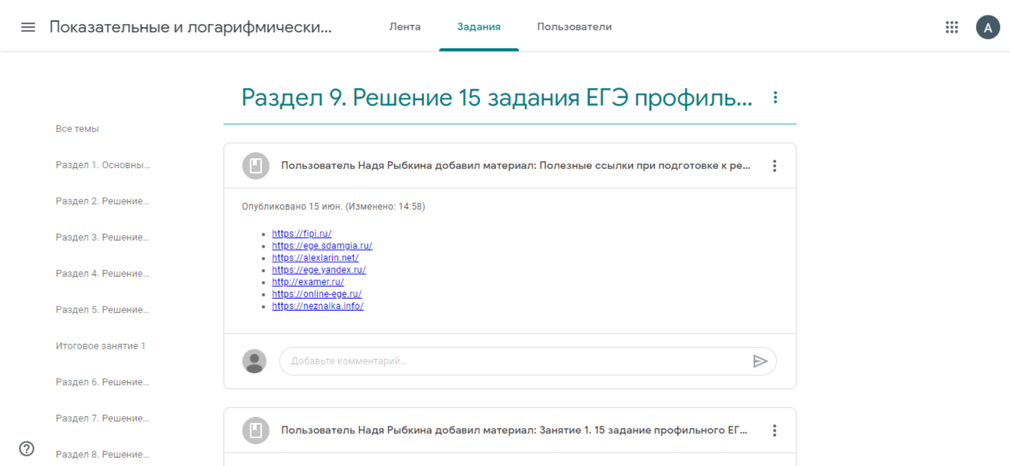


Рисунок 22– Блок с ссылками, которыми можно пользоваться при подготовке к ЕГЭ по математике

При выполнении заданий обучающиеся могут добавить свой ответ с Google Диска, отправить его в виде ссылки или файла с компьютера. Также есть возможность создать ответ при помощи приложений Google, таких как: Документы, Презентации, Таблицы и Рисунки. При необходимости можно оставлять комментарии к заданию, они могут быть адресованы как для всего курса, так и лично преподавателю.

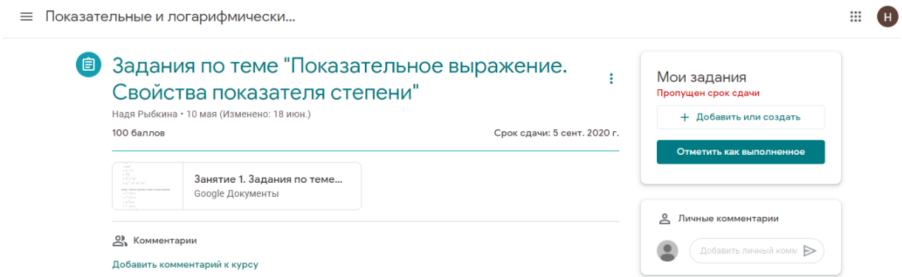


Рисунок 23 – Пример страницы курса для отправки задания

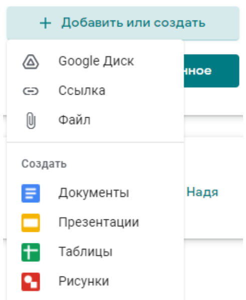


Рисунок 24 – Список инструментов, с помощью которых можно добавить или создать ответ на задание

После загрузки задания учащимся необходимо нажать “Сдать”, т.к. оно сохраняется как черновик.

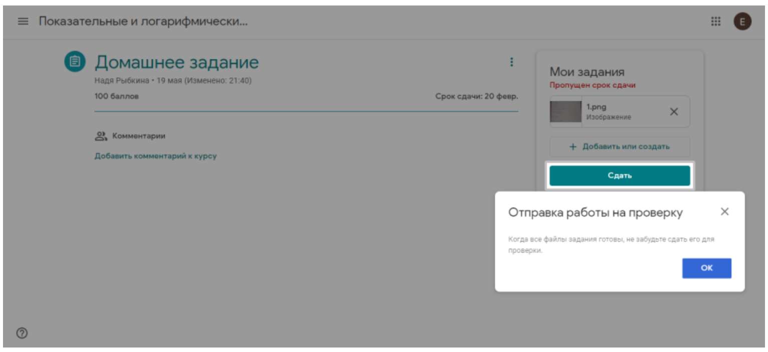


Рисунок 25 – Кнопка “Сдать” для отправки задания для проверки

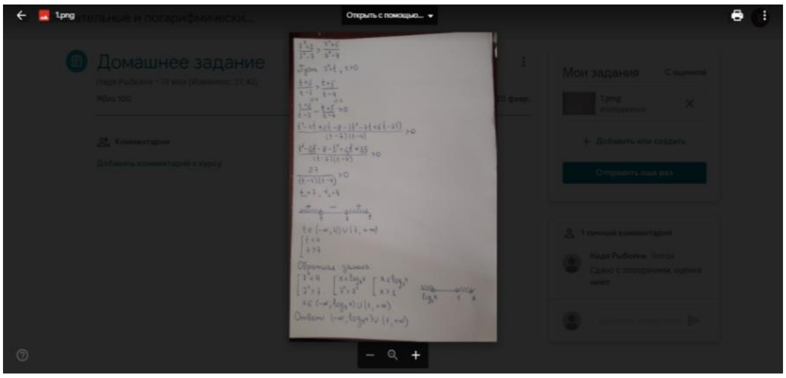


Рисунок 26 – Пример отправленного задания по теме “Решение 15 задания ЕГЭ”

Также в вкладке “Задание” каждый обучающийся может открыть свой личный профиль, Google Календарь и папку курса на Диске.

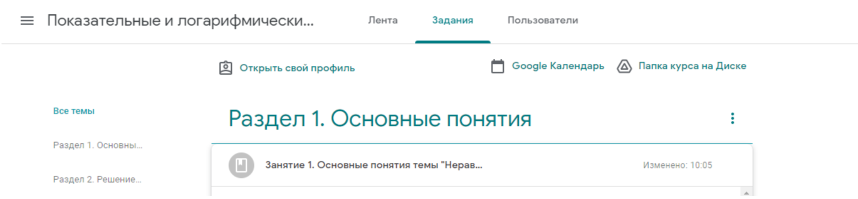


Рисунок 27 – Элементы курса “Открыть свой профиль”, “Google Календарь”, “Папка курса на Диске”

В личном профиле находится список заданий по курсу. Можно узнать, какие задания с оценкой, назначены, возвращены, пропущен срок сдачи.

В Google Календаре учащегося отмечаются все задания, которые необходимо сдать.

В папке курса на Диске будут сохраняться отправленные работы. Папка курса имеет то же название, что и курс.

Третья вкладка – это “Пользователи”, в ней указаны участники курса: преподаватель и другие учащиеся.

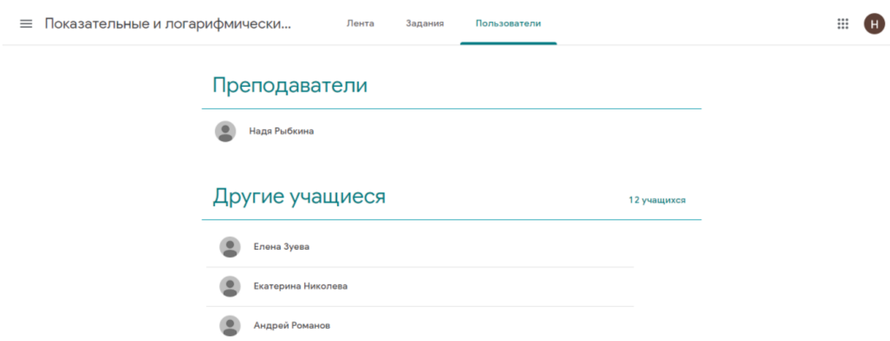


Рисунок 28 – Вкладка курса “Пользователи”

Для обучающихся был создан дополнительный материал: “Основные методы решения показательных и логарифмических неравенств”, представленный в приложении 4. Он включает в себя 9 методов, которые можно использовать при решении логарифмических и показательных неравенств, а также примеры с подробным решением. Они также размещены на курсе.

Третий этап состоял в реализации курса и проведении дистанционных занятий в СШ №72 с углубленным изучением отдельных предметов. В январе 2020 года на курс записались 12 человек из 10 класса. В 11 классе они продолжили работу с курсом.

Этап также включал в себя составление заданий для входного и итогового контроля, который ориентирован на выявление результатов решения алгебраических и трансцендентных неравенств. Материалы для диагностики результатов решения неравенств представлены в приложениях 1-2. Контроль проводился четыре раза (2 раза в 10 классе до и после изучении алгебраических неравенств, и 2 раза в 11 классе при изучении показательных и логарифмических неравенств).

В ходе проведения первого контроля были получены следующие результаты, представленные на рисунке 29:

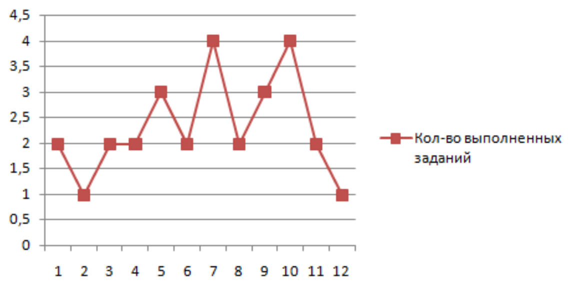


Рисунок 29 – Результаты входного контроля по решению алгебраических неравенств

Мы можем говорить о том, что некоторые обучающиеся испытывают трудности при решении разных алгебраических неравенств, к которым часто сводятся показательные и логарифмические неравенства.

При повторном контроле получены следующие результаты, представленные на рисунке 30:

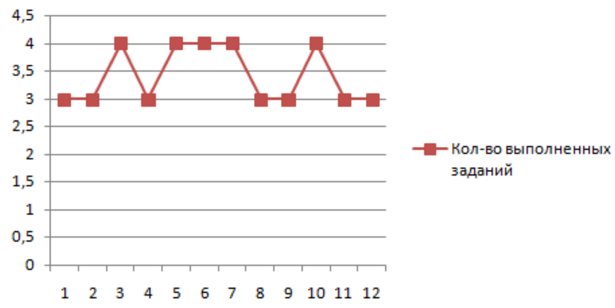


Рисунок 30 – Результаты итогового контроля по решению алгебраических неравенств

Полученные данные говорят о повышении результатов освоения первой части курса. 5 человек выполнили все четыре задания правильно, 7 человек выполнили без ошибок три задания.

В ходе проведения третьего контроля были получены следующие результаты, представленные на рисунке 31:

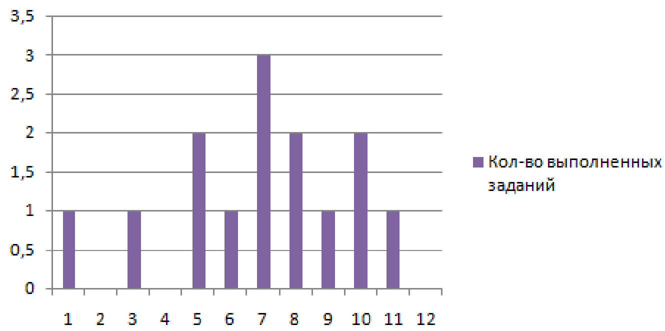


Рисунок 31 – Результаты входного контроля по решению показательных и логарифмических неравенств

В ходе проведения четвертого контроля были получены следующие результаты, представленные на рисунке 32:

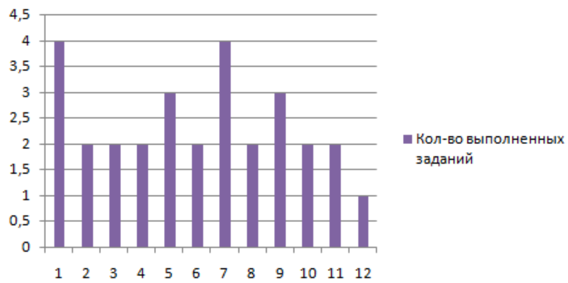


Рисунок 32 – Результаты итогового контроля по решению

показательных и логарифмических неравенств

Исходя из полученных данных, мы можем утверждать, что качество и результаты решения логарифмических и показательных неравенств повысились.

По окончанию работы с курсом “Показательные и логарифмические неравенства” было проведено анкетирование для оценки его эффективности. Материалы для диагностики эффективности курса представлены в приложении 3. Результаты анкетирования приведены на рисунке 33:

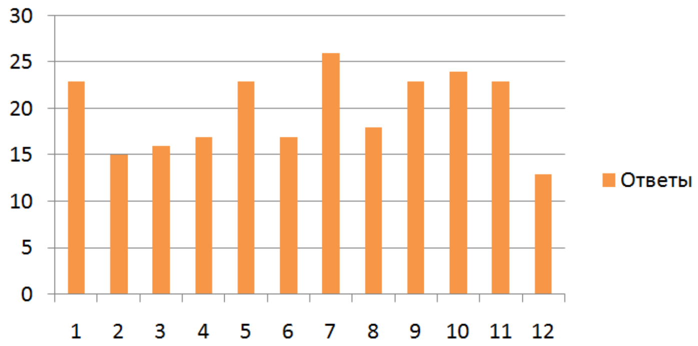


Рисунок 33 – Результаты анкетирования

По представленному графику видно, что половина обучающихся высоко оценила курс, проявляла устойчивый интерес к обучению на курсе и изучению неравенств.

Таким образом, проведенный эксперимент показал, что курс “Показательные и логарифмические неравенства” способствует повышению математической подготовки обучающихся, повышает мотивацию обучающихся к изучению неравенств, способствует успешному и качественному освоению темы “Показательные и логарифмические неравенства” при подготовке к профильному ЕГЭ по математике.

Выводы по второй главе

Вторая глава работы направлена на разработку программы курса по выбору “Показательные и логарифмические неравенства”, а также занятий с применением интерактивных методов и онлайн-средств их реализации.

В первом параграфе представлено содержание программы курса “Показательные и логарифмические неравенства”, который реализует идею дистанционного обучения. Составлен учебно-тематический план курса. Во втором параграфе представлены примеры занятий, на которых использованы интерактивные методы, реализованные при помощи онлайн-средств. В третьем параграфе описывается содержание курса, и подводятся итоги результативности разработанного курса на основании анкеты и заданий входного и итогового контроля.

Заключение

Проанализировав особенности современного поколения обучающихся и черты математического образования, мы пришли к выводу, что в процессе обучения необходимо использовать новые методы, формы и средства, т.к. в школах уровень математической подготовки школьников падает с каждым годом.

Проблема поиска эффективных средств обучения для современных обучающихся при подготовке к решению неравенств ЕГЭ профильного уровня явилась основанием выбора темы исследования.

В процессе исследования получены следующие результаты.

На основе анализа психолого-педагогической и методической литературы выявлены особенности математической подготовки обучающихся в современной школе. Среди них применение на уроках математики традиционных методов, которые не так эффективны для современного поколения, и ориентация обучения на результаты ЕГЭ.

Описаны возможности и инструменты электронного обучения. Выявлено, что использование электронного обучения при изучении математике имеет преимущества. Во-первых, такое обучение интересно современному поколению школьников. Во-вторых, использование электронного обучения способствует повышению мотивации при изучении математики. В-третьих, повышается информационная культура обучающихся. В-четвертых, использование разных инструментов электронного обучения способствует лучшему усвоению информации.

На основе анализа учебно-методических комплектов, дидактических материалов и научных источников разработано содержание курса по выбору “Показательные и логарифмические неравенства” и занятия с использованием интерактивных методов, реализованных при помощи онлайн-средств. Были разработаны конспекты занятий, на которых применяется кластер, мозговой штурм, кейс-метод и проект.

Материалы курса размещены в web-сервисе Google classroom.

В процессе опытно-экспериментальной работы проверена результативность разработанного курса по выбору. Обосновано и подтверждено, что использование учебных материалов с применением интерактивных методов и онлайн-средств их реализации способствует повышению результативности при подготовке к решению показательных и логарифмических неравенств профильного ЕГЭ по математике.

Эмпирические данные подтверждают выдвинутую гипотезу и приводят к выводу, что курс по выбору с использованием интерактивных методов, реализованных при помощи онлайн-средств, дополняет основной курс математики и способствует успешному и качественному освоению темы “Показательные и логарифмические неравенства”.

Таким образом, можно утверждать, что использование курса по выбору повышает качество знаний и результаты при освоении темы “Показательные и логарифмические неравенства”, поднимает уровень познавательного интереса и мотивации обучающихся, развивает компетентности в области ИКТ.

Перспективы дальнейшего исследования состоят в построении сквозного курса по решению неравенств для обучающихся 7–11 классов, который бы дополнял содержание основного курса математики и позволял организовать самостоятельную работу обучающихся под руководством учителя.

Библиографический список

1. Distance learning solutions [Electronic resource]. URL: https://en.unesco.org/covid19/educationresponse/solutions (accessed: 10.04.2012)

2. Holton K., Sandle P. Online Learning Rockets in Coronavirus Pandemic, Says Pearson. Reuters, 26.03.2020 [Electronic resource]. URL: https://www.reuters.com/article/us-health-coronavirus-education-pearson/online-learning-rockets-in-coronavirus-pandemic-says-pearson-idUSKBN21D384 (accessed 10.04.2021)

3. Howe N., Strauss W. Generations: The History Of Americas's Future, 1584 to 2069. New York: William Morrow & Company, 1991 [Electronic resource].URL:https://archive.org/details/GenerationsYheHistoryOfAmericasFuture1584To2069ByWilliamStraussNeilHowe (accessed: 12.04.2021)

4. National learning platforms and tools [Electronic resource]. URL: https://en.unesco.org/covid19/educationresponse/nationalresponses#EASTERN%20EUROPE%20&%20CENTRAL%20ASIA (accessed: 10.04.2021)

5. Vankipuram M. Covid-19 Impact: Online Learning Companies See Spike in Number of Students. 20.03.2020 [Electronic resource]. URL: https://www.livemint.com/companies/news/covid-19-impact-online-learning-companies-see-spike-in-number-of-students-11584724448197.html (accessed 10.04.2021)

6. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2009. 430 с.: ил.

7. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, Л.О. Денищева, Л. И. Звавич. Т. А. Корешкова. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2012. 264 с.: ил.

8. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2009. 464 с.: ил.

9. Афонин С. 6 моделей смешанного обучения [Электронный ресурс]. URL: https://sergeyafonin.ru/6-modelej-smeshannogo-obucheniya/ (Дата обращения: 1.04.2021)

10. Беляева Н.Г., Сизова Ю.С. Использование мозгового штурма на уроках английского языка в неязыковом вузе. // Педагогические науки. 2016. № 8. С. 10-13.

11. Готовность российских школ и семей к обучению в условиях карантина: оценка базовых показателей / С.Ию Заир-Бек, Т.А. Мерцалова, К.М. Анчиков. Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Институт образования. – М.: НИУ ВШЭ, 2020. 32 с. – 200 экз. – (Факты образования №2 (27)).

12. Гущин Ю.В. Интерактивные методы обучения в высшей школе // Психологический журнал. 2012. №2. С. 1-18.

13. ЕГЭ 2017. Математика. Неравенства и системы неравенств. Задача 15 (профильный уровень). М.: МЦНМО, 2017. 352 с.

14. Журавлева Н.А., Шашкина М.Б. Итоги профильного ЕГЭ 2018 по математике: кто виноват и что делать? // Математика в школе. 2018. № 8. С. 25–35.

15. Зенков А.Р. Образование в условиях пандемии: возможности и ограничения цифрового обучения // Анализ и прогноз. Журнал ИМЭМО РАН. 2020. №3. С. 51-64.

16. Калайтанова И. Прием кластер на уроке. Что это такое и как его использовать? Примеры. [Электронный ресурс]. URL: http://pedsovet.su (Дата обращения: 10.05.2021).

17. Кобычева В.С., Шашкина М.Б. Основные тенденции изменения содержания ЕГЭ по математике и перспективы их влияния на качество

математической подготовки обучающихся // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты: материалы VII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 10–11 ноября 2020 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. госуд. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2020. С. 45–51.

18. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. URL: https://lbz.ru/metodist/content/files/rasp2506.pdf (Дата обращения: 7.05.2021)

19. Костюченко Р.Ю. Обучение учащихся решению иррациональных неравенств // Электронный научный журнал “Вестник Омского государственного педагогического университета”. 2007.

20. Кравченко Н.В. Проблемы современного учителя: причины и пути их решения // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2015. Т. 3. С. 21–25.

21. Крутилин В.А. Интерактивные методы в практике преподавания маркетинга: методическое пособие. – М.: РосНИИкадры, 2003.

22. Кузменкова Н.А. Проблемы и перспективы современного математического образования [Электронный ресурс]. URL: http://infed.ru/articles/485/ (Дата обращения: 19.05.2021).

23. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс. : учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М. : Дрофа, 2013. – 318, с. : ил.

24. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс. : учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М. : Дрофа, 2014. – 318, с. : ил.

25. Математика. Методические рекомендации по оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом / И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, А.В. Семенов, А.С. Трепалин. М. 2018. 88 с.

26. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 частях. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.: ил.

27. Методика обучения математике: Учебное пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. СПб.: Издательство «Лань», 2015. 512с.: ил.

28. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2018 года по математике / И.В. Ященко, Л.О. Рослова, И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов. М. 2018. 26 с.

29. Нечаев В.Д., Дурнева Е.Е. “Цифровое поколение”: психолого-педагогическое исследование проблемы // Педагогика. – 2016. -№1. – С. 36-45.

30. Приказ Минпросвещения России №190, Роспотребнадзора №1512 от 07.11.2018 “Об утверждении Порядка проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования” [Электронный ресурс]. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_313212/ (Дата обращения: 7.05.2021)

31. Реутова Е.А. Применение активных и интерактивных методов обучения в образовательном процессе вуза (методические рекомендации для преподавателей Новосибирского ГАУ). – Новосибирск: НГАУ, 2012. 58 с.

32. Рыбкина Н.Д. Интерактивные методы и онлайн-средства при решении логарифмических и показательных неравенств // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы V Всероссийской научно-практической

конференции студентов, аспирантов и школьников. Красноярск, 28 апреля 2020 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2020. С. 97–100.

33. Рыбкина Н.Д. Метод мажорант при решении неравенств // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Красноярск, 29 апреля 2019 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2019. С. 27–30.

34. Рыбкина Н.Д. Метод рационализации при решении логарифмических и показательных неравенств // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы III Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Красноярск, 18 мая 2018 года. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2018. С. 83–86.

35. Савельева М.Г. Педагогические кейсы: конструирование и использование в процессе обучения и оценки компетенции студентов: учебно-методическое пособие. Ижевск. 2013. 94 с.

36. Сапа А.В. Поколение Z – поколение эпохи ФГОС // Инновационные проекты и программы в образовании. 2014. №2. С. 24-30.

37. Сатунина А.Е. Электронное обучение: плюсы и минусы // Современные проблемы науки и образования. 2006. №1. С. 89-91.

38. Сафиулина Н.Р. Особенности электронного обучения с применением дистанционных технологий в школе [Электронный ресурс]. URL: https://eduface.ru/consultation/ombudsmen/osobennosti_elektronnogo_obucheniya_s_primeneniem_distancionnyh_tehnologij_v_shkole (Дата обращения: 17.05.2021).

39. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2020 году единого государственного экзамена по математике [Электронный ресурс]. URL: http://doc.fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory/2020/ma_ege_2020.zip (Дата обращения: 7.05.2021)

40. Средства электронного обучения : учебное пособие для слушателей факультета повышения квалификации преподавателей вузов / Н. Б Стрекалова., Т. И. Руднева, Н. В. Соловова. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2013. – 52 с.

41. Троцевич Н. Проблемы дистанционного обучения и способы их решения [Электронный ресурс]. URL: https://4brain.ru/blog/problemy-distancionnogo-obuchenija-i-sposoby-ih-reshenija/ (Дата обращения: 18.05.2021).

42. Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс]. URL: fgos.ru (Дата обращения: 19.05.2021).

43. Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации" от 29.12.2012 №273-ФЗ (последняя редакция) [Электронный ресурс]. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/ (Дата обращения: 7.05.2021)

44. Черепанова О.Н., Зотов И.Н. Методический анализ результатов ЕГЭ по предмету математика (профильная) [Электронный ресурс]. URL: https://coko24.ru/ результаты-егэ-2014/ (Дата обращения: 7.05.2021).

45. Черепанова О.Н., Полякова Т.В. Методический анализ результатов ГИА-11 по математике (профильный уровень) за 2019 год [Электронный ресурс]. URL: https://coko24.ru/wp-content/uploads/2019/09/ГИА11-МО-МАТЕМАТИКА-П-2019.pdf (Дата обращения: 7.05.2021).

46. Черепанова О.Н., Полякова Т.В. Методический анализ результатов ЕГЭ по математике (профильный уровень) в Красноярском крае в 2018 году [Электронный ресурс]. URL: https://coko24.ru/wp-

content/uploads/2018/09/ЕГЭ-2018-АО-МА_профильная.pdf (Дата обращения: 7.05.2021).

47. Шашкина М.Б. Дефициты математической подготовки обучающихся общеобразовательной школы (по результатам итоговой государственной аттестации) // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты: материалы VII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 10–11 ноября 2020 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. госуд. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2020. С. 29–34.

48. Шашкина М.Б. ЕГЭ 2020 в условиях пандемии: разбор заданий // Математика в школе. 2020. № 7. С. 3–11. DOI 10.47639/0130-9358_2020_7_3.

49. Шашкина М.Б., Табинова О.А. Как учить математике детей поколения Z? // Математическое образование в цифровом обществе: материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (26–28 сентября 2019 г.). Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ. 2019. С. 108–111.

50. Шашкина М.Б., Табинова О.А. Качество школьной подготовки по математике: кого мы принимаем в вузы // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты»: материалы II Всероссийской научно-методической конференции Международного научно-образовательного форума «Человек, семья, общество: история и перспективы развития». г. Красноярск, 5–6 ноября 2014 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. госуд. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2014. С. 117–123.

51. Шутова Г. Активные и интерактивные методы обучения: обзор, классификации и примеры. Что такое активные и интерактивные методы обучения на уроке [Электронный ресурс]. URL: http://pedsovet.su/ (Дата обращения: 18.05.2021).

52. Щербатых И.В., Китаева И.В. Интерактивные методы в обучении стохастике учащихся основной школы (на примере кейс-метода и метода проектов) // Вектор науки ТГУ. 2013. №1.С. 107-110.

53. Янущих О.В., Пахомова Е.Г., Далингер В.А. Электронный курс как средство повышения уровня знаний студентов по математике в техническом вузе // Инженерное образование. 2018. №23. С.104-111.

Приложение 1.

Задания для выявления результатов по изучению алгебраических неравенств

Решите следующие неравенства. Укажите вид каждого неравенства.

Задание 1. $4 \cdot (2 - 4x) - (5 + x) \geq 11 - 2x$

Задание 2. $x^2 - 3 < \frac{(4-x)(4+x)}{5}$

Задание 3. $\frac{x-1}{x-4} - \frac{3}{x+2} - \frac{9}{x^2-2x-8} < 0$

Задание 4. $\sqrt{x^2 - x - 2} \leq x - 1$

Решение каждого неравенства оценивается по следующим критериям:

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Приложение 2.

Задания для выявления результатов по изучению логарифмических и показательных неравенств

Решите следующие логарифмические и показательные неравенства.

Задание 1. $log_3(4x-9) \leq 1$

Задание 2. $9^x - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x > 0$

Задание 3. $lg(x^2 - x - 9) > lg(16 - x)$

Задание 4. $log_{28} x + log_3(x-27) < 1$

Задание 5. $3^x + \frac{54}{3^x} \leq 0$

Решение каждого неравенства оценивается по следующим критериям:

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Приложение 3.

Анкета для обучающихся

Ответьте на вопросы анкеты, выбрав только один вариант ответа: да/нет/затрудняюсь ответить.

№	Вопрос	Варианты ответов		
		да	**нет**	**Затрудняюсь ответить**
1.	Вы выбрали для изучения курс “Показательные и логарифмические неравенства”, т.к. Вам интересна данная тема?			
2.	Пропускали ли Вы занятия по курсу?			
3.	Вовремя ли Вы отправляли задания на проверку?			
4.	Узнали ли Вы при работе с курсом что- то новое?			
5.	Возникают ли у Вас трудности при решении логарифмических и показательных неравенств после прохождения курса?			
6.	Помог ли Вам курс в развитии личных качеств/возможностей/способностей?			
7.	Была ли Вам интересна организация изучения логарифмических и показательных неравенств в виде курса?			
8.	Понравились ли Вам занятия с использованием интерактивных методов и онлайн-средств их реализации?			
9.	Будете ли Вы решать задания второй части профильного ЕГЭ по математике?			

Критерии оценивания:

Да – 3 балла

Не знаю – 2 балл

Нет – 1 балл

Оценочная шкала уровня эффективности курса “Показательные и логарифмические неравенства”

Количество баллов	Уровень	Пояснение
23-27	Высокий	Проявление устойчивого интереса к обучению на курсе и изучению неравенств

16-22	Средний	Проявление положительного отношения к обучению на курсе и изучению неравенств, проявление интереса к отдельным разделам курса и занятиям
Менее 16	Низкий	Возможное отсутствие интереса к обучению на курсе и изучению неравенств

Приложение 4.

Основные методы решения показательных и логарифмических неравенств

I. *Метод замены переменных*

Пример 1. Решение показательного неравенства с помощью метода замены переменной.

$$2^{2x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} + 5 \leq 0$$

1. Применим к неравенству свойства степеней:

$$(2^x)^2 \cdot 2^{-1} - 7 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} + 5 \leq 0$$

$$\frac{(2^x)^2}{2} - 7 \cdot \frac{2^x}{2} + 5 \leq 0$$

2. Сделаем замену. Пусть $2^x = t$:

$$t^2 - 7t + 10 \leq 0$$

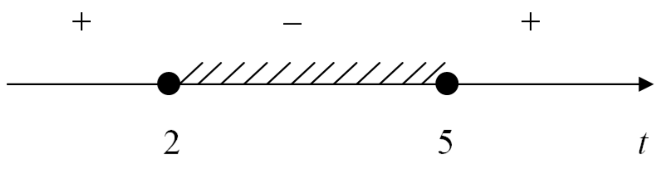
3. Находим корни уравнения по теореме Виета:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 7 \\ t_1 \cdot t_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 5$$

4. Квадратное неравенство $t^2 - 7t + 10 \leq 0$ можно записать в следующем виде:

$$(t-2)(t-5) \leq 0$$

5. Отмечаем получившиеся корни на координатной прямой и определяем знак каждого интервала:



Т.к. неравенство ≤ 0, то отмечаем ту часть прямой, где в интервале находятся отрицательные значения:

$$t \in [2; 5]$$

$$2 \leq t \leq 5$$

6. Делаем обратную замену

$$2 \leq 2^x \leq 5$$

$$2^1 \le 2^x \le 5$$

$$1 \le x \le log_2 5$$

Ответ: $x \in [1; log_2 5]$.

Пример 2. Решение логарифмического неравенства с помощью метода замены переменных.

$$\frac{log_2 x - 5}{1 - 2log_2 x} \ge 2\, log_2 x$$

1. К данному неравенству можно сразу применить метод замены. Пусть $t = log_2 x$:

$$\frac{t-5}{1-2t} \ge 2t$$

2. Перенесем выражение из правой части неравенства в левую:

$$\frac{t-5}{1-2t} - 2t \ge 0$$

3. Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{t - 5 - 2t + 4t^2}{1-2t} \ge 0$$

4. Приведем подобные члены:

$$\frac{-5 - t + 4t^2}{1-2t} \ge 0$$

5. Найдем корни квадратного выражения в числителе:

$$-5 - t + 4t^2 = 0$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

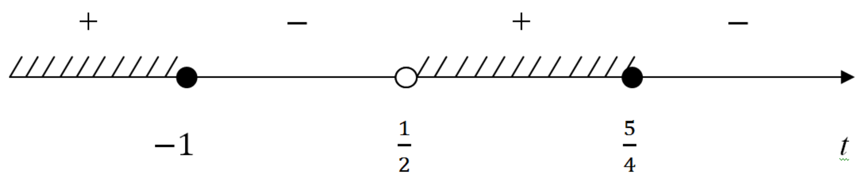
$$t_2 = \frac{1 - \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{8} = -1$$

$$(t+1)(4t-5) = 0$$

6. Найдем нули числителя и знаменателя неравенства:

$$t_1 = \frac{5}{4}, t_2 = -1, t_3 = \frac{1}{2}$$

7. Применяем метод интервалов:



Отмечаем те интервалы, в которых неравенство принимает положительные значения:

$$\begin{cases} t \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} < t \leq \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

8. Обратная замена:

$$\begin{cases} log_2 x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} < log_2 x \leq \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < 0 \leq \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2} < x \leq \sqrt[4]{32} \end{cases}$$

$$x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (\sqrt{2}; \sqrt[4]{32}]$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (\sqrt{2}; \sqrt[4]{32}]$

II. *Метод мажорант*

Пример 3. Решение показательного неравенства с помощью метода мажорант.

$$6x - 3x^2 + 1 \geq 4^{x^2 - 2x + 2}$$

1. Преобразуем левую часть неравенства:

$$6x - 3x^2 + 1 = 6x - 3x^2 + 4 - 3 = (-3x^2 + 6x - 3) + 4 =$$
$$= -3(x^2 - 2x + 1) + 4 = -3(x - 1)^2 + 4$$

2. Оценим квадратичную функцию в левой части неравенства:

$$-3(x - 1)^2 + 4 \leq 4$$

3. Преобразуем показатель степени в правой части неравенства:

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x - 1)^2 + 1$$
$$(x - 1)^2 + 1 \geq 1$$

4. Т.к. $y = 4^{x^2-2x+2}$ возрастает и $(x-1)^2+1 \geq 1$, то:

$$4^{(x-1)^2+1} \geq 4$$

5. Таким образом, неравенство $6x - 3x^2 + 1 \geq 4^{x^2-2x+2}$ можно представить в виде системы:

$$\begin{cases} -3(x-1)^2 + 4 = 4 \\ 4^{(x-1)^2+1} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3(x-1)^2 + 4 = 4 \\ 4^{(x-1)^2+1} = 4^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3(x-1)^2 + 4 = 4 \\ (x-1)^2 + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3(x-1)^2 = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1$

Пример 4. Решение смешанного неравенства с помощью метода мажорант.

$$5^{-|x-2|} \cdot log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$$

1. Наибольшее значение левой части неравенства равно 1:

$$0 < 5^{-|x-2|} \leq 5^0$$

$$0 < 5^{-|x-2|} \leq 5^0 = 1$$

2. Преобразуем аргумент логарифма:

$$4x - x^2 - 2 = 4x - x^2 - 4 + 2 = 2 - (x^2 - 4x + 4) = 2 - (x-2)^2$$

$$log_2(4x - x^2 - 2) = log_2(2 - (x-2)^2)$$

$$log_2(2 - (x-2)^2) \leq log_2 2 = 1$$

3. Т.к. правая часть неравенства равна 1, а левая часть не больше 1, неравенство выполняется только тогда, когда оба множителя равны 1:

$$\begin{cases} 5^{-|x-2|} = 1, \\ log_2(2 - (x-2)^2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^{-|x-2|} = 1^0 \\ 2^1 = 2 - (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-2| = 0 \\ 2 - (x-2)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ -(x-2)^2 = 0, x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Ответ: $x = 2$.

III. *Метод рационализации*

Пример 5. Метод рационализации при решении логарифмического неравенства.

$$(5x - 13)\, log_{2x-5}(x^2 - 6x + 10) \geq 0$$

1. Применим метод рационализации:

$$(5x - 13)(2x - 5 - 1)(x^2 - 6x + 10 - 1) \geq 0$$

2. Упрощаем неравенство:

$$(5x - 13)(2x - 6)(x^2 - 6x + 9) \geq 0$$

$$2(5x - 13)(x - 3)(x^2 - 6x + 9) \geq 0$$

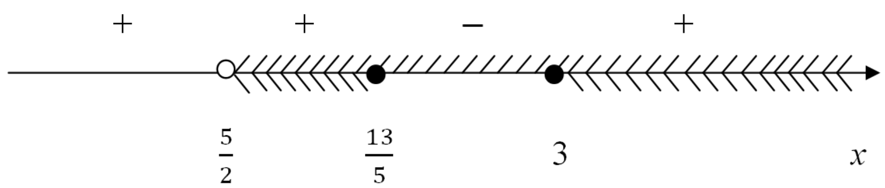
$$2(5x - 13)(x - 3)(x - 3)^2 \geq 0$$

$$2(5x - 13)(x - 3)^3 \geq 0$$

3. Находим нули неравенства:

$$x_1 = \frac{13}{5}, x_2 = 3$$

4. Применяем метод интервалов:



Отмечаем те интервалы, где неравенство принимает положительные значения:

$$x \in \left(\frac{5}{2}; \frac{13}{5}\right] \cup [3; +\infty)$$

Ответ: $x \in \left(\frac{5}{2}; \frac{13}{5}\right] \cup [3; +\infty)$

Пример 6. Использование метода рационализации при решении смешанного равенства.

$$\left(4^{x^2} - \frac{1}{2^x}\right) \cdot log_2(2x^2 - x) \leq 0$$

1. Найдем ОДЗ неравенства:

$$2x^2 - x > 0$$

$$x(2x - 1) > 0$$

$$x < 0, x > \frac{1}{2}$$

2. Преобразуем неравенство:

$$\left(2^{2x^2} - 2^{-x}\right)(log_2(2x^2 - x) - log_2 1) \leq 0$$

3. Применяем метод рационализации:

$$(2x^2 + x)(2x^2 - x - 1) \leq 0$$

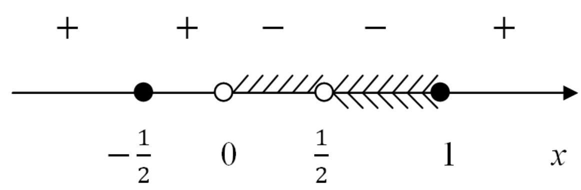
4. Находим нули неравенства и применяем метод интервалов:

$$x(2x + 1)(x - 1)(2x + 1) \leq 0$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -\frac{1}{2},$$

$$x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup [0; 1]$$

5. С учетом ОДЗ получаем:



$$x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right]$$

Ответ: $x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right]$

Пример 7. Использование метода рационализации при решении смешанного равенства.

$$log_{5-x}\frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4$$

1. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 5-x > 0 \\ 5-x \neq 1 \\ \frac{x+2}{(x-5)^4} > 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 5 \\ x \neq 4 \\ x = -2; x \neq 5 \\ x \neq 5 \end{cases} \qquad x \in [-\infty; 4) \cup (4; 5)$$

2. Преобразуем неравенство:

$$log_{5-x}(x+2) - log_{5-x}(x-5)^4 \geq -4$$

$$log_{5-x}(x+2) - 4 \cdot log_{5-x}(x-5) \geq -4$$

$$log_{5-x}(x+2) - 4 \geq -4$$

$$log_{5-x}(x+2) \geq 0$$

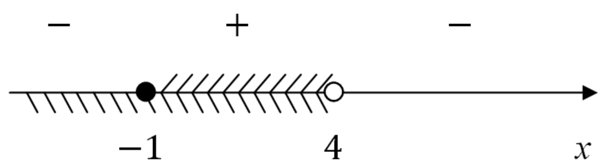
3. Применим метод рационализации:

$$(5-x-1)(x+2-1) \geq 0$$

$$(4-x)(x+1) \geq 0$$

$$x = 4, x = -1$$

4. С учетом ОДЗ получаем:



$$x \in [-1; 4)$$

Ответ: $x \in [-1; 4)$

IV. Метод логарифмирования показательного неравенства

Пример 8. Использование метода логарифмирование для решении показательного неравенства.

$$25^{x^2-2x+10} - 0{,}2^{2x^2-4x-80} \leq 0$$

1. Перенесем $0{,}2^{2x^2-4x-80}$ в правую часть неравенства с противоположным знаком:

$$25^{x^2-2x+10} \leq 0{,}2^{2x^2-4x-80}$$

2. Используем свойства степеней для приведения обе части неравенства к одинаковым основаниям:

$$5^{2(x^2-2x+10)} \leq \left(\frac{2}{10}\right)^{2x^2-4x-80}$$

$$5^{2(x^2-2x+10)} \leq (5)^{-(2x^2-4x-80)}$$

$$5^{2x^2-4x+20} \leq 5^{-2x^2+4x+80}$$

3. Применяем метод логарифмирования для обеих частей неравенства:

$$2x^2 - 4x + 20 \leq -2x^2 + 4x + 80$$

4. Приводим подобные члены:

$$4x^2 - 8x - 60 \leq 0$$

$$x^2 - 2x - 15 \leq 0$$

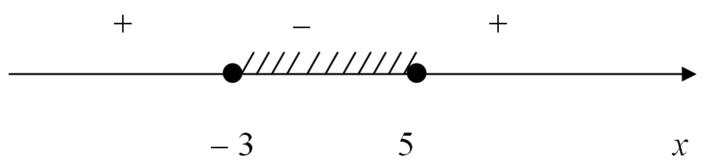
5. Находи нули неравенства:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{2+8}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{2-8}{2} = -3$$

$$(x-5)(x+3) \leq 0$$

6. Отмечаем на координатной прямой корни и интервал, на котором неравенство принимает значение меньше 0:



$$x \in [-3; 5]$$

Ответ: $x \in [-3; 5]$

V. Метод потенцирования логарифмического неравенства

Пример 9. Решение логарифмического неравенства с помощью метода потенцирование.

$$2\,log_9(4x^2+1) \geq log_3(3x^2+4x+1)$$

1. Применим к неравенству в первой части свойство $log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot$ $\cdot\, log_a b$*:*

$$log_3(4x^2+1) \geq log_3(3x^2+4x+1)$$

2. Решаем неравенство с помощью метода потенцирования:

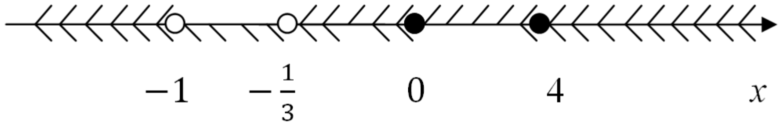
$$\begin{cases} 3x^2+4x+1>0 \\ 4x^2+1 \geq 3x^2+4x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x+1)(x+1)>0 \\ x(x-4) \geq 0 \end{cases}$$

3. Находим нули неравенств:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3,}\ x_2 = -1 \\ x_1 = 0, x_2 = 4 \end{cases}$$

4. Отмечаем нули двух неравенств на координатной прямой (сверху для неравенства $(3x+1)(x+1)>0$, снизу для $x(x-4) \geq 0$):



$$x \in (-\infty; 0) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right] \cup [4; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right] \cup [4; +\infty)$

VI. Метод почленного деления

Пример 10. Решение показательного неравенства с помощью метода почленного деления.

$$25^x - 5 \cdot 10^x - 6 \cdot 4^x \leq 0$$

1. Делим обе части неравенства на 4^x:

$$\frac{25^x}{4^x} - 5 \cdot \frac{10^x}{4^x} - 6 \leq 0$$

2. Используем свойства степеней для приведения к общему основанию:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{x} - 6 \leq 0$$

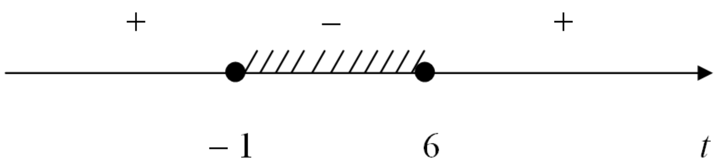
3. Делаем замену. Пусть $\left(\frac{5}{2}\right)^{x} = t$:

$$t^2 - 5x - 6 \leq 0$$

4. По свойствам коэффициентов находим нули квадратного неравенства:

$$t_1 = -1, t_2 = 6$$

5. Отмечаем на координатной прямой корни интервал, на котором неравенство принимает значение меньше 0:



$$t \in [-1; 6]$$

$$-1 \leq t \leq 6$$

6. Делаем обратную замену

$$-1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{x} \leq 6$$

$$x \leq log_{2.5}\, 6$$

$$x \in (-\infty;\ log_{2.5}\, 6]$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ log_{2.5}\, 6]$

VII. Метод разложения на множители

Пример 11. Решение показательного неравенства с помощью метода разложения на множители.

$$9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511$$

1. Применим к неравенству свойство частного степеней с одинаковыми показателями:

$$9^x \cdot 9^{-3} - 9^x \cdot 9^{-2} + 9^x \cdot 9^{-1} > 511$$

2. Вынесем за скобки общий множитель 9^x:

$$9^x(9^{-3} - 9^{-2} + 9^{-1}) > 511$$

3. Найдем значение выражения в скобках:

$$9^x\left(\frac{1}{9^3} - \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9}\right) > 511$$

$$9^x\left(\frac{73}{729}\right) > 511$$

4. Разделим правую часть неравенства на дробь $\frac{73}{729}$:

$$9^x > 7 \cdot 729$$

5. Представим число 729 как 9^3:

$$9^x > 7 \cdot 9^3$$

6. Разделим обе части неравенства на 9^3:

$$9^{x-3} > 7$$

7. Решаем неравенство по определению логарифма:

$$x - 3 > log_9 7$$

$$x > log_9 7 + 3$$

Ответ: $x \in (log_9 7 + 3;\ +\infty)$

VIII. *Решение логарифмического неравенства с помощью равносильной системы*

Пример 12. Решение логарифмического неравенства с помощью системы.

$$log_{0,5}(x^3 - x^2 - 2x) > log_{0,5}(x^3 - 3)$$

1. Данное неравенство равносильно двойному неравенству:

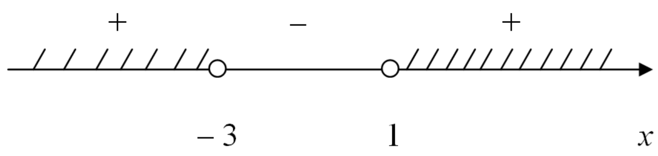
$$0 < x^3 - x^2 - 2x < x^3 - 3$$

2. Неравенство можно представить в виде системы:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0 \\ x(x^2 - x - 2) > 0 \end{cases}$$

3. Найдем нули первого неравенства по свойствам коэффициентов:

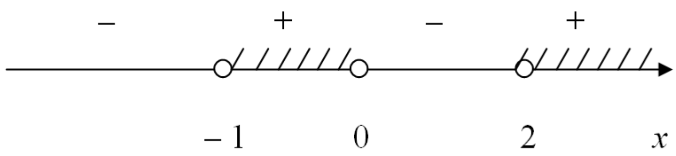
$$x_1 = 1, x_2 = -3$$



$$x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$$

4. Найдем нули второго неравенства:

$$x_1 = 0,\ x_2 = -1, x_3 = 2$$



$$x \in (-1; 0) \cup (2; +\infty)$$

5. Объединяем два полученных промежутка:

$$x \in (2; +\infty)$$

Ответ: $x \in (2; +\infty)$

IX. Приведение подобных членов неравенства и их группировка

Пример 13. Решение показательного неравенства с помощью приведения подобных членов неравенства и их группировки.

$$5^{x+6} - 3^{x+7} \geq 43 \cdot 5^{x+4} - 19 \cdot 3^{x+5}$$

1. Перенесем выражения с основанием 5 в левую часть, а с основанием 3 в правую часть:

$$5^{x+6} - 43 \cdot 5^{x+4} \geq 3^{x+7} - 19 \cdot 3^{x+5}$$

2. Вынесем в обеих частях неравенства наименьший общий множитель:

$$5^{x+4}(5^2 - 43) \geq 3^{x+5}(-19 + 9)$$

3. Посчитаем значение выражений в скобках:

$$5^{x+4} \cdot (-18) \geq 3^{x+5} \cdot (-10)$$

4. Применим к правой части неравенства свойство степеней:

$$5^{x+4} \cdot (-18) \geq 3^{x+4} \cdot 3 \cdot (-10)$$

5. Разделим обе части неравенства на 3^{x+4}:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x+4} \cdot (-18) \geq (-30)$$

6. Разделим обе части неравенства на – 18, при этом меняем знак неравенства на противоположный:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x+4} \leq \frac{30}{18}$$

7. Сократим дробь в правой части:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x+4} \leq \frac{5}{3}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x+4} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{1}$$

8. Применим метод логарифмирования:

$$x + 4 \leq 1$$

$$x \leq -3$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -3]$