

# Реферат

Пусть  $M_3$  — правильная пирамида с единичными рёбрами и пятиугольным основанием,  $M_{3a}$  — усечённая пирамида с параллельными правильными пятиугольными гранями, рёбра которых единичные и длины два, а каждая боковая трапеция составлена из трёх треугольников с единичными рёбрами;  $M_{19a}$  — усечение параллельными плоскостями по правильным пятиугольникам со сторонами длины два архимедова тела  $M_{19}$  с единичными рёбрами, в каждой вершине которого встречаются правильные пятиугольник и два шестиугольника; тело  $M_{19b}$  получено из  $M_{19}$  усечением по трём правильным пятиугольникам со сторонами длины два. Доказано, что выпуклый многогранник сложен из тел

$$1) M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19b},$$

соединением по одинаковым граням при условии, что любые два ребра каждого соединения либо равны, либо одно вдвое короче другого тогда и только тогда, когда он является одним из следующих соединений  $Q_{i,j}$ , расположенного в списке  $i$  на  $j$ -м месте, а число соединяемых тел для каждого такого  $Q_{i,j}$  минимально:

$$2) \begin{array}{l} M_3 + M_3, M_3 + M_{3a}, M_3 + M_{19a}, M_3 + M_{19b}, M_3 + M'_{19b}, \\ M_3 + M''_{19b}, M_{3a} + M_{3a}, M_{3a} + M_{19a}, M_{3a} + M_{19b}; \end{array}$$

$$3) \begin{array}{l} Q_{2,2} + M_{3a}, Q_{2,2} + M_{19a}, Q_{2,2} + M_{19b}, Q_{2,3} + M_3, \quad Q_{2,3} + M'_3, \\ Q_{2,3} + M''_3, Q_{2,3} + M_{3a}, Q_{2,3} + M'_{3a}, Q_{2,4} + M_3, \quad Q_{2,4} + M'_3, \\ Q_{2,4} + M''_3, Q_{2,4} + M_{3a}, Q_{2,5} + M_3, Q_{2,5} + M'_3, \quad Q_{2,5} + M_{3a}, \\ Q_{2,5} + M'_{3a}, Q_{2,8} + M_3, Q_{2,8} + M_{3a}; \end{array}$$

$$4) \begin{array}{l} Q_{3,1} + M_3, Q_{3,2} + M_3, Q_{3,2} + M_{3a}, Q_{3,3} + M_3, \quad Q_{3,3} + M'_3, \\ Q_{3,3} + M''_3, Q_{3,4} + M_3, Q_{3,4} + M_{3a}, Q_{3,5} + M_{3a}, \quad Q_{3,5} + M'_{3a}, \\ Q_{3,6} + M_{3a}, Q_{3,9} + M_3, Q_{3,9} + M_{3a}, Q_{3,9} + M'_{3a}, \quad Q_{3,10} + M_{3a}, \\ Q_{3,11} + M_{3a}, Q_{3,11} + M'_{3a}, Q_{3,11} + M''_{3a}, Q_{3,13} + M_3, \quad Q_{3,13} + M'_3, \\ Q_{3,13} + M_{3a}, Q_{3,13} + M'_{3a}, Q_{3,14} + M_3; \end{array}$$

$$5) \begin{array}{l} Q_{4,2} + M_3, Q_{4,2} + M_{3a}, Q_{4,3} + M_3, Q_{4,4} + M_3, \quad Q_{4,7} + M_{3a}, \\ Q_{4,7} + M'_{3a}, Q_{4,12} + M_{3a}, Q_{4,12} + M'_{3a}, Q_{4,19} + M_{3a}; \end{array}$$

$$6) Q_{5,1} + M_{3a}.$$

Различия многогранников, формулы которых в теореме помечены штрихом или двумя штрихами, видны на рисунках, размещённых в диссертации. Методические следствия этого результата представлены видеозаписью.

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>7</b>
<b>1 Конечные группы движений</b>	<b>9</b>
1.1 Нахождение групп поворотов и симметрий многогранника, его фундаментальные грани . . . . .	10
1.2 Матрицы, порождающие конечные группы движений . . . . .	10
1.2.1 Циклическая группа $C_n$ порядка $n = 2, 3, \dots$ , поворотов неправильной пирамиды с $n$ -угольным основанием . . . . .	10
1.2.2 Группа $T$ поворотов ТЕТРАЭДРА . . . . .	11
1.2.3 Группа $D$ поворотов ДОДЕКАЭДРА . . . . .	11
1.2.4 Группа $D_{2n}$ поворотов ДИЭДРА порядка $2n$ . . . . .	11
1.2.5 Группа ${}^2D_{2n}$ симметрий диэдра порядка $4n$ . . . . .	11
1.2.6 Группа $D_{2,2}$ Клейна ЧЕТВЕРНАЯ . . . . .	12
1.3 Гамильтоновы циклы графа Кэли группы, порожденной инволюциями . . . . .	12
<b>2 Рассечение усеченного икосаэдра на тела с паркетными гранями</b>	<b>14</b>
2.1 Постановка задачи, обозначения . . . . .	14
2.2 Основной результат . . . . .	15
2.3 Доказательство. . . . .	15
2.3.1 Шаг 1, входные данные. . . . .	16
2.3.2 Шаг 2. . . . .	16
2.3.3 Шаг 3. . . . .	18
2.3.4 Шаг 4. . . . .	24
2.3.5 Шаг 5. . . . .	32
2.3.6 Шаг 6. . . . .	38
2.3.7 Шаг 7, завершение доказательства . . . . .	40
<b>3 Этапы и способы организации коллективной работы над научной проблемой</b>	<b>40</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>40</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b>	<b>42</b>

<b>Приложения</b>	<b>44</b>
3.1 Группа симметрий КУБа . . . . .	44
3.2 Группа симметрий ТЕТРАЭДРа . . . . .	44
3.3 Группа симметрий ДОДЕКАЭДРа . . . . .	45
3.4 Гоморфный образ порядка $m_1 \cdot m_2$ кристаллографической группы $p1$ . .	46
3.5 Таблицы построенных многогранников . . . . .	47

## Список иллюстраций

1	Пирамида $M_3$ над телом $M_{3a}$ . . . . .	14
2	Многогранник $M_{19a}$ . . . . .	14
3	Многогранник $M_{19b}$ . . . . .	14
4	Соединение $M_3 + M_{19a}$ . . . . .	17
5	Соединение $M_3 + M_{19b}$ . . . . .	17
6	Соединение $M_3 + M'_{19b}$ . . . . .	17
7	Соединение $M_3 + M''_{19b}$ . . . . .	17
8	Соединение $M_{3a} + M_{19a}$ . . . . .	18
9	Соединение $M_{3a} + M_{19b}$ . . . . .	18
10	Соединение $Q_{2,2} + M_{19a}$ . . . . .	18
11	Соединение $Q_{2,2} + M_{19b}$ . . . . .	18
12	Соединение $Q_{2,3} + M_3$ . . . . .	19
13	Соединение $Q_{2,3} + M'_3$ . . . . .	19
14	Соединение $Q_{2,3} + M''_3$ . . . . .	19
15	Соединение $Q_{2,3} + M_{3a}$ . . . . .	19
16	Соединение $Q_{2,3} + M'_{3a}$ . . . . .	19
17	Соединение $Q_{2,4} + M_3$ . . . . .	20
18	Соединение $Q_{2,4} + M'_3$ . . . . .	20
19	Соединение $Q_{2,4} + M''_3$ . . . . .	20
20	Соединение $Q_{2,4} + M_{3a}$ . . . . .	21
21	Соединение $Q_{2,5} + M_3$ . . . . .	21
22	Соединение $Q_{2,5} + M'_3$ . . . . .	21
23	Соединение $Q_{2,5} + M_{3a}$ . . . . .	22
24	Соединение $Q_{2,5} + M'_{3a}$ . . . . .	22
25	Соединение $Q_{2,8} + M_3$ . . . . .	23

26	Соединение $Q_{2,8} + M_{3a}$	23
27	Соединение $Q_{3,2} + M_3$	24
28	Соединение $Q_{3,2} + M_{3a}$	24
29	Соединение $Q_{3,3} + M_3$	25
30	Соединение $Q_{3,3} + M'_3$	25
31	Соединение $Q_{3,3} + M''_3$	25
32	Соединение $Q_{3,4} + M_3$	25
33	Соединение $Q_{3,4} + M_{3a}$	25
34	Соединение $Q_{3,5} + M_{3a}$	26
35	Соединение $Q_{3,5} + M'_{3a}$	26
36	Соединение $Q_{3,6} + M_{3a}$	26
37	Соединение $Q_{3,9} + M_3$	27
38	Соединение $Q_{3,9} + M_{3a}$	27
39	Соединение $Q_{3,9} + M'_{3a}$	27
40	Соединение $Q_{3,10} + M_3$	28
41	Соединение $Q_{3,11} + M_{3a}$	28
42	Соединение $Q_{3,11} + M'_{3a}$	28
43	Соединение $Q_{3,11} + M''_{3a}$	28
44	Соединение $Q_{3,13} + M_3$	30
45	Соединение $Q_{3,13} + M'_3$	30
46	Соединение $Q_{3,13} + M_{3a}$	30
47	Соединение $Q_{3,13} + M'_{3a}$	30
48	Соединение $Q_{3,14} + M_3$	31
49	Соединение $Q_{4,2} + M_3$	32
50	Соединение $Q_{4,2} + M_{3a}$	32
51	Соединение $Q_{4,3} + M_3$	33
52	Соединение $Q_{4,4} + M_3$	34
53	Соединение $Q_{4,7} + M_{3a}$	34
54	Соединение $Q_{4,7} + M'_{3a}$	34
55	Соединение $Q_{4,12} + M_{3a}$	35
56	Соединение $Q_{4,12} + M'_{3a}$	35
57	Соединение $Q_{4,19} + M_{3a}$	37
58	Соединение $Q_{5,1} + M_{3a}$	39

## Список таблиц

1	2 составные $F'$ многогранники $Q_{2,j}$ . . . . .	47
2	3 составные $F'$ многогранники $Q_{3,j}$ . . . . .	48
3	4 составные $F'$ многогранники $Q_{4,j}$ . . . . .	49
4	5 составные $F'$ многогранники $Q_{5,j}$ . . . . .	52
5	6 составные $F'$ многогранники $Q_{6,j}$ . . . . .	52

# ВВЕДЕНИЕ

Главный результат диссертационной работы относится к геометрии выпуклых многогранников и представлен во второй главе. Автор стремилась построить доказательство так, чтобы в дальнейшем его можно было запрограммировать и с помощью систем компьютерной алгебры и графики получать более сильные теоремы. Другое следствие применения информационных технологий направлено на привлечение к исследовательской работе по математике коллектива учащихся средних образовательных учреждений и всех заинтересованных лиц. Частично эта задача решена и соответствующие методики представлены видеозаписью.

## Актуальность исследования

Несколько лет назад были найдены все выпуклые правильные многогранники, [2]. Напомним, что многогранник, каждая грань которого составлена из правильных многоугольников так, что каждая вершина многоугольника является и вершиной многогранника, называется правильным многогранником. Кроме правильных граней многогранник может обладать еще пятью гранями, изображенными на рис. 1 работы [7]. Уже в первой половине 1970-х годов были известны все несоставные тела, т. е. выпуклые правильные многогранники, нерассекаемые никакой плоскостью на правильные многогранники. Кроме призм и антипризм к ним относятся многогранники Залгаллера  $M_1, M_2, \dots, M_{28}$ , [1], Иванова  $Q_1, Q_2, \dots, Q_5$  и Пряхина  $Q_6$ . Путём соединения этих тел одинаковыми гранями и был получен каждый составной выпуклый правильный многогранник.

Более сорока лет назад Ю. А. Пряхин, [3], изложил схему доказательства теоремы, классифицирующей с точностью до комбинаторной эквивалентности выпуклые многогранники с равноугольными и паркетными гранями. Напомним, выпуклый многоугольник называется паркетным, если он может быть составлен из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников. Таким образом, если вопрос о классификации выпуклых многогранников с правильными и сложенными из правильных многогранников гранями без фиктивных вершин получил ответ к 2011 году, то проблема *“Каковы все выпуклые многогранники с паркетными гранями?”* даже для паркетных граней, сложенных из правильных многоугольников, остаётся открытой. Другими словами, необходимо найти с точностью до комбинаторной эквивалентности не только выпуклые многогранники с правильными гранями и общими условными ребрами смежных правильных многоугольников, из которых сложены грани, но и многогранники с условными вершинами. До сих пор, однако, неизвестно даже количество несоставных

многогранников с паркетными и правильными гранями, отличных от четырех бесконечных серий таких тел.

В работе [7] выяснено каковы все несоставные правильные многогранники, допускающие рассечение плоскостью на многогранники с паркетными гранями. В частности, такими являются правильная пирамида  ${}^2M_3$  с пятиугольным основанием и ребрами длины 2, усеченный икосаэдр  $M_{19}$ , т. е. архимедово тело с вершинами типа [5,6,6]. Пирамида  ${}^2M_3$  отсекается на пирамиду  $M_3$  с единичными ребрами и усеченную пирамиду  $M_{3a}$ . Усеченный икосаэдр  $M_{19}$  можно рассечь на несоставные части двумя или тремя плоскостями. Две параллельные плоскости отсекают от  $M_{19}$  усеченные пирамиды  $M_{3a}$ , а оставшуюся часть будем обозначать  $M_{19a}$ . Если отсекают три такие усеченные пирамиды  $M_{3a}$ , то останется фигура которую будем обозначать  $M_{19b}$ . Необходимо отметить, что существует лишь общее описание алгоритма, [2], по которому из данных многогранников можно найти все их выпуклые соединения в одинаковых гранях. На геометрических семинарах была озвучена необходимость детального описания алгоритма создания таких соединений. С помощью такого алгоритма и проводится доказательство основной теоремы настоящей работы.

В настоящей работе теорема доказана с привлечением как алгебраических и геометрических методов, так и инструментов компьютерной алгебры и графики. Компьютерные технологии не просто связывают в логическую цепь отдельные математические рассуждения, но и, во-первых, нацелены на автоматизацию всего доказательства; во-вторых, предоставляют пользователю готовые алгебраические и компьютерные модели новых многогранников. И, быть может, самое главное: информационные технологии в самом широком смысле позволяют объединить вокруг научной проблемы не только прямых участников исследования разной квалификации и рассредоточенных по планете, но и привлекать к научной работе новых участников.

## Цель работы

теоретически обосновать, создать и реализовать на практике алгоритм нахождения всех выпуклых многогранников сложенных из тел  $M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19b}$ .

*Геометрическая задача* исследования состоит в том, чтобы найти все выпуклые соединения четырех названных выше сечений пирамиды  ${}^2M_3$  и фуллерена  $M_{19}$  с условием, что любые два ребра соединения либо равны, либо одно вдвое короче другого. Определение фуллерена см., например, [10].

*Педагогическая задача* предполагает организацию учебного и воспитательного

процесса так, чтобы в доказательстве более общей теоремы, чем основной результат настоящей работы, принимало участие максимальное количество заинтересованных лиц: учеников и сотрудников школ, родителей, студентов вузов и просто любителей математики.

### **Объект исследования:**

процесс решения проблемы классификации выпуклых многогранников с правильными гранями, индуцирующий структурные изменения обучения математике.

### **Предмет исследования**

симметрии, инструментом изучения которых служат многогранники и группы совмещающих их движений.

### **Научная новизна и теоретическая значимость**

Математические результаты диссертации являются новыми, вносят существенный вклад в решение открытой пока проблемы классификации выпуклых многогранников с паркетными гранями. Методические подходы развивают известную с 1960-х годов отечественную традицию участия школьников в математических исследованиях мирового уровня.

### **Практическая значимость**

заключается в создании электронного атласа новых многогранников, которые доступны не только специалистам по дискретной геометрии и алгебре. Как и любое фундаментальное исследование, работа отодвигает границу неизвестного и, быть может, главное ее практическое значение будет совершенно неожиданным.

Кроме того, уже сегодня красноярские школьники и их учителя пользуются результатами диссертации.

## **1 Конечные группы движений**

Напомним, что группами поворотов, совмещающих с собой призму с  $n$ -угольным основанием,  $n = 3, 4, 5, \dots$ , икосаэдр и их подгруппами исчерпываются конечные группы

движений первого рода, т. е. не меняющие ориентацию. Если группа симметрий содержит движения второго рода, то её подгруппа поворотов имеет индекс два. Естественно, в настоящей работе мы различаем такие изоморфные четверной группе Клейна группы как: 1) группа, порожденная поворотами на  $180^\circ$  с пересекающимися перпендикулярными осями, см. п. 1.2.6; 2) группа, порождённая отражениями от двух перпендикулярных плоскостей; 3) группа, порождённая поворотом на  $180^\circ$  и отражением от плоскости, перпендикулярной оси поворота.

## 1.1 Нахождение групп поворотов и симметрий многогранника, его фундаментальные грани

В дальнейшем каждому выпуклому многограннику  $P$  с паркетными гранями требуется:

- 1) найти все оси поворотов, совмещающих с собой  $P$ , и создать текст доказательства того, что других осей не существует;
- 2) выяснить какую группу  $Aut^+P$  собственных симметрий составляют повороты, найденные в п. 1.2;
- 3) найти несобственную (по другой терминологии 2-го рода) симметрию многогранника  $P$  или доказать, что она не существует;
- 4) пополнить систему порождающих группы  $Aut^+P$  несобственной симметрией и тем самым построить систему порождающих группы  $AutP$  симметрий тела  $P$ ;
- 5) найти фундаментальные грани и фундаментальные вершины многогранника  $P$ ;
- 6) выбрать систему координат, оси и плоскости которой согласованы с осями поворотов из  $Aut^+P$  и плоскостями отражений из  $AutP$ .

Ниже конечные группы движений представлены порождающими их матрицами.

## 1.2 Матрицы, порождающие конечные группы движений

### 1.2.1 Циклическая группа $C_n$ порядка $n = 2, 3, \dots$ , поворотов неправильной правильной ПИРАМИДЫ с $n$ -угольным основанием

$$C_n = \left\langle \left( \begin{array}{ccc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\rangle, \alpha = \frac{2\pi}{n}.$$

Бывает удобно обратиться к тривиальной группе  $C_1$ , состоящей из единичной матрицы.

### 1.2.2 Группа $T$ поворотов ТЕТРАЭДРА

изоморфна группе чётных подстановок четвёртой степени.

$$m_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & 0 \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s = \sqrt{2}; m_2 = \begin{pmatrix} \frac{s}{t} & 0 & -\frac{1}{t} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{t} & 0 & \frac{s}{t} \end{pmatrix}, t = \sqrt{3};$$

$$m_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, a = m_3^{m_2 \cdot m_1}, b = m_3^{(m_1 \cdot m_2)^{-1}};$$

$$T = \langle a, b \rangle.$$

### 1.2.3 Группа $D$ поворотов ДОДЕКАЭДРА

изоморфна группе чётных подстановок пятой степени. Оси порождающих её поворотов и другие представления можно найти на с. 121 работы [7].

$$\alpha = \begin{pmatrix} co & 0 & -si \\ 0 & 1 & 0 \\ si & 0 & co \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{t_3}{2} \\ 0 & -\frac{t_3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$si = \frac{\tau}{t_3}, co = \frac{1}{\tau t_3}, \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, t_3 = \sqrt{3}.$$

$$D = \langle \beta^\alpha, \beta^{\alpha^{-1}} \rangle.$$

### 1.2.4 Группа $D_{2.n}$ поворотов ДИЭДРА порядка $2n$

$$D_{2.n} = \left\langle \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

### 1.2.5 Группа ${}^2D_{2.n}$ симметрий диэдра порядка $4n$

$${}^2D_{2.n} = \left\langle \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

### 1.2.6 Группа $D_{2,2}$ Клейна ЧЕТВЕРНАЯ

$$D_{2,2} = \left\langle \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \right\rangle.$$

### 1.3 Гамильтоновы циклы графа Кэли группы, порожденной инволюциями

Построение гамильтоновых циклов в графе является важной и до сих пор в общем случае нерешенной задачей. Напомним, что гамильтоновым циклом называется путь, содержащий каждую вершину графа ровно один раз, причем начальная и конечная вершина пути совпадают. Если граф содержит гамильтоновый цикл, то это гамильтонов граф. Тем не менее, существует ряд результатов, определяющих достаточные условия гамильтоновости графа. Большинство известных теорем имеет вид «если граф  $G$  имеет достаточное число ребер, то граф  $G$  является гамильтоновым графом». Среди этих теорем можно выделить классическую теорему Дирака (1952).

**Теорема Дирака.** *Если в простом графе с  $n \geq 3$  вершинами степень  $p(v) \geq n/2$  для любой вершины  $v$ , то граф  $G$  гамильтонов.*

Напомним, графом Дирака называется любой граф из посылки этой теоремы. Граф Дирака – гамильтонов.

Многие результаты о гамильтоновости графов получены для графов определенного класса. Достаточно давно известен результат о существовании гамильтоного цикла в графе Кэли групп, порожденных тремя инволюциями, две из которых перестановочные. Напомним, что графом Кэли называется граф, который строится по группе с выделенной системой порождающих, т. е. если каждый элемент группы можно записать в виде произведения порождающих и обратных к ним элементов. Порождающим группы в её цветном графе Кэли ставится в соответствие ориентированные рёбра, каждому порождающему — ребро своего цвета. Ребра порождающего и обратного к нему элемента имеют различную ориентацию. Между множествами вершин графа Кэли группы и элементами этой группы устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Путешествуя по рёбрам графа Кэли от вершины, которой соответствует единица, до другой вершины, получим путь из рёбер. Ему соответствует произведение порождающих и обратных к ним, равное элементу, представленному другой вершиной. Напомним, *инволюций* называется элемент группы порядка два, т. е. неединичный её элемент, квадрат которого

равен единице. Очевидно, инволюция совпадает с обратным ей элементом. Поэтому неориентированы рёбра графа Кэли порождённой инволюциями группы.

Для большинства представленных в настоящей главе групп достаточно быстро можно по их порождающим построить цветной граф Кэли. В частности, если группа порождена инволюциями, то создание гамильтонова цикла графа Кэли автоматизировано <sup>1</sup> на языке системы компьютерной алгебры ГАП, [11].

---

<sup>1</sup><http://icm.krasn.ru/refextra.php?id=2860>

## 2 Рассечение усеченного икосаэдра на тела с паркетными гранями

Сорок лет назад Ю. А. Пряхин [3] изложил схему доказательства теоремы, классифицирующей с точностью до комбинаторной эквивалентности выпуклые многогранники с равноугольными и паркетными гранями. Напомним, выпуклый многоугольник называем паркетным, если он может быть составлен из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников. Однако до сих пор неизвестно даже количество несоставных многогранников с паркетными и правильными гранями, отличных от четырех бесконечных серий таких тел.

### 2.1 Постановка задачи, обозначения

В работе [7] выяснено каковы все несоставные правильнoгранники, допускающие рассечение плоскостью на многогранники с паркетными гранями. В частности, такими являются правильнoгранная пирамида  ${}^2M_3$  с пятиугольным основанием и ребрами длины 2, архимедово тело  $M_{19}$  с вершинами типа [5,6,6]. Пирамида  ${}^2M_3$  рассекается на пирамиду  $M_3$  с единичными ребрами и усеченную пирамиду  $M_{3a}$ . Усеченный икосаэдр  $M_{19}$  можно рассечь на несоставные части двумя или тремя плоскостями. Две параллельные плоскости отсекают от  $M_{19}$  усеченные пирамиды  $M_{3a}$ , а оставшуюся часть будем обозначать  $M_{19a}$ . Если отсекалть три такие усеченные пирамиды  $M_{3a}$ , то останется фигура, которую будем обозначать  $M_{19b}$ .

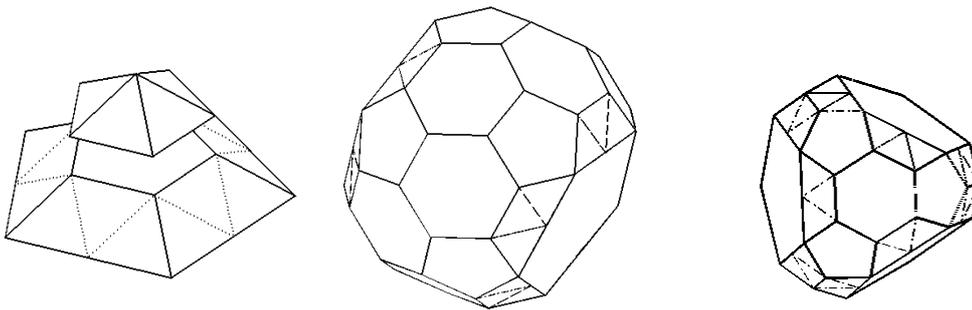


Рис. 1: Пирамида  $M_3$  над телом  $M_{3a}$

Рис. 2: Многогранник  $M_{19a}$

Рис. 3: Многогранник  $M_{19b}$

Введём обозначения для тел, составленных из многогранников списка (1), см. рис. 1,2,3. Пусть  $Q_{i,j}$  — составленный из не более, чем  $i$  многогранников списка (1), причем второй индекс  $j$  указывает на его место в списке  $i$ -составных тел. Таким образом,

составные многогранники будут разбиты на 2-составные, 3-составные и составленные из большего числа несоставных тел многогранники. Может оказаться, что составленный из  $k$  многогранников списка (1) многогранник составляется и из меньшего числа тел списка (1). Договоримся, что  $k$ -составной многогранник нельзя составить из меньшего числа частей.

## 2.2 Основной результат

**Теорема.** *Выпуклый многогранник сложен из тел*

$$M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19b} \quad (1)$$

соединением по одинаковым граням при условии, что любые два ребра каждого соединения либо равны, либо одно вдвое короче другого тогда и только тогда, когда он является одним из следующих соединений  $Q_{i,j}$ , расположенного в списке  $i$  на  $j$ -м месте, а число соединяемых тел для каждого такого  $Q_{i,j}$  минимально:

$$\begin{aligned} &M_3 + M_3, M_3 + M_{3a}, M_3 + M_{19a}, M_3 + M_{19b}, M_3 + M'_{19b}, \\ &M_3 + M''_{19b}, M_{3a} + M_{3a}, M_{3a} + M_{19a}, M_{3a} + M_{19b}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &Q_{2,2} + M_{3a}, Q_{2,2} + M_{19a}, Q_{2,2} + M_{19b}, Q_{2,3} + M_3, \quad Q_{2,3} + M'_3, \\ &Q_{2,3} + M''_3, Q_{2,3} + M_{3a}, Q_{2,3} + M'_{3a}, Q_{2,4} + M_3, \quad Q_{2,4} + M'_3, \\ &Q_{2,4} + M''_3, Q_{2,4} + M_{3a}, Q_{2,5} + M_3, Q_{2,5} + M'_3, \quad Q_{2,5} + M_{3a}, \\ &Q_{2,5} + M'_{3a}, Q_{2,8} + M_3, Q_{2,8} + M_{3a}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &Q_{3,1} + M_3, Q_{3,2} + M_3, Q_{3,2} + M_{3a}, Q_{3,3} + M_3, \quad Q_{3,3} + M'_3, \\ &Q_{3,3} + M''_3, Q_{3,4} + M_3, Q_{3,4} + M_{3a}, Q_{3,5} + M_{3a}, \quad Q_{3,5} + M'_{3a}, \\ &Q_{3,6} + M_{3a}, Q_{3,9} + M_3, Q_{3,9} + M_{3a}, Q_{3,9} + M'_{3a}, \quad Q_{3,10} + M_{3a}, \\ &Q_{3,11} + M_{3a}, Q_{3,11} + M'_{3a}, Q_{3,11} + M''_{3a}, Q_{3,13} + M_3, \quad Q_{3,13} + M'_3, \\ &Q_{3,13} + M_{3a}, Q_{3,13} + M'_{3a}, Q_{3,14} + M_3; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &Q_{4,2} + M_3, Q_{4,2} + M_{3a}, Q_{4,3} + M_3, Q_{4,4} + M_3, \quad Q_{4,7} + M_{3a}, \\ &Q_{4,7} + M'_{3a}, Q_{4,12} + M_{3a}, Q_{4,12} + M'_{3a}, Q_{4,19} + M_{3a}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$Q_{5,1} + M_{3a}. \quad (6)$$

## 2.3 Доказательство.

Тела списка ( $i$ ),  $i = 2, 3, \dots, 6$ ; которые требует теорема, будут получены на  $i$ -м шаге следующего алгоритма.

### 2.3.1 Шаг 1, входные данные.

Находим группу симметрий каждого многогранника списка (1). Будем рассматривать соединения этих тел по фундаментальным граням. Напомним, что такое минимальное по мощности подмножество множества граней многогранника, что действуя группой симметрий на эти грани, получаем каждую грань многогранника. Если из множества фундаментальных граней удалить те, по которым соединения с любым многогранником теоремы приведут к нарушению ее условий, то оставшиеся грани назовём *сверхфундаментальными*.

Поскольку двугранные углы между смежными боковыми гранями пирамиды  $M_3$  столь велики, что соединение этого двугранного угла и любого двугранного угла правильного многогранника приведет к углу, большему  $\pi$  и таким же свойством обладают двугранные углы, образованные: смежными трапециями усеченной пирамиды  $M_{3a}$ , шестиугольными гранями усеченного икосаэдра  $M_{19}$  и его сечений  $M_{19a}$  и  $M_{19b}$ . Поэтому на рисунках закрашены оранжевым цветом сверхфундаментальные грани, ребра которых не являются ребрами указанных выше двугранных углов. Фундаментальные, но не сверхфундаментальные пятиугольные грани закрашены серым цветом, либо прозрачны.

### 2.3.2 Шаг 2.

Строим все выпуклые соединения из двух многогранников списка (1). Берем первый многогранник из списка (1) и находим все его выпуклые соединения с ним самим и телами, стоящими правее его в этом списке.

Шаг 2.1. Соединения с пирамидой  $M_3$ . Эта пирамида обладает двумя фундаментальными гранями. Сверхфундаментальной является только пятиугольное основание. Поэтому соединение такими основаниями дает единственное выпуклое соединение, стоящее первым в списке (2).

Справедливо равенство  $M_3 + M_{3a} =^2 M_3$ , левая часть которого получает второе место в списке (2).

Рассмотрим соединения тел  $M_3$  и  $M_{19a}$ . У них одинаковыми являются только пятиугольные грани с единичными ребрами, причем в множестве фундаментальных граней каждого из этих тел содержится ровно по одному такому пятиугольнику. Следовательно, существует только одно соединение  $M_3 + M_{19a}$ , стоящее третьим в списке (2), см. рис. 4.

Многогранник  $M_{19b}$  имеет три фундаментальных пятиугольника с единичными

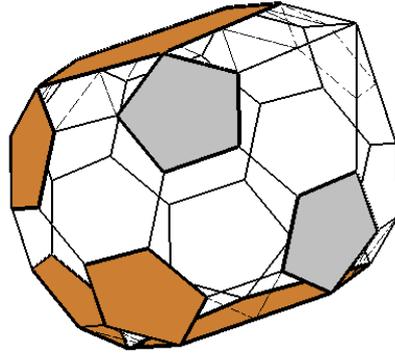


Рис. 4: Соединение  $M_3 + M_{19a}$

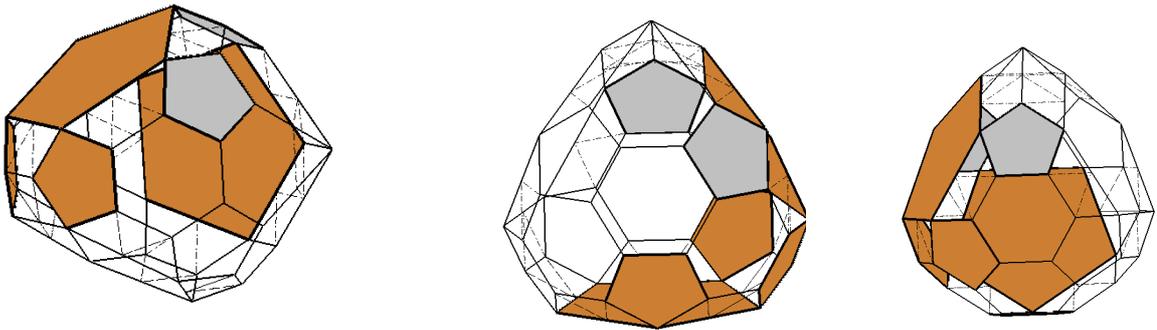


Рис. 5: Соединение  $M_3 + M_{19b}$       Рис. 6: Соединение  $M_3 + M'_{19b}$       Рис. 7: Соединение  $M_3 + M''_{19b}$

сторонами. Поэтому существует всего три выпуклых соединения этого тела с пирамидой  $M_3$ . Их отличия видны на рис. 5, 6, 7, а формулы отличаются штрихами и занимают в списке (2) места с четвертого по шестое.

Шаг 2.2. Соединения с усечённой пирамидой  $M_{3a}$ . Она обладает тремя фундаментальными гранями. Сверхфундаментальными из них являются параллельные пятиугольники. Поэтому соединения по этим пятиугольникам приводят к телам, занимающим в списке (2) места с седьмого по девятое, см. рис. 8, 9.

Шаги 2.3 и 2.4. Не существует выпуклых соединений  $M_{19a} + M_{19a}$ ,  $M_{19a} + M_{19b}$ ,  $M_{19b} + M_{19b}$ .

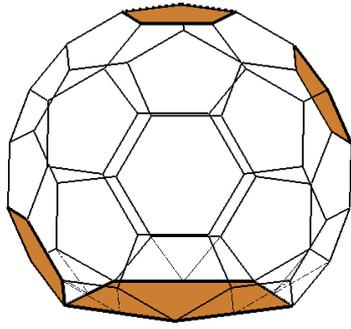


Рис. 8: Соединение  $M_{3a} + M_{19a}$

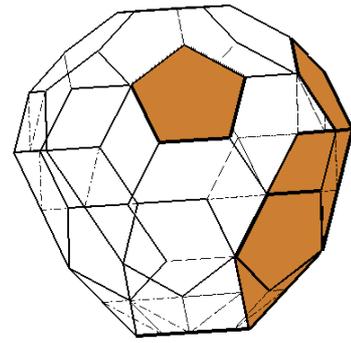


Рис. 9: Соединение  $M_{3a} + M_{19b}$

### 2.3.3 Шаг 3.

Все многогранники, полученные соединением многогранника списка (2) с многогранником из списка (1), которые будем называть 3-составными телами. Берем первый многогранник из списка (2) и находим все его выпуклые соединения с многогранниками списка (1).

Шаг 3.1. Многогранник  $Q_{2,1}$  не обладает сверхфундаментальными гранями, поэтому он в списке закрашен и попадает в таблицу многогранников.

Шаг 3.2. Многогранник  $Q_{2,2}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{2,2}$  и  $M_{3a}$  приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,1}$ . Соединение  $Q_{2,2}$  и  $M_{19a}$  приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,2}$ , см. рис. 10. Соединение  $Q_{2,2}$  и  $M_{19b}$  приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,3}$ , см. рис. 11.

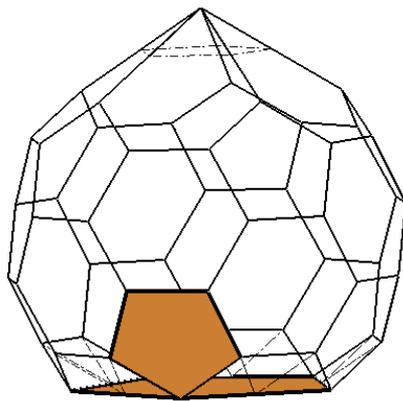


Рис. 10: Соединение  $Q_{2,2} + M_{19a}$

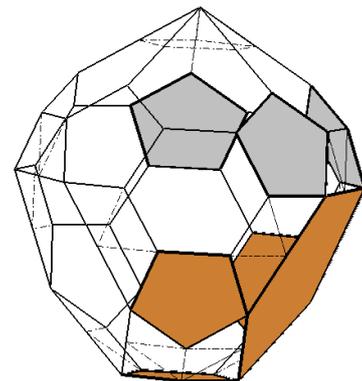


Рис. 11: Соединение  $Q_{2,2} + M_{19b}$

Шаг 3.3. Многогранник  $Q_{2,3}$  обладает тремя сверхфундаментальными гранями с единичными ребрами и двумя с ребрами длины 2. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с такой шестиугольной гранью, которая в свою очередь смежная

с неправильным пятиугольником. Номер три получает пересекающийся с плоскостью симметрии пятиугольник. Оставшимся пятиугольнику дадим номер три. Соединение  $Q_{2,3}$  и  $M_3$  по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,4}$ , см. рис. 12. Соединение  $Q_{2,3}$  и  $M_3$  по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,5}$ , см. рис. 13. Соединение  $Q_{2,6}$  с  $M_3$  по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,6}$ , см. рис. 14. Занумеруем сверхфундаментальные грани с ребрами длины 2. Первый номер получает грань смежная с тремя трапециями и двумя параллелограммами, второй номер присвоен пятиугольнику смежному с пятью трапециями. Соединение  $Q_{2,3}$  и  $M_{3a}$  по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,7}$ , см. рис. 15. Соединение  $Q_{2,3}$  и  $M_{3a}$  по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,8}$ , см. рис. 16.

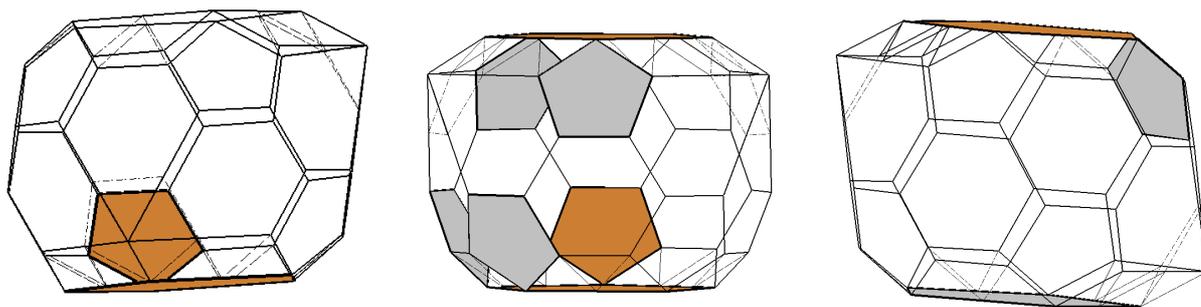


Рис. 12: Соединение  $Q_{2,3}$  +  $M_3$       Рис. 13: Соединение  $Q_{2,3}$  +  $M'_3$       Рис. 14: Соединение  $Q_{2,3}$  +  $M''_3$

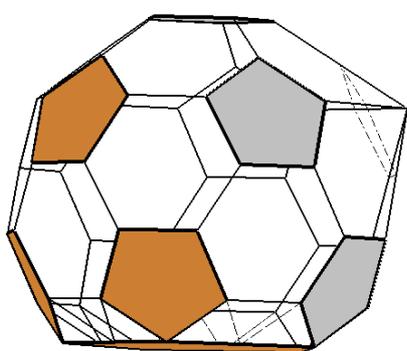


Рис. 15: Соединение  $Q_{2,3}$  +  $M_{3a}$

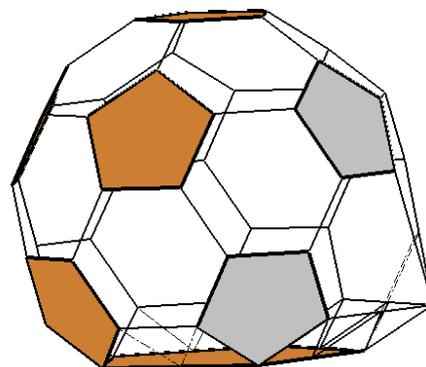


Рис. 16: Соединение  $Q_{2,3}$  +  $M'_{3a}$

Шаг 3.4. Многогранник  $Q_{2,4}$  обладает пятью сверхфундаментальными гранями,

три из которых имеют единичные ребра, а две — в два раза большими ребрами. Номер три получает не пересекающийся с плоскостью симметрии пятиугольник. Второй номер получает пятиугольник, смежный с шестиугольником, соседями которого служат три трапеции. Первый номер приписан оставшемуся пятиугольнику, высота которого лежит в плоскости симметрии, а у смежного шестиугольника есть только две соседние трапеции. Первый номер из двух больших пятиугольников получает тот, который смежен с тремя трапециями. Второй номер присвоен пятиугольнику, окруженному пятью трапециями. Соединение  $Q_{2,4}$  и  $M_3$  по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,9}$ , см. рис. 17. Соединение  $Q_{2,4}$  и  $M_3$  по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,10}$ , см. рис. 18. Соединение  $Q_{2,4}$  с  $M_3$  по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,11}$ , см. рис. 19. Соединение  $Q_{2,4}$  и  $M_{3a}$  по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику  $Q_{3,3}$ . Соединение  $Q_{2,4}$  и  $M_{3a}$  по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,12}$ , см. рис. 20.

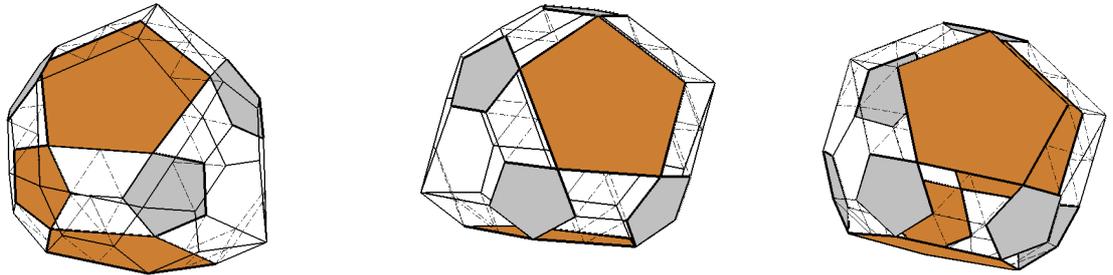


Рис. 17: Соединение  $Q_{2,4}$  +  $M_3$       Рис. 18: Соединение  $Q_{2,4}$  +  $M'_3$       Рис. 19: Соединение  $Q_{2,4}$  +  $M''_3$

Шаг 3.5, Многогранник  $Q_{2,5}$  обладает тремя сверхфундаментальными пятиугольными гранями с единичными ребрами и двумя сверхфундаментальными пятиугольными гранями с ребрами длины 2. Первый номер присвоим пятиугольнику смежному с двумя трапециями. Второй номер получает пятиугольник ближайший к первому. Оставшемуся пятиугольнику дадим номер три. Соединение  $Q_{2,5}$  и  $M_3$  по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{3,9}$ . Соединение  $Q_{2,5}$  и  $M_3$  по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,13}$ , см. рис. 21. Соединение  $Q_{2,5}$  и  $M_3$  по третьей сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,14}$ , см. рис. 22. Первый номер из двух больших пятиугольников полу-

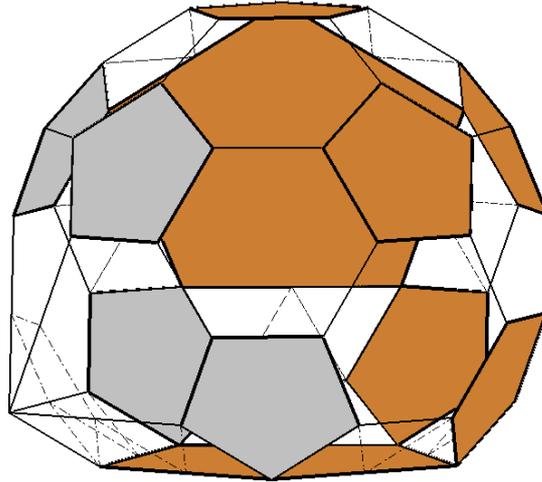


Рис. 20: Соединение  $Q_{2,4} + M_{3a}$

чает тот, который смежен с тремя трапециями. Второй номер присвоен пятиугольнику окруженному пятью трапециями. Соединение  $Q_{2,5}$  и  $M_{3a}$  по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,15}$ , см. рис. 23. Соединение  $Q_{2,5}$  и  $M_{3a}$  по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,16}$ , см. рис. 24.

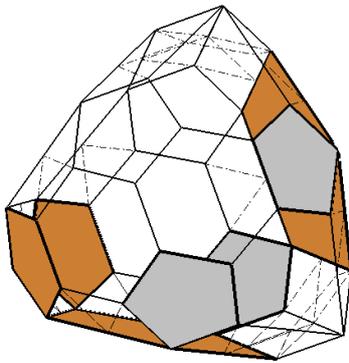


Рис. 21: Соединение  $Q_{2,5} + M_3$

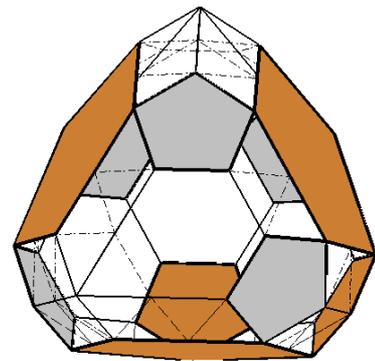


Рис. 22: Соединение  $Q_{2,5} + M'_3$

Шаг 3.6. Многогранник  $Q_{2,6}$  обладает тремя сверхфундаментальными пятиугольными гранями с единичными ребрами. Первый номер присвоим пятиугольнику, высота которого принадлежит плоскости отражения, совмещающего с собой тело  $Q_{2,6}$ . Второй номер получает пятиугольник с четырьмя смежными трапециями. Оставшимся пятиугольнику дадим номер три. Большому пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и с двумя параллелограммами, присвоим номер один, другой пятиугольник с ребрами

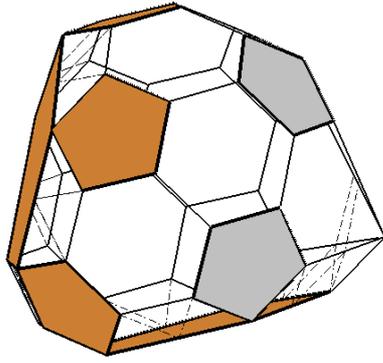


Рис. 23: Соединение  $Q_{2,5} + M_{3a}$

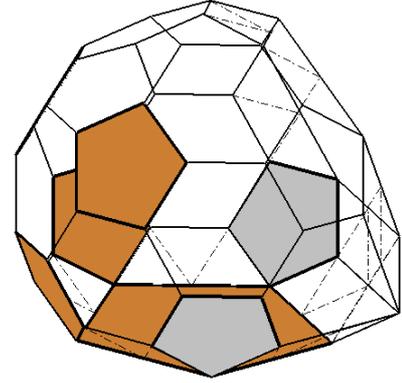


Рис. 24: Соединение  $Q_{2,5} + M'_{3a}$

длины два, занумеруем номером два. Соединение  $Q_{2,6}$  и  $M_3$  по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{3,10}$ . Соединение  $Q_{2,6}$  и  $M_3$  по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{3,14}$ . Соединение  $Q_{2,6}$  с  $M_3$  по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{3,11}$ , точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{2,6}$  и  $M_{3a}$  по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику  $Q_{3,12}$ , точнее — к его образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{2,6}$  и  $M_{3a}$  по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику  $Q_{3,16}$ .

Шаг 3.7. Многогранник  $Q_{2,7}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными ребрами. Поэтому существует единственное выпуклое соединение, которое приводит к многограннику  $Q_{3,1}$ .

Шаг 3.8, Многогранник  $Q_{2,8}$  обладает тремя сверхфундаментальными пятиугольными гранями с единичными ребрами. Занумеруем их в порядке удаления от плоскости пятиугольной грани с ребрами длины 2: первый пятиугольник имеет общию с большим пятиугольником вершину, а третий — параллелен этой плоскости. Соединение  $Q_{2,8}$  и  $M_3$  по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{3,8}$ . Соединение  $Q_{2,8}$  и  $M_3$  по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{3,7}$ . Соединение  $Q_{2,8}$  и  $M_3$  по третьему пятиугольнику приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{3,17}$ , см. рис. 25. Соединение  $Q_{2,8}$  и  $M_{3a}$  по большой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{3,18}$ , см. рис. 26.

Шаг 3.9. Группа симметрий тела  $Q_{2,9}$  порождена отражениями от перпендикулярных плоскостей, одна из которых содержит общее ребро трапеций, смежных с пяти-

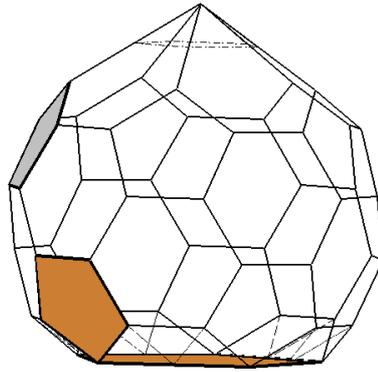


Рис. 25: Соединение  $Q_{2,8} + M_3$

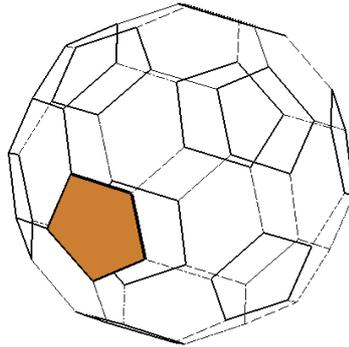


Рис. 26: Соединение  $Q_{2,8} + M_{3a}$

угольными гранями. Напротив этого ребра расположена общая сторона шестиугольных граней. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани в порядке их удаления от этого ребра, которое обозначим буквой  $r$ :

0-я грань содержит вершину ребра  $r$ ,

1-я грань смежна с шестиугольником, одна из сторон которого есть ребро  $r$ ,

2-я грань не смежна с двумя смежными трапециями и не смежна с пятиугольником, одна из сторон которого есть ребро  $r$ ,

3-я грань смежна с двумя смежными трапециями.

Соединение  $Q_{2,9}$  с  $M_3$  по нулевой грани приводит к многограннику  $Q_{3,12}$ . Соединение по первой грани равно многограннику  $Q_{3,15}$ . Соединение  $Q_{2,9}$  и  $M_3$  по второй грани даёт тело  $Q_{3,12}$ . Наконец, справедливо равенство  $Q_{2,9} + M_3 = Q_{3,16}$  при соединении по третьему фундаментальному пятиугольнику тела  $Q_{2,9}$ . Таким образом, новых соединений многогранника  $Q_{2,9}$  и пирамиды  $M_3$  не существует.

Чтобы завершить третий шаг алгоритма, остаётся заметить, что  $Q_{2,9} + M_{3a} = Q_{2,8}$ .

### 2.3.4 Шаг 4.

4-составной многогранник можно получить соединением 3-составного тела и многогранника из списка (1).

Шаг 4.1, многогранник  $Q_{4,1} = Q_{3,1} + M_3$  подобен телу  $Q_{2,1}$ . Других выпуклых соединений тела  $Q_{3,1}$  с многогранниками списка (1) не существует.

Шаг 4.2, многогранник  $Q_{4,2} = Q_{3,2} + M_3$ , см. рис. 27. К большой сверхфундаментальной грани присоединяем усеченную пирамиду  $M_{3a}$  и получаем тело  $Q_{4,3} = Q_{3,2} + M_{3a}$ , см. рис. 28. Его можно получить соединением пирамиды  $M_3$  и архимедова тела  $M_{19} = Q_{3,24}$ . Выпуклых соединений тела  $Q_{3,2}$  с многогранниками  $M_{19a}$  и  $M_{19b}$  не существует.

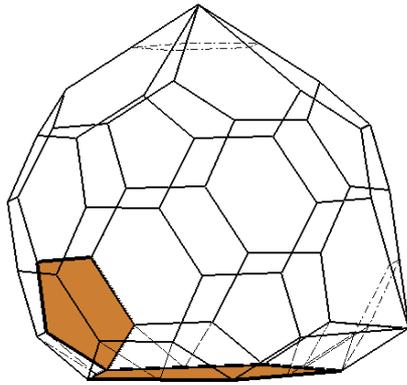


Рис. 27: Соединение  $Q_{3,2} + M_3$

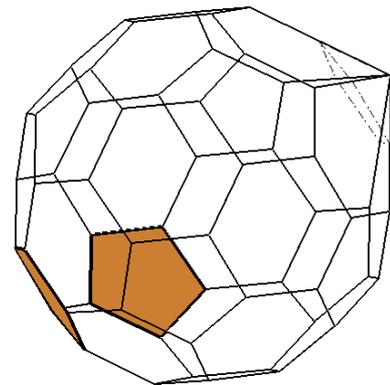


Рис. 28: Соединение  $Q_{3,2} + M_{3a}$

Шаг 4.3. Многогранник  $Q_{4,3}$  обладает тремя сверхфундаментальными пятиугольными гранями с единичными ребрами. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с такой шестиугольной гранью, каждая смежная грань которой есть правильный многоугольник. Наиболее удаленный от этого шестиугольника сверхфундаментальный пятиугольник назовем третьим, и пусть между первым и третьим расположена вторая сверхфундаментальная пятиугольная грань. Присоединяя к этим пятиугольникам в указанном порядке, пирамиды  $M_3$ , получим тела

$$Q_{3,3} + M_3, Q_{3,3} + M'_3, Q_{3,3} + M''_3,$$

см. рис. 29, 30, 31. Наконец,  $Q_{3,3} + M_{3a} = Q_{3,7}$ .

Шаг 4.4. Многогранник  $Q_{3,4}$  обладает двумя сверхфундаментальными пятиугольными гранями: с единичными ребрами и ребрами длины 2. Получаем  $Q_{4,7} = Q_{3,4} + M_3$ , см. рис. 32 и  $Q_{4,8} = Q_{3,4} + M_{3a}$ , см. рис. 33.

Шаг 4.5. Соединение  $Q_{3,5}$  с  $M_3$  по сверхфундаментальной пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{4,7}$ . Соединение  $Q_{3,5}$  с  $M_{3a}$  по грани,

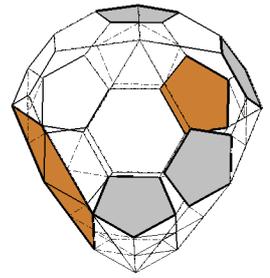
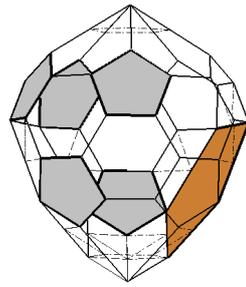
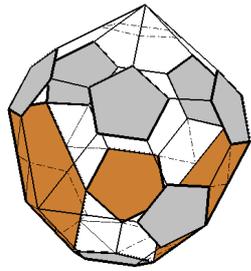


Рис. 29: Соединение  $Q_{3,3} + M_3$     Рис. 30: Соединение  $Q_{3,3} + M'_3$     Рис. 31: Соединение  $Q_{3,3} + M''_3$

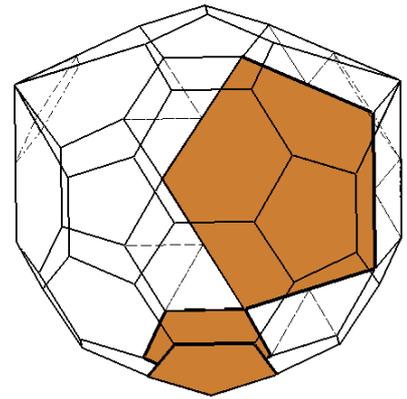
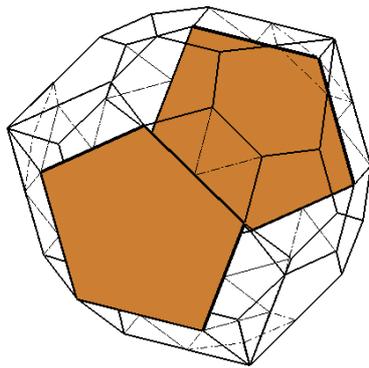


Рис. 32: Соединение  $Q_{3,4} + M_3$

Рис. 33: Соединение  $Q_{3,4} + M_{3a}$

ближайшей к двум присоединенным пирамидам  $M_3$ , приводит к новому многограннику  $Q_{4,9}$ , см. рис. 34. Многогранник  $Q_{4,10}$  получается соединением  $Q_{3,5}$  с  $M_{3a}$  по другой грани, см. рис. 35.

Шаг 4.6. Многогранник  $Q_{3,6}$  обладает одной сверхфундаментальной пятиугольной гранью с ребрами длины 2. Получаем  $Q_{4,11} = Q_{3,6} + M_{3a}$ , см. рис. 36.

Шаг 4.7. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с единичными ребрами многогранника  $Q_{3,7}$  следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, не имеющий общих вершин с большим пятиугольником. Из двух сверхфундаментальных пятиугольников, имеющих такие вершины, номер два присвоим тому, который расположен ближе к вершине с пятью неправильными пятиугольниками, а оставшийся пятиугольник получает номер три. Соединение  $Q_{3,7}$  и  $M_3$  по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,9}$ . Соединение  $Q_{3,7}$  и  $M_3$  по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,8}$ . Соединение  $Q_{3,7}$  и  $M_3$  по третьему пятиугольнику приводит к многограннику  $Q_{4,11}$ . Соединение  $Q_{3,7}$  и  $M_{3a}$  по сверхфундаментальной пятиугольной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику  $Q_{4,3}$ .

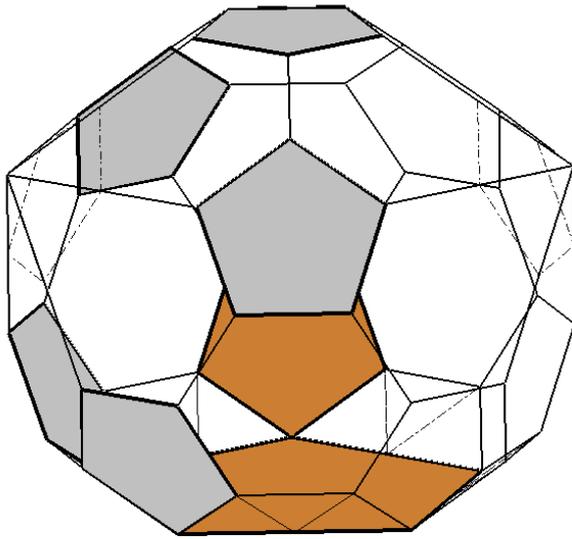


Рис. 34: Соединение  $Q_{3,5} + M_{3a}$

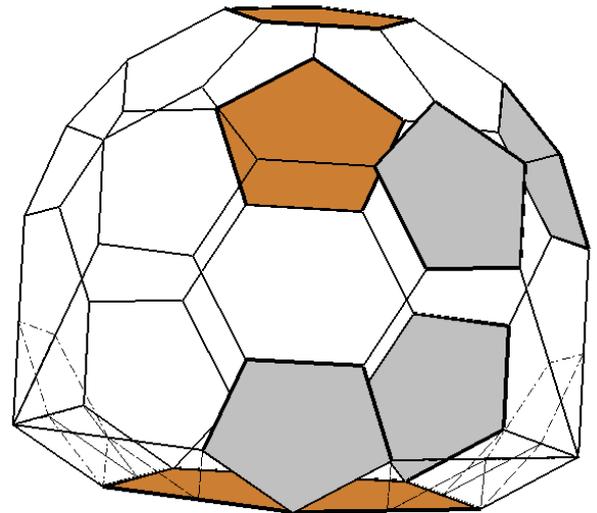


Рис. 35: Соединение  $Q_{3,5} + M'_{3a}$

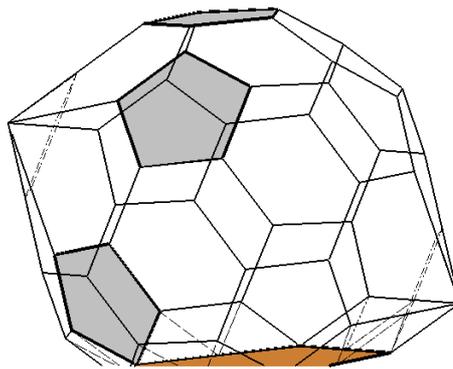


Рис. 36: Соединение  $Q_{3,6} + M_{3a}$

Шаг 4.8. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с единичными ребрами многогранника  $Q_{3,8}$  следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, имеющий общую вершину с большим пятиугольником. Из трех оставшихся сверхфундаментальных пятиугольников два не параллельны большой пятиугольной грани, номер два присвоим тому, который расположен ближе к вершине с тремя неправильными пятиугольниками, а оставшийся пятиугольник получает номер три. Параллельный большому пятиугольнику пятиугольник занумеруем четвертым номером. Соединение  $Q_{3,8}$  и  $M_3$  по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,10}$ . Соединение  $Q_{3,8}$  и  $M_3$  по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,8}$ . Соединение  $Q_{3,8}$  и  $M_3$  по третьему пятиугольнику приводит к многограннику  $Q_{4,11}$ . Соединение  $Q_{3,8}$  и  $M_3$  по четвертому пятиугольнику приводит

к многограннику  $Q_{4,2}$ . Соединение  $Q_{3,8}$  и  $M_{3a}$  по сверхфундаментальной пятиугольной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику  $Q_{4,3}$ .

Шаг 4.9. Соединение  $Q_{3,9}$  с  $M_3$  по сверхфундаментальной пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{4,12}$ , см. рис. 37. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с ребрами длины 2 многогранника  $Q_{3,9}$  следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с двумя параллелограммами, каждый из которых смежен с неправильной пятиугольной гранью. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины 2 дадим второй номер. Соединение  $Q_{3,9}$  с  $M_{3a}$  по первой пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{4,13}$ , см. рис. 38. Соединение  $Q_{3,9}$  с  $M_{3a}$  по второй пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{4,14}$ , см. рис. 39.

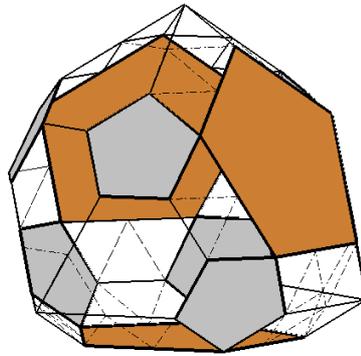


Рис. 37: Соединение  $Q_{3,9} + M_3$

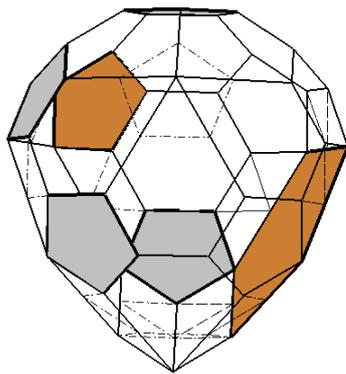


Рис. 38: Соединение  $Q_{3,9} + M_{3a}$

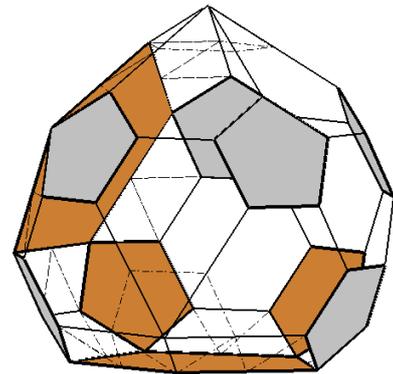


Рис. 39: Соединение  $Q_{3,9} + M'_{3a}$

Шаг 4.10. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с ребрами длины 2 многогранника  $Q_{3,10}$  следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с двумя параллелограммами, каждый из которых смежен с неправильной пятиугольной гранью. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины 2 дадим второй

номер. Соединение  $Q_{3,10}$  с  $M_{3a}$  по первой пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{4,5}$ . Соединение  $Q_{3,10}$  с  $M_{3a}$  по второй пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{4,15}$ , см. рис. 40.

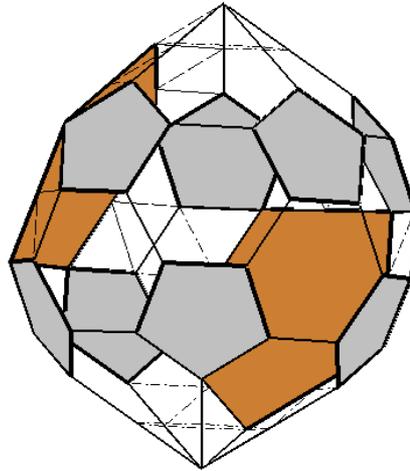


Рис. 40: Соединение  $Q_{3,10} + M_3$

Шаг 4.11. Соединение  $Q_{3,11}$  с  $M_3$  по пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{4,12}$ . Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с ребрами длины 2 многогранника  $Q_{3,11}$  следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с пятью трапециями. Второй номер получит пятиугольник, смежный с двумя параллелограммами. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины 2 дадим третий номер. Соединение  $Q_{3,11}$  с  $M_{3a}$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,16}$ , см. рис. 41. Соединение  $Q_{3,11}$  с  $M_{3a}$  по второй пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,17}$ , см. рис. 42. Соединение  $Q_{3,11}$  с  $M_{3a}$  по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,18}$ , см. рис. 43.

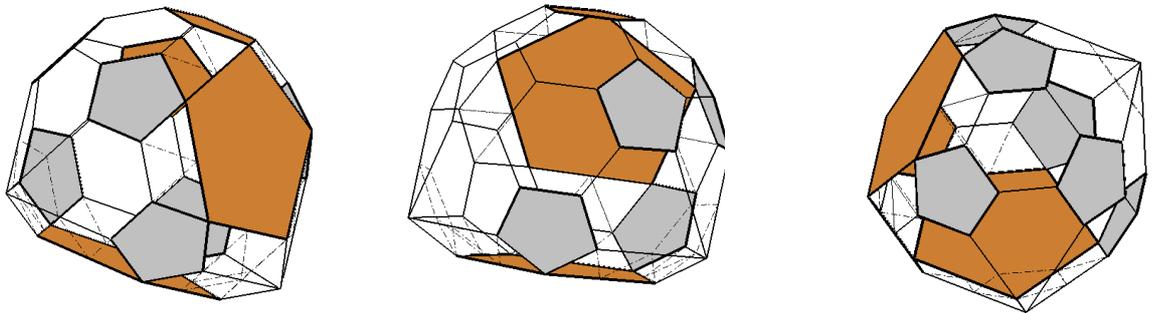


Рис. 41: Соединение  $Q_{3,11} + M_{3a}$       Рис. 42: Соединение  $Q_{3,11} + M'_{3a}$       Рис. 43: Соединение  $Q_{3,11} + M''_{3a}$

Шаг 4.12. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными ребрами многогранника  $Q_{3,12}$  следующим образом. Первый номер получает пяти-

угольник, смежный с пятью правильными шестиугольниками. Второй номер получает пятиугольник смежный с четырьмя трапециями. Третий номер получает сверхфундаментальный пятиугольник, которой из оставшихся трех ближе всех расположен к приклеенной пирамиде  $M_3$ . Номер четыре получает сверхфундаментальный пятиугольник, лежащий ближе к третьему пятиугольнику. Оставшийся занумеруем пятым номером. Соединение  $Q_{3,12}$  с  $M_3$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,18}$ . Соединение  $Q_{3,12}$  с  $M_3$  по второй пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,15}$ , точнее к его образу при отражении от плоскости, которое меняет местами большие пятиугольные грани. Соединение  $Q_{3,12}$  с  $M_3$  по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,13}$ . Соединение  $Q_{3,12}$  с  $M_3$  по четвертой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,14}$ . Соединение  $Q_{3,12}$  с  $M_3$  по пятой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,12}$ .

Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с ребрами длины 2 многогранника  $Q_{3,12}$  следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с пятью трапециями. Второй номер получит пятиугольник, смежный с двумя параллелограммами. Соединение  $Q_{3,12}$  с  $M_{3a}$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{3,8}$ , а по второй – к многограннику  $Q_{3,7}$ .

Шаг 4.13. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными ребрами многогранника  $Q_{3,13}$  следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с шестиугольной гранью, которая смежна с тремя трапециями. Номер два получит оставшийся пятиугольник. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с ребрами длины 2 многогранника  $Q_{3,13}$  следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с двумя параллелограммами и тремя трапециями. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины 2 дадим второй номер. Соединение  $Q_{3,13}$  с  $M_3$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,19}$ , см. рис. 44. Соединение  $Q_{3,13}$  с  $M_3$  по второй пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{4,20}$ , см. рис. 45. Соединение  $Q_{3,13}$  с  $M_{3a}$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,21}$ , см. рис. 46. Соединение  $Q_{3,13}$  с  $M_{3a}$  по второй пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{4,22}$ , см. рис. 47.

Шаг 4.14. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными ребрами многогранника  $Q_{3,14}$  следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с тремя шестиугольными гранями. Номер два получит оставшийся пятиугольник. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с ребрами дли-

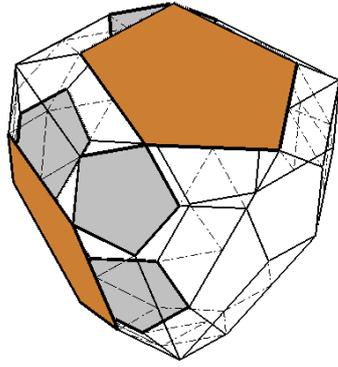


Рис. 44: Соединение  $Q_{3,13} + M_3$

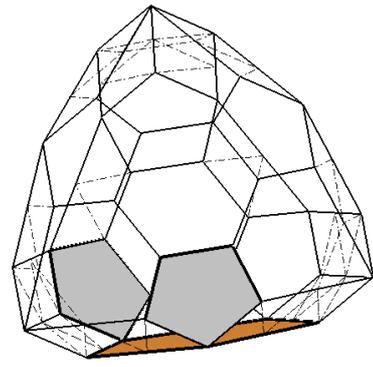


Рис. 45: Соединение  $Q_{3,13} + M'_3$

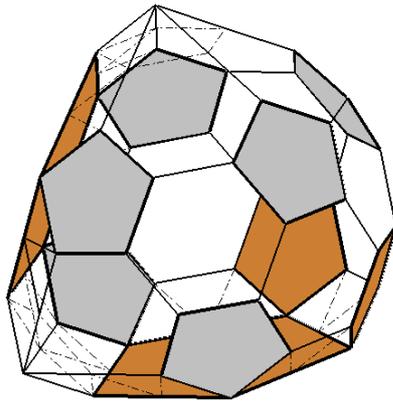


Рис. 46: Соединение  $Q_{3,13} + M_{3a}$

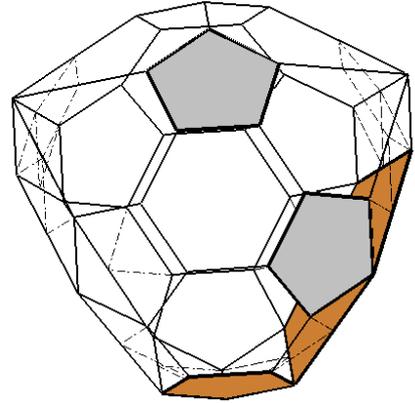


Рис. 47: Соединение  $Q_{3,13} + M'_{3a}$

ны 2 многогранника  $Q_{3,14}$  так. Первый номер получает пятиугольник, имеющий общую с первой пятиугольной гранью с единичными ребрами вершину. Второй номер получает пятиугольник, смежный с четырьмя параллелограммами. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины 2 дадим третий номер. Соединение  $Q_{3,14}$  с  $M_3$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{4,23}$ , см. рис. 48. Соединение  $Q_{3,14}$  с  $M_3$  по второй пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,19}$ , точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{3,14}$  с  $M_{3a}$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,16}$ , точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{3,14}$  с  $M_{3a}$  по второй пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,14}$ , точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{3,14}$  с  $M_{3a}$  по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,21}$ .

Шаг 4.15. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными ребрами многогранника  $Q_{3,15}$  следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с четырьмя трапециями. Второй номер получает пятиугольник, который лежит ближе к первому. Оставшимся присвоим номер три, ее пересекает плоскость отражения, совмещающего с собой многогранник. Занумеруем сверхфунда-

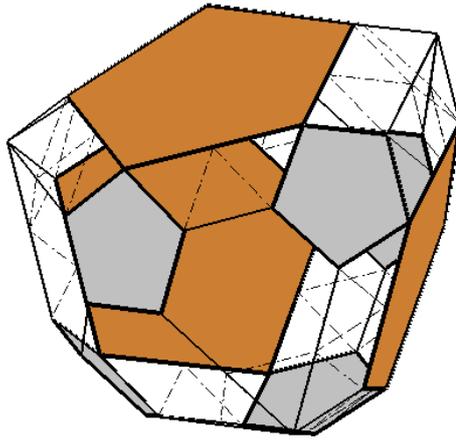


Рис. 48: Соединение  $Q_{3,14} + M_3$

ментальные пятиугольные грани с ребрами длины 2 многогранника  $Q_{3,15}$  следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с пятью трапециями. Оставшийся получает номер два. Соединение  $Q_{3,15}$  с  $M_3$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,21}$ , точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{3,15}$  с  $M_3$  по второй пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,14}$ , точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{3,15}$  с  $M_3$  по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,22}$ , точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{3,15}$  с  $M_{3a}$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{3,8}$ . Соединение  $Q_{3,15}$  с  $M_{3a}$  по второй пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{3,19}$ .

Шаг 4.16. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными ребрами многогранника  $Q_{3,16}$  следующим образом. Пятиугольник, имеющий общию вершину с большой пятиугольной гранью и смежный с такой шестиугольной гранью, которая параллельна неправильной пятиугольной грани, получает номер один. Другой пятиугольник, смежный с этим шестиугольником, приобретает номер 2. Плоскость отражения, совмещающая с собой многогранник  $Q_{3,16}$ , проходит через вершину и середину ребра неправильного пятиугольника и содержит высоту второго пятиугольника. Четвертый номер присвоим пятиугольнику, высота которого содержится в этой плоскости отражения. Оставшийся пятиугольник получает номер три, он имеет общую с большим пятиугольником вершину. Соединение  $Q_{3,16}$  с  $M_3$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,16}$ , точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{3,16}$  с  $M_3$  по второй пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,5}$ . Соединение  $Q_{3,16}$  с  $M_3$  по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,6}$ . Соединение  $Q_{3,16}$  с  $M_3$  по четвертой пятиугольной грани приводит к многограннику

$Q_{4,21}$ . Соединение  $Q_{3,16}$  и  $M_{3a}$  по сверхфундаментальной пятиугольной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику  $Q_{3,8}$ .

Шаг 4.17. Многогранник  $Q_{3,17}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными ребрами и одной — с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{3,17}$  с  $M_3$  по пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{4,2}$ . Соединение  $Q_{3,17}$  с  $M_{3a}$  по пятиугольной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику  $Q_{4,3}$ .

Шаг 4.18. Многогранник  $Q_{3,18}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными ребрами. Соединение приводит к фигуре  $Q_{4,3}$ .

### 2.3.5 Шаг 5.

Будем искать выпуклые соединения многогранника списка (4) с многогранником из списка (1).

Шаг 5.1. Берем первый многогранник из списка (4) и находим все его выпуклые соединения с многогранниками списка (1). Многогранник  $Q_{4,1}$  не обладает сверхфундаментальными гранями, поэтому он в списке выделен шрифтом.

Шаг 5.2. Многогранник  $Q_{4,2}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными ребрами и одной — с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{4,2}$  с  $M_3$  по пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к новому многограннику  $Q_{5,1}$ , см. рис. 49. Соединение  $Q_{4,2}$  с  $M_{3a}$  по пятиугольной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику, которому дадим обозначение  $Q_{5,2}$ , см. рис. 50.

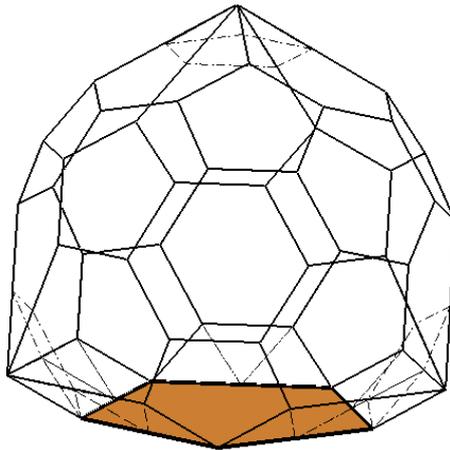


Рис. 49: Соединение  $Q_{4,2} + M_3$

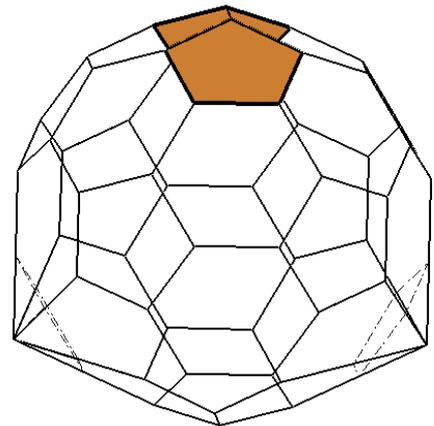


Рис. 50: Соединение  $Q_{4,2} + M_{3a}$

Шаг 5.3. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными ребрами многогранника  $Q_{4,3}$  следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с такой шестиугольной гранью, которая, в свою очередь, смежна с

неправильным пятиугольником. Оставшийся получает номер два. Соединение  $Q_{4,3}$  с  $M_3$  по первой пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,2}$ . Соединение  $Q_{4,3}$  с  $M_3$  по второй пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{5,3}$ , см. рис. 51.

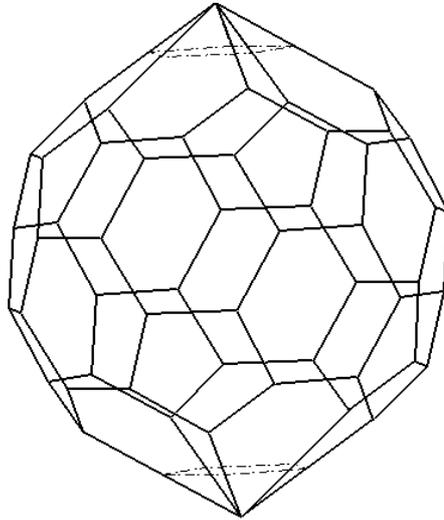


Рис. 51: Соединение  $Q_{4,3} + M_3$

Шаг 5.4. Многогранник  $Q_{4,4}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными ребрами и двумя — с вдвое большими ребрами. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с ребрами длины 2 следующим образом. Большому пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один, другому пятиугольнику с ребрами длины два дадим номер два. Соединение  $Q_{4,4}$  с  $M_3$  по пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{5,4}$ , см. рис. 52. Соединение  $Q_{4,4}$  с  $M_{3a}$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,9}$ . Соединение  $Q_{4,4}$  с  $M_{3a}$  по второй пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{4,8}$ , точнее к его образу при отражении от плоскости.

Шаг 5.5. Многогранник  $Q_{4,5}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{4,5}$  с  $M_{3a}$  приводит к многограннику  $Q_{4,11}$ .

Шаг 5.6. Многогранник  $Q_{4,6}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными ребрами и одной — с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{4,6}$  с  $M_3$  по пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,4}$ . Соединение  $Q_{4,6}$  с  $M_{3a}$  по пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{4,8}$ .

Шаг 5.7. Многогранник  $Q_{4,7}$  обладает двумя сверхфундаментальными гранями

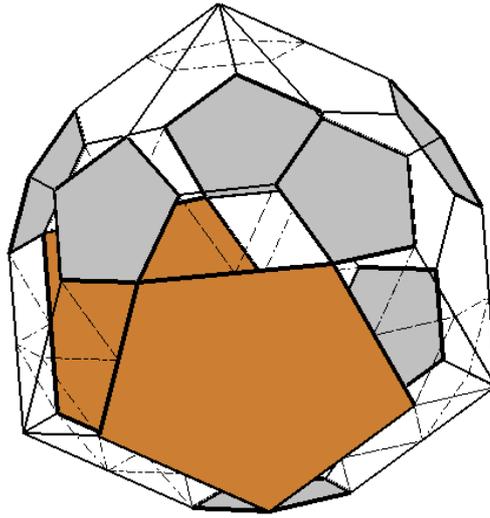


Рис. 52: Соединение  $Q_{4,4} + M_3$

с ребрами длины 2. Пятиугольнику смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами присвоим номер один. Другой пятиугольник с ребрами длины два занумеруем номером два. Соединение  $Q_{4,7}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{5,5}$ , см. рис. 53. Соединение  $Q_{4,7}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{5,6}$ , см. рис. 54.

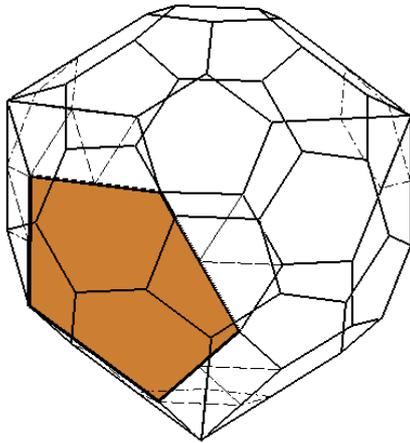


Рис. 53: Соединение  $Q_{4,7} + M_{3a}$

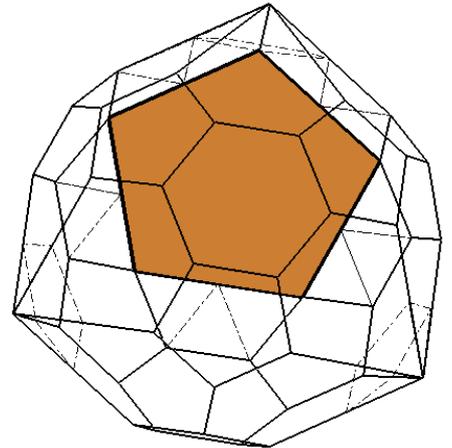


Рис. 54: Соединение  $Q_{4,7} + M'_{3a}$

Шаг 5.8. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными ребрами многогранника  $Q_{4,8}$  следующим образом. Номер один присвоим многограннику, имеющему общую вершину с большим пятиугольником. Другой многогранник, занумеруем двойкой. Соединение  $Q_{4,8}$  с  $M_3$  по первой пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,5}$ . Соединение  $Q_{4,8}$  с  $M_3$  по второй пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,6}$ . Соединение  $Q_{4,8}$  с  $M_{3a}$

приводит к многограннику  $Q_{5,2}$ .

Шаг 5.9. Многогранник  $Q_{4,9}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными ребрами и одной — с вдвое большими рёбрами. Соединение  $Q_{4,9}$  с  $M_3$  по пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,6}$ . Соединение  $Q_{4,9}$  с  $M_{3a}$  приводит к многограннику  $Q_{5,2}$ .

Шаг 5.10. Многогранник  $Q_{4,10}$  обладает двумя сверхфундаментальными гранями с единичными ребрами и одной — с ребрами длины 2. Номер один присвоим пятиугольнику с единичными ребрами, параллельному большому пятиугольнику. Другой пятиугольник занумеруем вторым номером. Соединение  $Q_{4,10}$  с  $M_3$  по первому пятиугольнику с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,1}$ . Соединение  $Q_{4,10}$  с  $M_3$  по второму пятиугольнику с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,5}$ . Соединение  $Q_{4,10}$  с  $M_{3a}$  приводит к многограннику  $Q_{5,2}$ .

Шаг 5.11. Многогранник  $Q_{4,11}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{4,5}$  с  $M_{3a}$  приводит к многограннику  $Q_{5,3}$ .

Шаг 5.12. Многогранник  $Q_{4,12}$  обладает тремя сверхфундаментальными гранями с ребрами длины 2. Пятиугольнику смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами присвоим номер один. Второй номер дадим пятиугольнику, смежному с такой трапецией, которая, в свою очередь, смежна с неправильным пятиугольником. Оставшийся пятиугольник с ребрами длины два получает номер три. Соединение  $Q_{4,12}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{5,7}$ , см. рис. 55. Соединение  $Q_{4,12}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{5,8}$ , см. рис. 56. Соединение  $Q_{4,12}$  с  $M_{3a}$  по третьей грани приводит к многограннику  $Q_{5,4}$ , точнее к ее образу при отражении от плоскости.

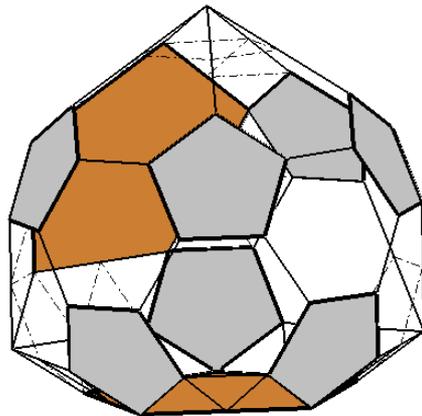


Рис. 55: Соединение  $Q_{4,12} + M_{3a}$

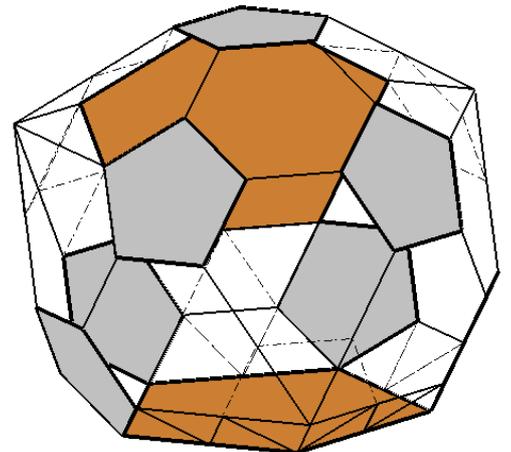


Рис. 56: Соединение  $Q_{4,12} + M'_{3a}$

Шаг 5.13. Многогранник  $Q_{4,13}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными ребрами и одной — с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{4,13}$  с  $M_3$  по пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,4}$ , точнее к ее образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{4,13}$  с  $M_{3a}$  по большой грани приводит к многограннику  $Q_{4,8}$ , точнее к ее образу при отражении от плоскости.

Шаг 5.14. Многогранник  $Q_{4,14}$  обладает двумя сверхфундаментальными гранями с единичными ребрами и двумя с ребрами длины 2. Первый номер присвоим маленькому многограннику, смежному с четырьмя трапециями. Оставшийся занумеруем вторым номером. Соединение  $Q_{4,14}$  с  $M_3$  по первой пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,7}$ , точнее к ее образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{4,14}$  с  $M_3$  по второй пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,8}$ . Занумеруем сверхфундаментальные грани с ребрами длины 2, следующим образом. Первый номер получает многогранник, имеющий две общие вершины с двумя маленькими пятиугольниками. Оставшийся получает номер два. Соединение  $Q_{4,14}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику  $Q_{4,8}$ . Соединение  $Q_{4,14}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику  $Q_{4,2}$ .

Шаг 5.15. Многогранник  $Q_{4,15}$  обладает двумя сверхфундаментальными гранями с ребрами длины 2. Плоскость отражения, совмещающая с собой многогранник  $Q_{4,15}$ , проходит через вершину и середину ребра пятиугольника и содержит высоту первого пятиугольника. Оставшийся получает номер два. Соединение  $Q_{4,15}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику  $Q_{4,11}$ . Соединение  $Q_{4,15}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику  $Q_{4,11}$ .

Шаг 5.16. Многогранник  $Q_{4,16}$  обладает двумя сверхфундаментальными гранями с единичными ребрами и двумя с ребрами длины 2. Первый номер присвоим маленькому многограннику, смежному с пятью шестугольниками. Оставшимся дадим второй номер. Соединение  $Q_{4,16}$  с  $M_3$  по первой пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,4}$ . Соединение  $Q_{4,16}$  с  $M_3$  по второй пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,7}$ . Занумеруем сверхфундаментальные грани с ребрами длины 2 следующим образом. Пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины два присвоим номер два. Соединение  $Q_{4,16}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику  $Q_{4,10}$ , а по второй грани — к многограннику  $Q_{4,8}$ .

Шаг 5.17. Многогранник  $Q_{4,17}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с

единичными ребрами и двумя с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{4,17}$  с  $M_3$  по пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,8}$ . Занумеруем сверхфундаментальные грани с ребрами длины 2 следующим образом. Пятиугольнику, смежному с пятью трапециями, присвоим номер один. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины два присвоим номер два. Соединение  $Q_{4,17}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику  $Q_{4,10}$ . Соединение  $Q_{4,17}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику  $Q_{4,9}$ .

Шаг 5.18. Многогранник  $Q_{4,18}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными ребрами и двумя с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{4,18}$  с  $M_3$  по пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,4}$ , точнее к ее образу при отражении от плоскости. Занумеруем сверхфундаментальные грани с ребрами длины 2 следующим образом. Пятиугольнику, смежному с пятью трапециями, присвоим номер один. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины два присвоим номер два. Соединение  $Q_{4,18}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику  $Q_{4,8}$ . Соединение  $Q_{4,18}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику  $Q_{4,9}$ .

Шаг 5.19. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными ребрами многогранника  $Q_{4,19}$  следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с трапецией, которая, в свою очередь, смежна с неправильным пятиугольником. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины два присвоим номер два. Соединение  $Q_{4,19}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику  $Q_{4,8}$ . Соединение  $Q_{4,19}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{5,9}$ , см. рис. 57.

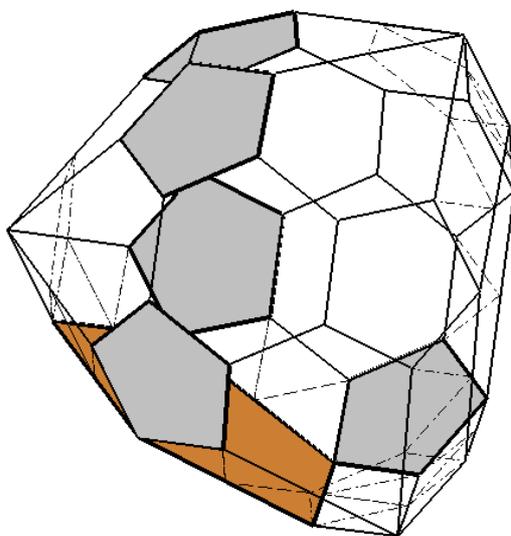


Рис. 57: Соединение  $Q_{4,19} + M_{3a}$

Шаг 5.20. Многогранник  $Q_{4,20}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с ребрами длины 2. Группа его симметрий порождена двумя отражениями от плоскостей. Соединение  $Q_{4,20}$  с  $M_{3a}$  приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{5,9}$ .

Шаг 5.21. Многогранник  $Q_{4,21}$  обладает двумя сверхфундаментальными гранями с единичными ребрами и двумя — с ребрами длины 2. Первый номер присвоим маленькому многограннику, смежному с шестугольником, который, в свою очередь, смежен с двумя трапециями. Оставшаяся пятиугольная грань с единичными ребрами получает второй номер. Соединение  $Q_{4,21}$  с  $M_3$  по первой пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,7}$ . Соединение  $Q_{4,21}$  с  $M_3$  по второй пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,9}$ . Занумеруем сверхфундаментальные грани с ребрами длины 2 следующим образом. Пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины два присвоим номер два. Соединение  $Q_{4,21}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику  $Q_{4,10}$ . Соединение  $Q_{4,21}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику  $Q_{4,2}$ .

Шаг 5.22. Многогранник  $Q_{4,22}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными ребрами и одной — с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{4,22}$  с  $M_3$  по пятиугольной грани с единичными ребрами приводит к многограннику  $Q_{5,9}$ . Соединение  $Q_{4,22}$  с  $M_{3a}$  по сверхфундаментальной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику  $Q_{4,2}$ .

Шаг 5.23. Многогранник  $Q_{4,23}$  обладает тремя сверхфундаментальными гранями с ребрами длины 2. Занумеруем сверхфундаментальные грани следующим образом. Пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один. Пятиугольнику, смежному с трапецией, которая, в свою очередь, смежна с трапецией, присвоим номер два. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины два присвоим номер три. Соединение  $Q_{4,23}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику  $Q_{5,7}$ . Соединение  $Q_{4,23}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику  $Q_{5,4}$ , точнее к ее образу при отражении от плоскости. Соединение  $Q_{4,23}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику  $Q_{5,8}$ .

### 2.3.6 Шаг 6.

Берем первый многогранник из списка (5) и находим все его выпуклые соединения с многогранниками списка (1).

Шаг 6.1. Многогранник  $Q_{5,1}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с

ребрами длины 2. Соединение  $Q_{5,1}$  с  $M_{3a}$  приводит к многограннику, который будем обозначать  $Q_{6,1}$ , см. рис. 58.

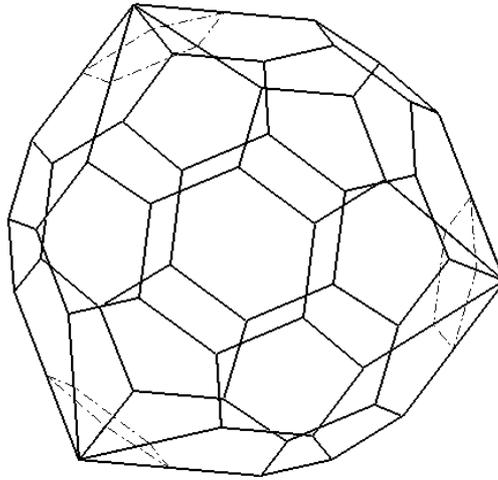


Рис. 58: Соединение  $Q_{5,1} + M_{3a}$

Шаг 6.2. Многогранник  $Q_{5,2}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{5,2}$  с  $M_{3a}$  приводит к многограннику  $Q_{6,1}$ .

Шаг 6.3. Многогранник  $Q_{5,3}$  не обладает сверхфундаментальными гранями.

Шаг 6.4. Многогранник  $Q_{5,4}$  обладает двумя сверхфундаментальными гранями с ребрами длины 2. Занумеруем сверхфундаментальные грани с ребрами длины 2 следующим образом. Пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один. Оставшийся пятиугольник с ребрами длины два получает номер два. Соединение  $Q_{5,4}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику  $Q_{5,5}$ . Соединение  $Q_{5,4}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику  $Q_{5,6}$ .

Шаг 6.5. Многогранник  $Q_{5,5}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{5,5}$  с  $M_{3a}$  приводит к многограннику  $Q_{6,1}$ .

Шаг 6.6. Многогранник  $Q_{5,6}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{5,6}$  с  $M_{3a}$  приводит к многограннику  $Q_{6,1}$ .

Шаг 6.7. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с ребрами длины 2 многогранника  $Q_{5,7}$  следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с такой трапецией, которая, в свою очередь, смежна с неправильным пятиугольником. Оставшийся получает номер два. Соединение  $Q_{5,7}$  с  $M_{3a}$  по первой пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{5,1}$ . Соединение  $Q_{5,7}$  с  $M_{3a}$  по второй пятиугольной грани приводит к многограннику  $Q_{5,5}$ .

Шаг 6.8. Многогранник  $Q_{5,8}$  обладает двумя сверхфундаментальными гранями с ребрами длины 2. Занумеруем сверхфундаментальные грани с ребрами длины 2 сле-

дующим образом. Пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один. Оставшимся пятиугольнику с ребрами длины два присвоим номер два. Соединение  $Q_{5,8}$  с  $M_{3a}$  по первой грани приводит к многограннику  $Q_{5,1}$ . Соединение  $Q_{5,8}$  с  $M_{3a}$  по второй грани приводит к многограннику  $Q_{5,6}$ .

Шаг 6.9. Многогранник  $Q_{5,9}$  обладает одной сверхфундаментальной гранью с ребрами длины 2. Соединение  $Q_{5,9}$  с  $M_{3a}$  приводит к многограннику  $Q_{5,1}$ .

### 2.3.7 Шаг 7, завершение доказательства

6-составной многогранник не обладает сверхфундаментальными гранями. Поэтому 7-составных тел не существует. Теорема доказана.

## 3 Этапы и способы организации коллективной работы над научной проблемой

Содержание этой главы находится на электронном носителе. Сегодня применяются на красноярской земле выносимые на защиту способы организации коллективной работы, формирующиеся вокруг цепочки: геометрическая задача, алгебраическое моделирование, компьютерное моделирование, прототипирование, решение задачи. Они могут пригодиться специалистам других областей знаний, включая гуманитарные.

Видеозапись сделана на международном вебинаре “Группы и многогранники” 19 июня 2015 (<http://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra>). Файлы с “живыми” моделями многогранников приложены к видеозаписи. Статью Тимофеев А. В. и Отмаховой Е. С. “Комплекс решений, необходимых для организации работы над научной проблемой коллективом сотрудников и студентов” надеемся увидеть опубликованной в журнале “Вестник КГПУ им. В. П. Астафьева” № 3, 2015 г. (октябрь).

## Заключение

Оглашенная во введении цель работы достигнута. Нарботанный материал можно считать основой для подготовки к занятиям с теми людьми кто продолжит изучать выпуклые многогранники с паркетным гранями. Опубликованные в приложении программы для системы компьютерной алгебры ГАП являются частью давно созданной интегри-

рованной программной среды для синтеза многогранников, [4, 5]. Эти программы изменены незначительно, хотя возможности самой интегрированной программной среды выросли существенно. Вместе с теоремой настоящей диссертации будут использованы в наступающем новом учебном году.

## Выступления на семинарах и конференциях

1. XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», Тула, 25–30 мая 2015 года. Тема выступления: “О выпуклых многогранниках с паркетными гранями”, [9]. <sup>2</sup>
2. “Молодёжь и наука XXI века”, XVI Международно научно-практический форум студентов, аспирантов и молодых ученых (15 апреля-23 мая 2015 г., Красноярск). Тема выступления: “О сечениях икосаэдра, приводящих к телам с паркетными гранями”. <sup>3</sup>
3. Международный вэбинар “Группы и правильные многогранники”. Тема выступления: “Комплекс решений, необходимых для организации коллективной работы над научной проблемой”. <sup>4</sup>
4. Международный вэбинар “Группы и правильные многогранники”. Тема выступления: “Разбиения икосаэдра на выпуклые многогранники, каждая грань которых составлена из правильных многоугольников”. <sup>5</sup>
5. II Всероссийская научно-методическая конференция «Информационные технологии в математике и математическом образовании». Тема выступления: “О гамильтоновых циклах в графе Кэли некоторых конечных групп”. <sup>6</sup>

---

<sup>2</sup><http://cheb.tsput.ru/conf/international/XIII/program.php>

<sup>3</sup><http://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2015>

<sup>4</sup><http://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2015>

<sup>5</sup><http://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2015>

<sup>6</sup><http://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2013>

## Список цитированной литературы

- [1] Залгаллер, В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. науч. Семинаров ЛОМИ. 1967. Т. 2. С. 5–218.
- [2] Тимофеенко, А. В. К перечню выпуклых правильных многогранников / А. В. Тимофеенко // Современные проблемы математики и механики Издат. Московского университета — Москва, 2011. — Том VI, Математика. — Вып. 3 (К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова) — с. 155–170.
- [3] Пряхин, Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных / Ю. А. Пряхин // Вопросы глобальной геометрии, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 45, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 111–112.
- [4] Тимофеенко А. В., Голованова О. В., Тимофеев И. В. Красота формулы воплощается в красоту пространственной формы I // Вестник Краснояр. гос. архитектурно-строит. академии: Сб. науч. тр. Всероссийской науч.-практ. конф. "Сибири – новые технологии в архитектуре, строительстве и жилищно-коммунальном хозяйстве". Красноярск: КрасГАСА – 2005. Выпуск 8, с. 287–293.
- [5] Тимофеенко А. В., Голованова О. В., Тимофеев И. В. Красота формулы воплощается в красоту пространственной формы II // Вестник Краснояр. гос. архитектурно-строит. академии: Сб. науч. тр. Всероссийской науч.-практ. конф. "Сибири – новые технологии в архитектуре, строительстве и жилищно-коммунальном хозяйстве". Красноярск: КрасГАСА – 2005. Выпуск 8, с. 293–297.
- [6] Тимофеенко, А. В. Выпуклые правильные многогранники, не пересекаемые никакой плоскостью на правильные части / А. В. Тимофеенко // Математические труды, 2008, т. 11, № 1, с. 132–152.
- [7] Тимофеенко, А. В. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями // Чебышевский сб., 2011, том 12, выпуск 2, страницы 118–126.
- [8] Тимофеенко, А. В. Алгебраическое моделирование правильных многогранников / А. В. Тимофеенко // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XIII Междунар. конф., посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. — с. 323–325.

- [9] Отмахова, Е. С. О выпуклых многогранниках с паркетными гранями/  
Е. С. Отмахова // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XIII Междунар. конф., посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н Толстого, 2015. — с. 315–317.
- [10] Ероховец, Н. Ю. Комбинаторика трехмерных флаговых простых многогранников/  
Н. Ю. Ероховец // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XIII Междунар. конф., посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н Толстого, 2015. — с. 291–293.
- [11] GAP - Groups, Algorithms, Programming — a System for Computational Discrete Algebra <http://www.gap-system.org/>

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## 3.1 Группа симметрий КУБа

```
alpha:=[[1,0,0],
        [0,0,-1],
        [0,1, 0]];nu:=[[ER(2)/2,0,-ER(2)/2],
                       [ 0,1, 0],
                       [ER(2)/2,0, ER(2)/2]];
beta:=[[1, 0, 0],
       [0,-1, 0],
       [0, 0,-1]];gamma:=[[1, 0, 0],
                           [0, 1, 0],
                           [0, 0,-1]];
g:=Elements(Group(alpha,nu*beta*nu^-1,gamma));
```

Надеемся, что и без комментариев ясно:  $\alpha$  — поворот вокруг оси абсцисс на прямой угол,  $\nu$  — поворот вокруг оси ординат на  $45^\circ$ ,  $\beta$  — поворот на развернутый угол вокруг оси абсцисс,  $\gamma$  — отражение от координатной плоскости, перпендикулярной оси аппликат. Другими словами, группа куба порождена поворотом на  $90^\circ$  с осью, проходящей через середины граней; разворотом вокруг оси, проходящей через середины ребер и отражением от плоскости перпендикулярной четырем параллельным ребрам куба при условии, что координатные оси выходят из центров его граней.

## 3.2 Группа симметрий ТЕТРАЭДРА

```
s:=ER(2);
m1:=[[1/s, 1/s,0],
     [-1/s,1/s,0],
     [0, 0, 1]]; t:=ER(3);m2:=[[s/t,0,-1/t],
                               [0, 1, 0],
                               [1/t,0, s/t]];
m3:=[[1, 0, 0],
     [0,-1/2,-t/2],
     [0, t/2,-1/2]]; a:=m3^(m2*m1); b:=m3^((m1*m2)^-1);
#Группа повотов тетраэдра g:=Group(a,b); g.name:="g";
```

```
#Print("Для получения группы симметрий тетраэдра
#к порождающим группы вращений надо добавить произведение
#отражения от плоскости xOy и поворота на 1/4 окружности
#вокруг оси Oz, задаваемое матрицей l3");
```

```
l3:=[
[ 1, 0, 0 ],
[ 0, 1, 0 ],
[ 0, 0,-1 ] ]*[ [ 0,-1, 0 ],
                 [ 1, 0, 0 ],
                 [ 0, 0, 1 ] ]; g:=Elements(Group(a,b,l3));
```

### 3.3 Группа симметрий ДОДЕКАЭДРА

```
tau:=(ER(5)-1)/2; t3:=ER(3); my:=[[-1/2, 0,t3/2],
                                   [ 0, 1, 0],
                                   [-t3/2,0,-1/2]];
```

```
si:=tau/t3;co:=1/t3/tau; l:=[[ co,si,0],
                              [-si,co,0],
                              [ 0, 0,1]];
```

```
g:=Group(my^l,my^(l^-1),[[1,0, 0],
                          [0,1, 0],
                          [0,0,-1]]); g:=Elements(g);
```

```
#Print("Порядок группы вращений додекаэдра=",Size(g),"\\n");
```

```
#v:=List(Elements(g));
```

```
#for i in v do PrintArray(i); Print("\\n","\\n");od;
```

```
#Print("Чтобы получить группу симметрий додекаэдра,надо к порождающим","\\n");
```

```
#Print("группы вращений добавить отражение от координатной плоскости","\\n");
```

### 3.4 Гомоморфный образ порядка $m_1 \cdot m_2$ кристаллографической группы $p1$

По расположенной ниже программе составляются линейные комбинации неколлинеарных векторов  $e1$  и  $e2$ , причём коэффициент при  $e1$  выбирается из кольца  $Z_{m_1}$  классов вычетов по модулю  $m_1$ , а при  $e2$  — из кольца  $Z_{m_2}$ . Выбор проективных преобразований для представления параллельных переносов позволяет операцию последовательного выполнения преобразований представлять умножением матриц.

```

m1:=10;m2:=8;
e1:=[v[1][1]+v[2][1],v[1][2]+v[2][2]];
e2:=[v[11][1]+v[12][1],v[11][2]+v[12][2]];
F2 := FreeGroup( "x", "y");
P1 := F2 / [ F2.1^m1, F2.2^m2, F2.1^-1*F2.2^-1*F2.1*F2.2];
x:=P1.1; y:=P1.2;
g:=Elements(P1){[2..m1*m2]};
PrintTo("all","g=","g,");
x:=[[1,0,e1[1]],
    [0,1,e1[2]],
    [0,0, 1]];y:=[[1,0,e2[1]],
                  [0,1,e2[2]],
                  [0,0, 1]];
#IdWord:=[[1,0,0],
#          [0,1,0],
#          [0,0,1]];
Read("all");

```

Комментарий к программе. Свободная группа  $F2$  естественным гомоморфизмом отображается в заданную генетическим кодом абелеву группу  $P1$ , порождающие которой имеют порядки  $m1$  и  $m2$ . Затем в список  $g$  помещаются в виде слов в групповом алфавите  $\{x, y\}$  неединичные элементы группы  $P1$ . На следующем шаге абстрактные буквы  $x, y$  заменяются матрицами, которые задают параллельные переносы, определяемые векторами  $e1$  и  $e2$ . Поэтому при обращении к списку  $g$  каждый его элемент требует умножения матриц  $x, y$  или обратных к ним. В итоге  $g$  состоит из матриц проективных преобразований.

### 3.5 Таблицы построенных многогранников

Содержит сведения о количестве 3-, 5- и 6-угольных граней с единичными ребрами, их обозначения: 3,5,6 соответственно; о количестве правильных 3- и 5-угольных со сторонами длины два, их обозначения  ${}^25$ ,  ${}^23$ ; а также о количестве неромбических параллелограммов  $[3, 3, 6, 6]$ , каждый из которых составлен из четырех треугольников с единичными сторонами; трапеций  $[3, 6, 3, 6]$  каждая из которых составлена из трех треугольников с единичными сторонами; количестве неправильных пятиугольников  $[3, 6^4]$ , каждый из которых составлен из треугольника 3 и шестиугольника 6. Каждому многограннику отводится две строчки, при чем в первой находятся сведения о количестве истинных граней, а во второй строке мы считаем правильные многоугольники с единичными сторонами, которые могут быть либо гранями, либо одной из составных частей грани.

Таблица 1: 2-составные многогранники  $Q_{2,j}$

тело/ $Q_{i,j}$	3	5	${}^25$	6	${}^23$	$[3, 3, 6, 6]$	$[3, 6, 3, 6]$	$[3, 6^4]$
$M_3 + M_3$	10							
2, 1	10							
$M_3 + M_{3a}$			1		5			
2, 2			1		5			
$M_3 + M_{19a}$		9	2	7		8	2	3
2, 3	35	9	2	10				
$M_3 + M_{19b}$		8	3	2		13	2	3
2, 4	50	8	3	5				
$M_3 + M'_{19b}$		8	3	4		11	4	1
2, 5	50	8	3	5				
$M_3 + M''_{19b}$		8	3	4		11	4	1
2, 6	50	8	3	5				
$M_{3a} + M_{3a}$		2				10		
2, 7	30	2						
$M_{3a} + M_{19a}$		11	1	15		5		
2, 8	15	11	1	15				
$M_{3a} + M_{19b}$		10	2	10		10		
2, 9	30	10	2	10				

Таблица 2: 3-составные многогранники  $Q_{3,j}$

тело/ $Q_{i,j}$	3	5	$2^5$	6	$2^3$	[3, 3, 6, 6]	[3, 6, 3, 6]	[3, 6 <sup>4</sup> ]
$Q_{2,2} + M_{3a}$		1			5	5		
3, 1	15	1			5			
$Q_{2,2} + M_{19a}$		10	1	10		5		5
3, 2	20	10	1	15				
$Q_{2,2} + M_{19b}$		9	2	5		10		5
3, 3	35	9	2	5				
$Q_{2,3} + M_3$		8	2	4		6	4	6
3, 4	40	8	2	10				
$Q_{2,3} + M'_3$		8	2	4		6	4	6
3, 5	40	8	2	10				
$Q_{2,3} + M''_3$		8	2	4		6	4	6
3, 6	40	8	2	10				
$Q_{2,3} + M_{3a}$		10	1	10		5		5
3, 7	20	10	1	15				
$Q_{2,3} + M'_{3a}$		10	1	12		3	2	3
3, 8	20	10	1	15				
$Q_{2,4} + M_3$		7	3	1		9	6	4
3, 9	55	7	3	5				
$Q_{2,4} + M'_3$		7	3	1		9	6	4
3, 10	55	7	3	5				
$Q_{2,4} + M''_3$		7	3	1		9	6	4
3, 11	55	7	3	5				
$Q_{2,4} + M_{3a}$		9	2	7		8	2	3
3, 12	35	9	2	10				
$Q_{2,5} + M_3$		7	3	3		7	8	2
3, 13	55	7	3	5				
$Q_{2,5} + M'_3$		7	3	3		7	8	2
3, 14	55	7	3	5				

тело/ $Q_{i,j}$	3	5	$2^5$	6	$2^3$	$[3, 3, 6, 6]$	$[3, 6, 3, 6]$	$[3, 6^4]$
$Q_{2,5} + M_{3a}$		9	2	7		8	2	3
3, 15	35	9	2	10				
$Q_{2,5} + M'_{3a}$		9	2	9		6	4	1
3, 16	35	9	2	10				
$Q_{2,8} + M_3$		10	1	10		5		5
3, 17	20	10	1	15				
$Q_{2,8} + M_{3a}$		12		20				
3, 18		12		20				

Таблица 3: 4-составные многогранники  $Q_{4,j}$

тело/ $Q_{i,j}$	3	5	$2^5$	6	$2^3$	$[3, 3, 6, 6]$	$[3, 6, 3, 6]$	$[3, 6^4]$
$Q_{3,1} + M_3$					10			
4, 1					10			
$Q_{3,2} + M_3$		9	1	6		3	2	8
4, 2	25	9	1	14				
4, 3	5	11		20				
$Q_{3,3} + M_3$		8	2	2		8	2	8
4, 4	40	8	2	10				
$Q_{3,3} + M'_3$		8	2	4		6	4	6
4, 5	40	8	2	10				

тело/ $Q_{i,j}$	3	5	$^25$	6	$^23$	$[3, 3, 6, 6]$	$[3, 6, 3, 6]$	$[3, 6^4]$
$Q_{3,3} + M_3''$		8	2	4		6	4	6
4, 6	40	8	2	10				
$Q_{3,4} + M_3$		7	2	1		4	6	9
4, 7	47	7	2	10				
$Q_{3,4} + M_{3a}$		9	1	7		3	2	8
4, 8	25	9	1	15				
$Q_{3,5} + M_{3a}$		9	1	5		5		10
4, 9	25	9	1	15				
$Q_{3,5} + M_{3a}'$		9	1	9		1	4	6
4, 10	25	9	1	15				
$Q_{3,6} + M_{3a}$		9	1	7		3	2	8
4, 11	25	9	1	15				
$Q_{3,9} + M_3$		6	3			5	10	5
4, 12	60	6	3	5				
$Q_{3,9} + M_{3a}$		8	2	4		6	4	6
4, 13	40	8	2	10				
$Q_{3,9} + M_{3a}'$		8	2	4		6	4	6
4, 14	40	8	2	10				
$Q_{3,10} + M_{3a}$		8	2	4		6	4	6
4, 15	40	8	2	10				

тело/ $Q_{i,j}$	3	5	$^25$	6	$^23$	$[3, 3, 6, 6]$	$[3, 6, 3, 6]$	$[3, 6^4]$
$Q_{3,11} + M_{3a}$		8	2	6		4	6	4
4, 16	40	8	2	10				
$Q_{3,11} + M'_{3a}$		8	2	4		6	4	6
4, 17	40	8	2	10				
$Q_{3,11} + M''_{3a}$		8	2	2		8	2	8
4, 18	40	8	2	10				
$Q_{3,13} + M_3$		6	3	2		3	12	2
4, 19	59	6	3	4				
$Q_{3,13} + M'_3$		6	3	2		3	12	3
4, 20	60	6	3	5				
$Q_{3,13} + M_{3a}$		8	2	6		4	6	4
4, 21	40	8	2	10				
$Q_{3,13} + M'_{3a}$		8	2	6		6	4	6
4, 22	40	8	2	12				
$Q_{3,14} + M_3$		6	3			5	10	5
4, 23	60	6	3	5				

Таблица 4: 5-составные многогранники  $Q_{5,j}$

тело/ $Q_{i,j}$	3	5	$2^5$	6	$2^3$	$[3, 3, 6, 6]$	$[3, 6, 3, 6]$	$[3, 6^4]$
$Q_{4,2} + M_3$		8	1	3		1	4	11
5, 1	30	8	1	14				
$Q_{4,2} + M_{3a}$		10		10				10
5, 2	10	10		20				
$Q_{4,3} + M_3$		10		8				10
5, 3	10	10		18				
$Q_{4,3} + M_3$		10		8				10
5, 3	10	10		18				
$Q_{4,4} + M_3$		7	2	1		4	6	9
5, 4	45	7	2	20				
$Q_{4,7} + M_{3a}$		8	1	4		1	4	11
5, 5	28	8	1	15				
$Q_{4,7} + M'_{3a}$		8	1	2		3	2	13
5, 6	30	8	1	15				
$Q_{4,12} + M_{3a}$		7	2	3		2	8	13
5, 7	45	7	2	10				
$Q_{4,12} + M'_{3a}$		7	2	1		4	6	9
5, 8	45	7	2	10				
$Q_{4,19} + M_{3a}$		7	2	3		2	8	7
5, 9	45	7	2	10				

Таблица 5: 6-составной многогранник  $Q_{6,j}$

тело/ $Q_{i,j}$	3	5	$2^5$	6	$2^3$	$[3, 3, 6, 6]$	$[3, 6, 3, 6]$	$[3, 6^4]$
$Q_{5,1} + M_{3a}$		8		4				15
6, 1	15	8		19				