

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ РАССМАТРИВАЕМЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ (ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ГРАФЫ, ДЕРЕВЬЯ)	6
§1.1. Теория случайных графов	6
§1.1.1. Модель Эрдеша-Реньи	8
§1.1.2. Подграфы.....	11
§1.1.3. Эволюция графов.....	15
§1.2. Теория протекания	17
§1.2.1. Ключевые величины в теории протекания	17
§1.2.2. Протекание в дереве Кэли	20
§1.2.3. Масштабирование в критических областях.....	22
§1.2.4. Бесконечномерное протекание	23
§1.2.5. Параллели между теорией случайных графов и протеканием	24
§1.3. Цепи Маркова	26
§1.3.1. Конечные стохастические процессы.	26
§1.3.2. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем.....	28
ГЛАВА II. ОРИГИНАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	34
§2.1. Разработка математической модели.	34
§2.2. Организация моделирования.....	39
§2.3. Переходный характер траекторий	41
§2.4. Результаты исследования	41
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	50
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	51
ПРИЛОЖЕНИЕ	53

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и новизна

Каждый, кто когда-либо проходил полномасштабное медицинское обследование, наверняка был свидетелем того, как обнаруживаемые проблемы множатся, количество направлений ко все новым специалистам растет, и принципиальная возможность поставить какую-нибудь точку в обследовании начинает представляться туманной. (Рис 1)

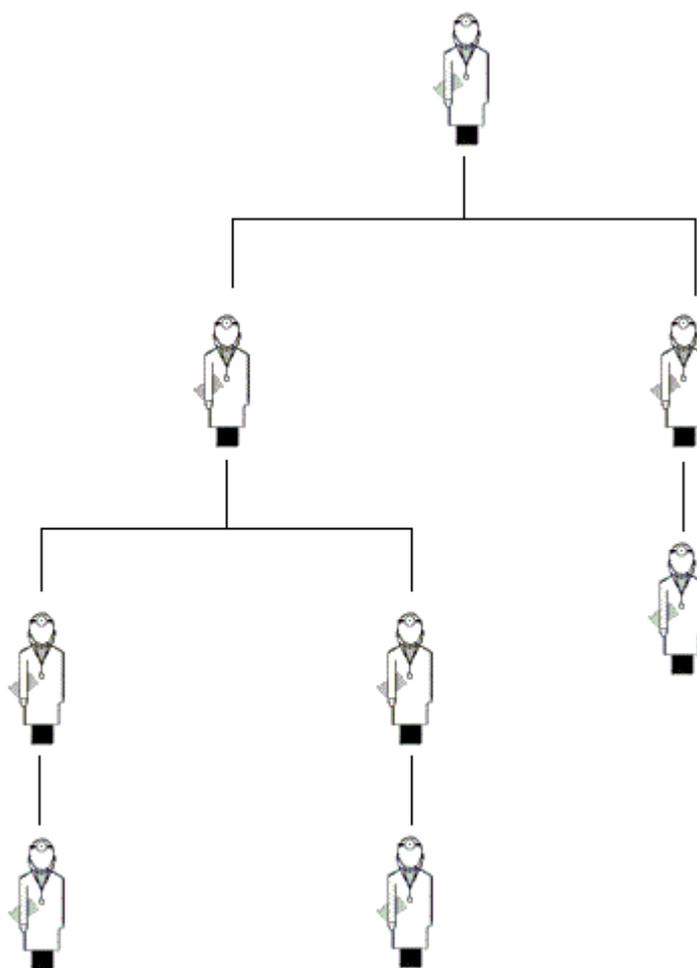


Рис. 1 Путь пациента по врачам при медицинском осмотре

На этот счет у медиков есть такая узкокорпоративная шутка: «Не бывает здоровых людей, есть недообследованные». Шутка, открывающая возможность некоторым нечистым на руку коммерческим мед учреждениям развивать свою

деятельность до бесконечности. Нас заинтересовал этот вопрос с точки зрения связи вероятностных характеристик распределения количества направлений, выдаваемых каждым новым специалистом, и принципиальной возможности достижения цели пациентом, то есть окончания этого медицинского квеста. С математической точки зрения траектория пациента развивается как дерево, количество ветвей которого в каждой точке (количество направлений) является величиной случайной. Ясно, что если мат.ожидание числа направлений – величина порядка единицы или меньше, то это путешествие имеет шансы быть конечным. Если среднее число направлений приближается к 2, или распределение вероятностей числа направлений имеет большую дисперсию, то, очевидно, общее количество направлений (ветвей) устремится к бесконечности экспоненциально. Таким образом, в зависимости от основных параметров распределения вероятностей (мат.ожидания и дисперсии) цель может быть достигнута или нет, квест будет конечной или бесконечной длины. На фазовой диаграмме мат.ожидание – нормальное отклонение мы ожидаем существование области вблизи небольших значений указанных параметров, в которой существуют конечные квесты. В данной работе мы ставим своей целью установить наличие этой области и определить ее границу.

С математической точки зрения, возникающие структуры типа деревьев представляют собой стохастические графы.

Объект исследования: ациклические связные графы (деревья) с числом ветвей, задаваемым вероятностным законом распределения.

Предмет исследования: область существования деревьев конечной высоты на диаграмме типа «мат.ожидание – среднеквадратичное отклонение» с дискретным законом распределения числа ветвей гауссового вида.

Гипотеза: вероятность возникновения бесконечных квестов имеет переходный характер, тем самым в системе должен наблюдаться фазовый переход по параметрам вероятностного распределения от конечных к бесконечным квестам.

Цель: установить возможность конечных квестов и определить

соответствующую область параметров (границу области).

Задачи:

1. Разработать математическую модель для описания процесса «блуждания» по медицинской траектории во время обследования.
2. Разработать программу для моделирования указанного процесса и расчета его количественных характеристик.
3. Установить области параметров распределения, при которых возникают конечные и бесконечные квесты, количественно характеризовать границу этой области.
4. Соотнести рассматриваемую проблему с существующими теоретическими разделами математики; изучить соответствующую литературу.

Методы исследования: компьютерное моделирование в среде Delphi.

Структура работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, содержащих обзор литературы и результаты исследования, заключения, списка литературы и приложений.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ РАССМАТРИВАЕМЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ (ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ГРАФЫ, ДЕРЕВЬЯ)

§1.1. Теория случайных графов

В математических терминах сеть может быть представлена как граф. Граф – пара множеств $G = \{P, E\}$, где P – множество N узлов (вершин или точек) P_1, P_2, \dots, P_N , а E – множество ребер (соединений или линий), которые соединяют два элемента из P .

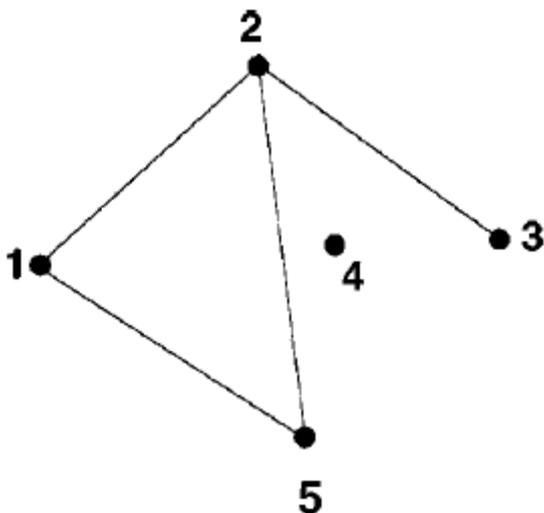


Рис. 2. Иллюстрация графа с $N = 5$ вершинами и $n = 4$ ребрами.

Графы обычно представляются как множество точек, которые называют вершинами. Две вершины соединены линией, если между ними существует некая родственная связь (см. рис. 2).

Деревом с корнем (или корневым деревом) называется дерево (граф), в котором выделена некоторая вершина, называемая корнем. Любая вершина дерева соединяется с корнем единственным путем. Поскольку в состав любого из таких путей входит единственное ребро, назовем высотой вершины

количество ребер, образующих соответствующий путь, уменьшенное на единицу. Известно (см. [25]) что множество T_n всех плоских деревьев с висячим корнем и n некорневыми непомеченными вершинами содержит C_{2n-2}^{n-1}/n элементов.

Плоским корневым деревом называется корневое дерево, которое можно изобразить на плоскости. Два таких дерева называются изоморфными, если одно из них может быть преобразовано в другое непрерывными движениями в плоскости. Если корневая вершина плоского дерева имеет только одно ребро, такая вершина называется одновалентной корневой вершиной. Граф, состоящий из одного ребра, называется тривиальным плоским деревом с висячим корнем.

Кузьмин О.В. дает такое определение: «Обозначим через P множество всех плоских деревьев с висячим корнем. Пусть тривиальное дерево uv_0 (рисунок 3) имеет корень в вершине u . И пусть $t_1, \dots, t_k \in P$ ($k \geq 1$) – имеют корнями вершины v_1, \dots, v_k соответственно. Тогда строим дерево следующим образом: вершины v_1, \dots, v_k отождествляем, и эту вершину обозначаем v , а корнем полученного дерева объявляется вершина u ; при этом деревья t_1, \dots, t_k, uv_0 располагаем на плоскости по часовой стрелке вокруг вершины v в указанном порядке и t_j называем j -й ветвью дерева t . Набор (t_1, \dots, t_k) называется списком ветвей дерева t и обозначается $\Lambda(t)$ ». [21 с.190-191]

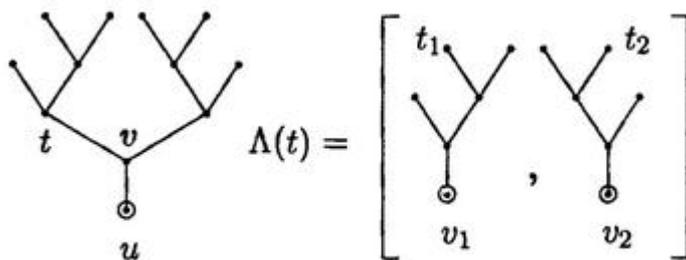


Рис. 3 Плоское дерево с висячим корнем и его ветви

Теория графов возникла в восемнадцатом веке в работе Леонарда Эйлера, чья ранняя работа в основном касалась маленьких графов с высокой степенью регулярности. В двадцатом веке теория графов стала более статистической и алгоритмической. Особенно интересная теория случайных графов, т. е. графов, в которых вершины и связи между ними распределены случайным образом.

Основы теории случайных графов заложены Полом Эрдешом и Альфредом Реньи [10,11]. Детальное обсуждение данной области доступно в классической книге Боллобаша [3], а также в путеводителе истории подхода Эрдеша и Реньи, написанным Каронским и Русинским [15]. Далее мы кратко описываем важнейшие результаты теории графов.

§1.1.1. Модель Эрдеша-Реньи

В своей первой классической статье о случайных графах Эрдеш – Реньи определяют граф как N помеченных узлов, соединенных n ребрами, которые выбраны случайным образом из $\frac{N(N-1)}{2}$ возможных ребер [9]. В общем существует $C_{[N(N-1)/2]}^n$ графов с N вершинами и n ребрами, которые формируют вероятностное пространство, в котором каждая реализация равновероятна.

Альтернативным и эквивалентным определением случайного графа является биномиальная модель. Здесь в начале имеется N вершин. Каждая пара вершин соединяется с вероятностью p (см. рисунок 4). Следовательно, общее количество ребер – случайная величина с ожидаемым значением $E(n) = p \left[\frac{N(N-1)}{2} \right]$. Если G_0 – граф с вершинами P_1, P_2, \dots, P_N и с n ребрами, то вероятность получения этого графа в процессе построения есть

$$P(G_0) = p^n (1 - p)^{\frac{N(N-1)}{2} - n}$$

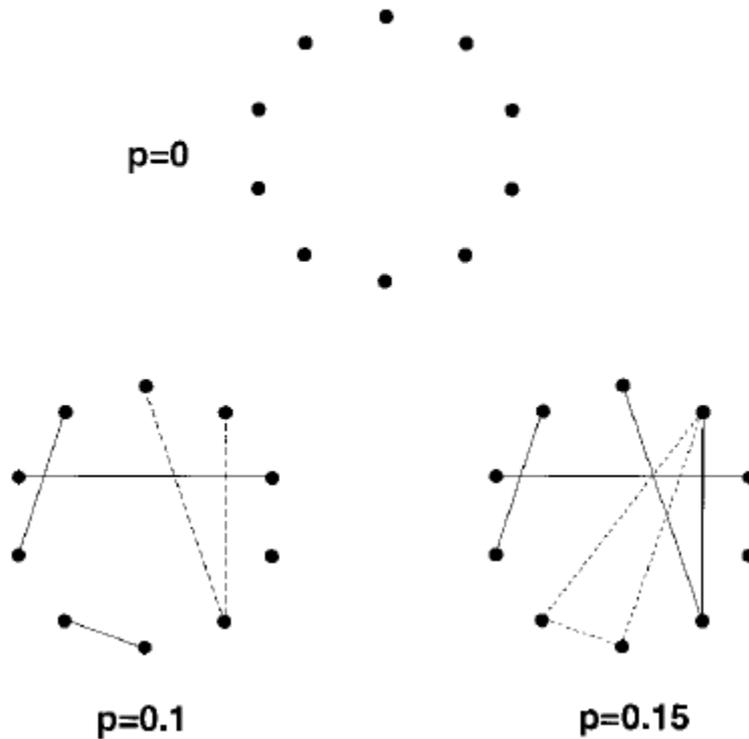


Рис. 4. Иллюстрация процесса изменения графа в модели Эрдеша – Реньи. В начале имеем $N = 10$ отдельных вершин (верхняя часть рисунка), затем каждая пара вершин соединяется с вероятностью p . Нижняя часть рисунка показывает два различных этапа формирования графа, соответствующих значениям $p = 0,1$ и $p = 0,15$. Мы можем увидеть появление деревьев (дерево порядка 3, нарисованное длинными пунктирными линиями) и циклов (цикл порядка 3, нарисованный короткими пунктирными линиями).

В математической литературе конструирование случайного графа часто называется эволюцией: вначале, имея множество из N отдельных вершин, граф развивается с последовательным добавлением случайных ребер. Графы, полученные на разных этапах этого процесса, соответствуют все большим и большим вероятностям соединения p , и наконец, при $p \rightarrow 1$, получается полный граф.

Однако не все узлы в графе имеют то же самое число ребер (степень узла). Разброс степеней узлов характеризуется функцией распределения $P(k)$, которая дает вероятность того, что случайно выбранный узел имеет ровно k

ребер. Т. к. в случайном графе ребра распределяются случайным образом, большинство узлов имеет приблизительно ту же степень, которая близка к средней для всей сети степени $\langle k \rangle$. Распределение степеней случайного графа является распределением Пуассона с пиком $P(\langle k \rangle)$. Одним из самых интересных развитий нашего понимания сложных графов является открытие того, что для доминирующей части больших графов распределение степеней значительно отстает от пуассоновского.

Основной целью теории случайных графов является выяснение, при какой вероятности соединения p некоторое фиксированное свойство скорее всего появится. Самым большим открытием Эрдеша и Реньи было то, что многие важные свойства случайных графов появляются довольно неожиданно. Т. е. при заданной вероятности либо почти все графы обладают некоторым свойством Q (например, все пары вершин соединены путем из последовательных ребер), либо наоборот почти все графы этим свойством не обладают. Переход между тем, что свойство скорее всего будет или не будет выполняться, обычно происходит очень быстро. Для многих таких свойств есть критическая вероятность $p_c(N)$. Если $p(N)$ растет медленней чем $p_c(N)$ при $N \rightarrow \infty$, то почти каждый граф с вероятностью соединения $p(N)$ не будет обладать свойством Q . Если же $p(N)$ растет слегка быстрее чем $p_c(N)$, то почти каждый граф будет обладать свойством Q . Таким образом, вероятность того, что граф с N вершинами и с вероятностью соединения $p = p(N)$ имеет свойство Q , удовлетворяет следующей системе:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,p}(Q) = \begin{cases} 0, & \text{if } \frac{p(N)}{p_c(N)} \rightarrow 0 \\ 1, & \text{if } \frac{p(N)}{p_c(N)} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь уместно важное замечание. В физике параметр $p_c(N)$ понимают как критическую вероятность, знакомую в протекании. Значение p_c , т. е. предел $p_c = p_c (N \rightarrow \infty)$ получается с помощью конечного масштабного преобразования. Базисом данного действия является предположение, что предел существует, отражая тот факт, что, в конечном счете, предел протекания не зависит от размера системы. В основном это случай конечномерных систем, который включает большинство систем теории протекания и критических явлений. Сети же по определению являются бесконечномерными: количество возможных соседей узла возрастает вместе с размером системы.

Средняя степень графа

$$\langle k \rangle = \frac{2n}{N} = p(N - 1) \simeq pN \quad (2)$$

имеет критическое значение, независимое от размера системы. В следующей части мы проиллюстрируем эти идеи, рассматривая появление различных подграфов в случайных графах.

§1.1.2. Подграфы

Первым свойством случайных графов, изученным Эрдешом и Реньи [9], было появление подграфов. Граф G_1 , состоящий из P_1 вершин и множества ребер E_1 , является подграфом графа $G = \{P, E\}$, если все вершины в P_1 содержатся также и в P и все ребра из E_1 являются также ребрами из E . Самыми простыми примерами подграфов являются циклы, деревья и полные подграфы (клики) (см. рисунок 3). Цикл порядка k – это замкнутая петля из k ребер такой, что каждая пара последовательных ребер, и только она, имеет общую вершину. Таким образом, графически треугольник – цикл порядка 3, а квадрат – порядка 4. Средняя степень цикла равняется двум, т.к. у каждой вершины есть два ребра. Противоположностью к циклам являются деревья.

Более точно, граф является деревом порядка k , если он имеет k вершин и $k - 1$ ребер, и ни один из его подграфов не является циклом. Средняя степень дерева порядка k есть $\langle k \rangle = 2 - \frac{2}{k}$, что приближается к 2 для больших k . Полные подграфы (клики) порядка k содержат k вершин и все возможные $\frac{k(k-1)}{2}$ ребер, другими словами, они полностью связаны.

Рассмотрим процесс эволюции, описанный на рисунке 5 для графа $G = G_{N,p}$.

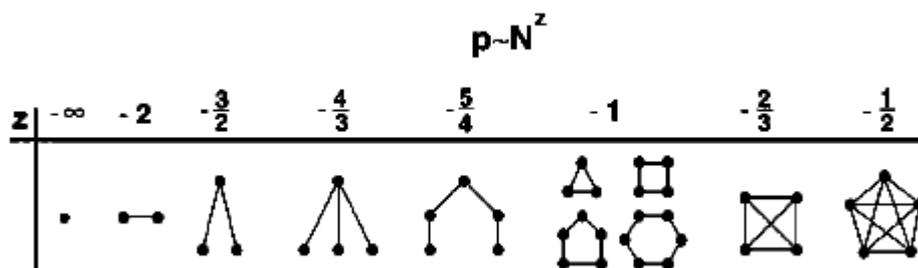


Рисунок 5. Предельные вероятности, при которых в случайных графах появляются различные подграфы. При $pN^{3/2} \rightarrow 0$ граф состоит из отдельных вершин и ребер. При $p \sim N^{-3/2}$ появляются деревья порядка 3, а при $p \sim N^{-4/3}$ – порядка 4. При $p \sim N^{-1}$

присутствуют деревья всех порядков, в то же время появляются циклы всех порядков.

Вероятность $p \sim N^{-2/3}$ отмечает появление полных подграфов порядка 4, а $p \sim N^{-1/2}$ соответствует наличию кликов порядка 5. При приближении z к нулю граф содержит полные подграфы увеличивающегося порядка.

В начале имеем N отдельных вершин, потом соединяем каждую пару вершин с вероятностью p . Для маленьких вероятностей соединения вершины изолированы, но с ростом p и количества ребер вместе с ним, два ребра могут быть соединены с одной и той же вершиной, формируя деревья порядка 3. В общем случае мы можем предположить наличие критической вероятности, которая отмечает наличие произвольных подграфов с k вершинами и l ребрами.

В теории случайных графов есть строго доказанный ответ на это предположение [3]. Пусть имеем случайный граф $G = G_{N,p}$. Пусть также имеем маленький граф F с k вершинами и l ребрами. В принципе, случайный граф G может содержать несколько таких подграфов F . Наша первая цель – определить, сколько таких подграфов существует. Вершины k могут быть выбраны из всех N вершин C_N^k способами, а l ребра формируются с вероятностью p^l . Вдобавок, мы можем переставлять эти k вершин и получить $k!$ новых графов (точное значение есть $\frac{k!}{a}$, где a – количество изоморфных графов). Таким образом, количество подграфов F , содержащихся в G , есть

$$E(X) = C_N^k \frac{k!}{a} p^l \simeq \frac{N^k p^l}{a} \quad (3)$$

Данная запись подсказывает о том, что фактическое количество таких подграфов, X , может отличаться от $E(X)$, но в большинстве случаев эти числа будут близки. Заметим, что подграфы не обязаны быть изолированными, т.е. могут существовать ребра с одной вершиной внутри подграфа и с другой – снаружи.

Равенство (3) показывает, что если $p(N)$ такое что $p(N)N^{k/l} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то количество подграфов $E(X) \rightarrow 0$, т.е. почти ни один случайный граф не содержит подграф F . Тем не менее, если $p(N) = N^{-k/l}$, то среднее количество подграфов – конечное число, которое обозначается через $\lambda = c^l/a$, отмечая, что эта функция может быть критической вероятностью. Достоверность данного результата может быть проверена вычислением распределения количеств подграфов, $P_p(X = r)$, получая [3]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_p(X = r) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} \quad (4)$$

Такие модели графов имеют экспоненциальный хвост, и носят название случайных или экспоненциальных [10,1]. При чем, функциональная форма $P(k)$ отступает от Пуассоновского распределения, ожидаемого для случайного графа.

Тогда вероятность того, что G содержит хотя бы один такой подграф F , равняется

$$P_p(G \supset F) = \sum_{r=1}^{\infty} P_p(X = r) = 1 - e^{-\lambda} \quad (5)$$

что стремится к 1 с увеличением c . Для значений p , удовлетворяющих $pN^{k/l} \rightarrow \infty$, вероятность $P_p(G \supset F)$ стремится к 1. Итак, действительно, критическая вероятность, при которой каждый граф содержит подграф с k вершинами и l ребрами есть $p_c(N) = cN^{-k/l}$.

Отметим несколько важных особых случаев:

(a) Критическая вероятность наличия дерева порядка k есть $p_c(N) = cN^{-k/(k-1)}$.

(b) Критическая вероятность наличия цикла порядка k есть $p_c(N) = cN^{-1}$.

(c) Критическая вероятность наличия клики порядка k есть $p_c(N) = cN^{-2/(k-1)}$.

§1.1.3. Эволюция графов

Пусть имеется случайный граф с N вершинами. Допустим, вероятность соединения $p(N)$ меняется как N^z , где z – перестраиваемый параметр, который может принимать значения между 0 и ∞ . Для значений z , меньших, чем $-\frac{3}{2}$ почти все графы содержат изолированные вершины и ребра. Когда z начинает превосходить $-\frac{3}{2}$, неожиданно начинают появляться деревья порядка 3. Когда z достигает значения $-\frac{4}{3}$, появляются деревья порядка 4, и, по мере того как z приближается к -1 , граф содержит деревья большего и большего порядка. Тем не менее, пока $z < -1$ такой, что средняя степень графа $\langle k \rangle = pN \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, граф представляет из себя объединение несвязанных деревьев, а циклы отсутствуют. В точности, когда z перешагивает значение -1 , что соответствует $\langle k \rangle = \text{const}$, не смотря на то, что z равномерно меняется, асимптотическая вероятность наличия циклов всех порядков прыгает от 0 к 1. Циклы порядка 3 могут также быть рассмотрены как клики того же порядка.

Дальнейшие результаты могут быть получены для $z = -1$, т.е. когда имеем $p \propto N^{-1}$ и средняя степень узлов $\langle k \rangle = \text{const}$. Для $p \propto N^{-1}$ случайный граф содержит циклы и деревья всех порядков, однако до сих пор мы не обсуждали размер и структуру типичной составляющей графа. Образующая графа по определению есть связный изолированный подграф, который в исследованиях сетей и теории протекания также называется кластером. Как показывают Эрдеш и Реньи [10], в структуре кластера случайного графа есть неожиданное изменение, когда $\langle k \rangle$ приближается к 1.

Если $0 < \langle k \rangle < 1$, то все кластеры почти наверняка являются деревьями или содержат ровно один цикл. Несмотря на наличие циклов, почти все вершины принадлежат деревьям. Среднее количество кластеров есть число порядка $N - n$, где n – количество ребер, т.е. при добавлении нового ребра количество кластеров уменьшается на 1. Самый большой кластер является деревом, размер которого пропорционален $\ln N$.

Когда $\langle k \rangle$ перешагивает предел $\langle k \rangle_c = 1$, структура графа неожиданно изменяется. В то время как для $\langle k \rangle < 1$ самый большой кластер является деревом, для $\langle k \rangle_c = 1$ он имеет приблизительно $N^{2/3}$ вершин и довольно сложную структуру. Более того, для $\langle k \rangle > 1$ самый большой (гигантский) кластер имеет $[1 - f(\langle k \rangle)]N$ вершин, где $f(x)$ – функция, которая экспоненциально уменьшается от $f(1) = 1$ к 0 при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, конечная часть вершин, $S = 1 - f(\langle k \rangle)$ принадлежит самому большому кластеру. Кроме этого гигантского кластера, все остальные кластеры относительно невелики, большинство из них являются деревьями, а общее количество вершин, принадлежащих деревьям, есть $N \langle k \rangle$. С увеличением $\langle k \rangle$ маленькие кластеры сливаются и соединяются к гигантскому кластеру, причем, чем меньше кластер, тем больше вероятность того, что он не соединится.

Таким образом, при $p_c \simeq \frac{1}{N}$ топология случайного графа внезапно изменяется от множества отдельных маленьких кластеров к системе с одним доминирующим гигантским кластером. Начало сверхкритической фазы было исследовано Боллобасом [2], Колчином [16] и Лукзаком [17]. Достигнутые ими результаты показывают, что в это время самый большой кластер явно отделяется от остальных кластеров, а его размер S увеличивается пропорционально разделению критической вероятности,

$$S \propto (p - p_c) \quad (69)$$

Как мы увидим далее, эта зависимость аналогична вероятности протекания в бесконечномерной решетке.

§1.2. Теория протекания

Одним из самых интересных открытий в теории случайных графов является существование критической вероятности, при которой формируется гигантский кластер. Другими словами, теория отмечает существование критической вероятности p_c такой, что до p_c граф состоит из изолированных кластеров, а после p_c гигантский кластер охватывает весь граф. Это явление заметно похоже на перколяционный переход [20, 6, 4, 5]. И в самом деле, перколяционный переход и появление гигантского кластера – это одно и то же явление, выраженное на разных языках. Теория протекания, тем не менее, прямо не воспроизводит предсказание в теории случайных графов. Рассматривая проблемы с другой точки зрения, она обращается к нескольким ключевым вопросам понимания реальных сетей, которые, однако, не обсуждаются в теории случайных графов. Следовательно, важно рассмотреть предсказания теории протекания, значимые для графов, т.к. они – ключевые для понимания важных аспектов топологии графов.

§1.2.1. Ключевые величины в теории протекания

Рассмотрим регулярную 2-мерную сеть, ребра которой имеют вероятность присутствия p и отсутствия $1 - p$. Теория протекания изучает возникновение путей, которые проходят сквозь граф (начинаясь в одной стороне и кончаясь в противоположной). Для маленьких значений p присутствует только несколько ребер, поэтому могут формироваться только маленькие кластеры вершин, соединенных ребрами, а при критической вероятности p_c , называемой пределом перколяции, появляется перколяционный

кластер вершин, соединенных ребрами (см. рисунок 6). Этот кластер также называется бесконечным кластером, т.к. его размер расходится с увеличением размера сети. Есть несколько хорошо изученных версий перколяции. Представленная выше версия называется «связной перколяцией».

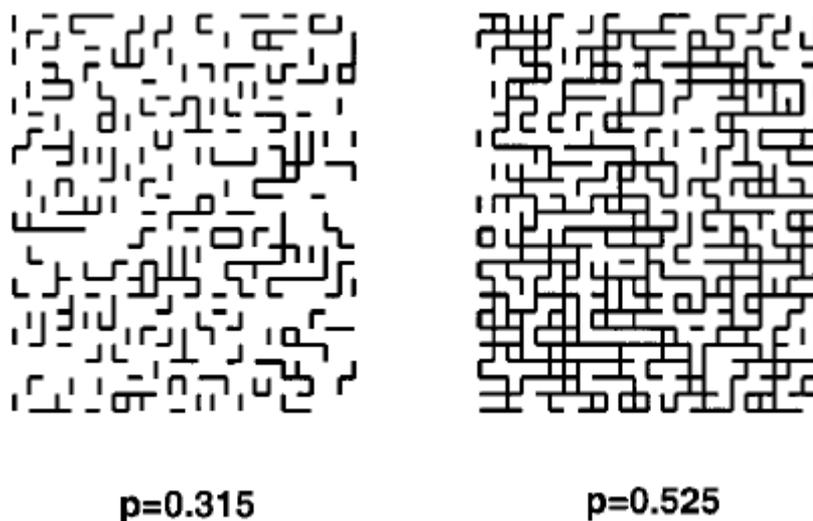


Рисунок 6. Двумерная иллюстрация связной перколяции. Узлы размешены в сетке 25×25 , два узла соединяются с вероятностью p . Для $p = 0,315$ (слева), что ниже предела перколяции $p_c = 0,5$, соединенные узлы формируют изолированные кластеры. Для $p = 0,525$ (справа), что выше предела перколяции, появляется самый большой кластер.

Самой известной альтернативой является позиционная перколяция, в которой все связи присутствуют, а узлы сети не являются изолированными с вероятностью p . Также, как и для связной перколяции, только для маленьких значений p существуют конечные кластеры связанных ребер, а для $p > p_c$ появляется бесконечный кластер.

Вероятность перколяции P в теории протекания – это вероятность того, что заданный узел принадлежит бесконечному кластеру.

Многие результаты в теории протекания могут быть обобщены для бесконечных измерений. Следовательно, результаты, полученные в контексте протекания, распространяются также и на случайные графы.

Когда $p < p_c$ (субкритическая фаза), в системе присутствуют только маленькие кластеры соединенных ребер. В этом случае актуален вопрос: какова вероятность существования пути $x \leftrightarrow y$, соединяющей две случайно выбранные вершины x и y ? Первый результат такого рода был достигнут Хаммерслейем [13]. Он показал, что вероятность соединения пути из центра куба в начале координат с длиной стороны $2r$ к его поверхности затухает экспоненциально. Мы можем определить длину корреляции ξ как характеристическую длину экспоненциального затухания

$$P_p \sim e^{-r/\xi} \quad (6)$$

Равенство (6) показывает, что радиус конечных кластеров в субкритической части имеет экспоненциально убывающий хвост, а корреляционная длина представляет средний радиус конечного кластера. Было показано [12], что ξ равен 0 при $p = 0$ и стремится к бесконечности при $p \rightarrow p_c$.

Экспоненциальное убывание радиусов кластеров предполагает, что вероятность того, что кластер имеет размер s , $P_p(|C| = s)$, также убывает экспоненциально для больших значений s :

$$P_p(|C| = s) \sim e^{-\alpha(p)s} \text{ при } s \rightarrow \infty, \quad (7)$$

Где $\alpha(p) \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow 0$ и $\alpha(p_c) = 0$.

В сверхкритической фазе ($p > p_c$) для $P > 0$ существует точно один бесконечный кластер.

Распределение размеров кластера экспоненциально убывает как и в субкритической фазе.

§1.2.2. Протекание в дереве Кэли

Дерево Кэли не содержит циклы (см. рисунок 7), в котором каждая вершина имеет z соседей, за исключением вершин на поверхности. В то время как поверхность и объем регулярного d -мерного объекта подчиняется масштабному соотношению поверхность \propto объему в степени $1 - \frac{1}{d}$ и только в пределе $d \rightarrow \infty$ поверхность пропорциональна объему, для дерева Кэли количество вершин на поверхности пропорционально общему количеству вершин (т.е. объему дерева).

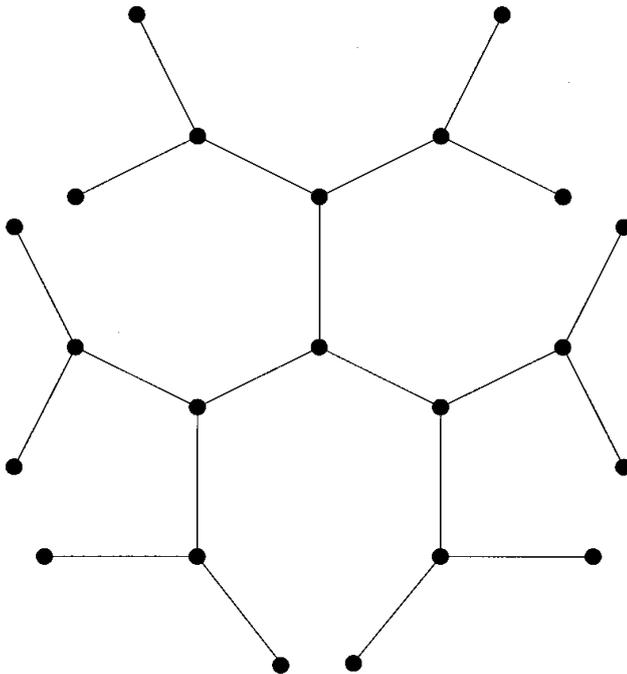


Рисунок 7. Образец дерева Кэли с координационным числом $z = 3$. Все

вершины имеют три ребра, кроме вершин на поверхности, которые имеют только одно ребро. Соотношение между количеством вершин на поверхности и общим количеством вершин приближается к константе, $(z - 2)/(z - 1)$, свойство, которое справедливо только для бесконечномерных объектов. Средняя степень приближается к $\langle k \rangle = 2$, когда размер дерева стремится к бесконечности.

Таким образом, в этом отношении дерево Кэли представляет собой бесконечномерный объект. Еще одним аргументом в пользу

бесконечномерности дерева Кэли является то, что в нем нет циклов. Отсюда, несмотря на его регулярную топологию, дерево Кэли представляет имеющее смысл приближение к топологии случайных графов в субкритической фазе, где все кластеры являются деревьями. Это неверно в сверхкритической фазе, т.к. при критической вероятности $p_c(N)$ в графе появляются циклы всех порядков.

Для исследования протекания в дереве Кэли мы предполагаем, что каждое ребро присутствует с вероятностью p . Основные величины, представляющие интерес для данной системы:

- а. *Предел протекания*: Присутствие хотя бы одного из $z - 1$ возможных ребер из вершины (т.е. $(z - 1)p \geq 1$) является условием существования бесконечного пути от начала. Отсюда, предел протекания равен:

$$p_c = \frac{1}{z - 1}. \quad (8)$$

- б. *Вероятность протекания*: Для дерева Кэли с $z = 3$, для которого $p_c = 1/2$ вероятность протекания дается следующим образом

[Ошибка! Источник ссылки не найден.]:

$$P = \begin{cases} 0 & \text{если } p < p_c = \frac{1}{2} \\ \frac{2p - 1}{p^2} & \text{если } p > p_c = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (9)$$

Разложение в ряд Тейлора в окрестности $p_c = \frac{1}{2}$ дает $P \simeq 8(p - \frac{1}{2})$,

следовательно, вероятность протекания, пропорционально отклонению от предела протекания

$$P \propto (p - p_c) \text{ при } p \rightarrow p_c. \quad (10)$$

- в. *Средний размер кластеров*: Средний размер кластеров дается формулой

$$\langle s \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times 2^{n-1} p^n = \frac{3}{2} \frac{1}{1-2p} = \frac{3}{4} (p_c - p)^{-1}. \quad (11)$$

Заметим, что $\langle s \rangle$ расходится при $p_c \rightarrow p$, и расстояние $p_c - p$ от предела протекания зависит от p . Такое поведение – пример критического явления: параметр порядка приближается к нулю, следуя степенному закону в окрестности критической точки [18,19].

г. *Распределение размеров кластеров*: Вероятность наличия кластера размера s есть [8]

$$P_p(|C| = s) = \frac{1}{s} C_{2s}^{s-1} p^{s-1} (1-p)^{s+1}. \quad (12)$$

Здесь количество ребер, окружающих s вершин есть $2s$, из которых внутренние $s-1$ ребра должны присутствовать, а наружные $s+1$ – отсутствовать. Множитель C_{2s}^{s-1} учитывает различные случаи, которые могут возникать при перестановке ребер, а $1/s$ – нормировочный множитель

§1.2.3. Масштабирование в критических областях

Основным предположением теории протекания является то, что в окрестности предела протекания самая общая задача перколяции в любом измерении подчиняется масштабному соотношению. В общем случае размер кластера s может быть представлен следующим образом:

$$n_s(p) \sim \begin{cases} s^{-\tau} f_- \left(|p - p_c|^{\frac{1}{\sigma}} s \right) & \text{при } p \leq p_c \\ s^{-\tau} f_+ \left(|p - p_c|^{\frac{1}{\sigma}} s \right) & \text{при } p \geq p_c. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь τ и σ – критические степени, численные значения которых должны быть определены, f_- и f_+ – гладкие функции на $[0, \infty)$ и $f_-(0) = f_+(0)$. Для них

получено: $f_-(x) \simeq e^{-Ax}$ и $f_+(x) \simeq e^{-Bx^{(d-1)/d}}$ для $x \gg 1$. Такое предположение показывает, что $s_\xi \propto |p - p_c|^{1/\sigma}$, где длина корреляции ξ – характеристический размер длины кластеров, s_ξ – внутренняя характеристика размеров кластеров. Общее выражение (13) в качестве частного случая содержит дерево Кэли с $\tau = 5/2$, $\sigma = 1/2$ и $f_\mp(x) = e^{-x}$.

Еще одним элементом масштабной гипотезы является тот факт, что корреляционная длина расходуется в окрестности предела протекания, следуя степенному закону:

$$P \sim (p - p_c)^\beta, \quad \beta = \frac{\tau - 1}{\sigma}, \quad (14)$$

что оценивается как положительная степень величины $p - p_c$ для $p \gg p_c$; следовательно она равняется 0 для $p = p_c$ и возрастает при $p > p_c$. Средний размер конечных кластеров, $\langle s \rangle^f$, который может быть вычислен в обеих сторонах предела протекания, имеет следующее значение:

$$\langle s \rangle^f \sim |p - p_c|^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{3 - \tau}{\sigma}, \quad (15)$$

что расходится при $p \rightarrow p_c$. Показатели β и γ называются критическими степенями для вероятности протекания и среднего размера кластеров, соответственно.

§1.2.4. Бесконечномерное протекание

Протекание, как известно, имеет критическую размерность d_c , ниже которой показатели по-разному зависят от размерности d , выше d_c все показатели совпадают. Считается, что критическая размерность протекания $d_c = 6$, однако независимость критических показателей от размерности

показано только для $d \geq 19$ [14]. Таким образом, для $d > d_c$ применяется бесконечномерная теория протекания, что предсказывает следующее:

- $P \sim (p - p_c)$ при $p \rightarrow p_c$;
- $\langle s \rangle \sim (p_c - p)^{-1}$ при $p \rightarrow p_c$;
- $n_s \sim s^{-5/2} e^{-|p-p_c|^{2s}}$ при $p \rightarrow p_c$;
- $\xi \sim |p - p_c|^{-1/2}$ при $p \rightarrow p_c$.

Следовательно, критическими для бесконечномерного протекания являются показатели $\tau_\infty = \frac{5}{2}$, $\sigma_\infty = \frac{1}{2}$ и $\nu_\infty = \frac{1}{2}$. Фрактальная размерность бесконечного кластера в пределе протекания равна $d_f = 4$, а размерность графа $d_l = 2$ [4]. Химическое расстояние l (длина кратчайшего пути между двумя противоположными сторонами кластера) при пределе протекания соотносится с размером кластера s как

$$l \sim s^{2/d_f} = s^{1/2}. \quad (16)$$

§1.2.5. Параллели между теорией случайных графов и протеканием

В теории случайных графов мы изучаем граф с N вершинами, где каждая пара вершин соединена с вероятностью p . Это соответствует протеканию в максимум N измерениях, таких, что две соединенные вершины являются соседями, а ребра между вершинами графа – ребра в задаче протекания. Т.к. теория случайных графов изучает предел $N \rightarrow \infty$, она аналогична бесконечномерному протеканию.

Предел перколяции для дерева Кэли есть $p_c = \frac{1}{z-1}$, где z – число координации дерева. В случайном графе из N ребер число координации есть

$N - 1$; следовательно, «предел протекания», который показывает вероятность соединения, при которой появляется гигантский кластер, должен быть $p_c \simeq \frac{1}{N}$.

И в самом деле, это ровно та вероятность, при которой фазовый переход, ведущий к наличию гигантского компонента, появляется в случайном графе, как это показали Эрдеш и Реньи.

Сравним предсказания для теории случайных графов и бесконечномерного протекания, часть которых отражают совершенную аналогичность:

(1) Для $p < p_c = \frac{1}{N}$.

- Вероятность наличия гигантского кластера в графе и бесконечного кластера в протекании равна 0.
- Кластеры в случайных графах являются деревьями, а в протекании кластеры имеют фрактальную структуру и периметр, пропорциональный их объему.
- Самый большой кластер в случайном графе – это дерево с $\ln(N)$ вершинами, а в протекании в общем случае $P_p(|C| = s) \sim e^{-s/s\xi}$ [см. равенство (7)], что подсказывает, что размер наибольшего кластера измеряется как $\ln(N)$.

(2) Для $p = p_c = \frac{1}{N}$.

- Появляется единственный гигантский кластер или бесконечный кластер.
- Размер гигантского кластера – $N^{\frac{2}{3}}$, а для бесконечномерного протекания – $P_p(|C| = s) \sim s^{-\frac{3}{2}}$, поэтому размер наибольшего кластера измеряется как $N^{\frac{2}{3}}$.

(3) Для $p > p_c = \frac{1}{N}$.

- Размер гигантского кластера составляет $(f(p_c N) - f(pN))N$, где f – экспоненциально возрастающая функция с $f(1) = 1$. Размер бесконечного кластера составляет $PN \propto (p - p_c)N$.
- Гигантский кластер имеет сложную структуру, содержащую циклы, а бесконечный кластер является не фрактальным, а компактным.

Все эти соответствия показывают, что переходная фаза в случайных графах принадлежит тому же всеобщему классу, что и осредненное протекание. Численное моделирование случайных графов [22, 7] подтвердило, что критические показатели переходной фазы равны критическим показателям в бесконечномерном протекании. Тем не менее, теория случайных графов отвечает на вопросы появления деревьев и циклов, на которые теория протекания почти не обращает внимание.

§1.3. Цепи Маркова

Понятие марковской цепи впервые появилось в исследованиях А. А. Маркова [24]. Это было началом создания класса теории случайных процессов без последствий.

§1.3.1. Конечные стохастические процессы.

Введение понятия марковского случайного процесса необходимо для дальнейшего исследования.

В своих работах Майер Р. определил цепь Маркова как «конечный стохастический (случайный) процесс такой, что исход каждого опыта зависит только от исхода предшествующего опыта, более того, характер этой зависимости одинаков для всех этапов последовательности опытов.

Система с множеством возможных состояний $U = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ в каждый момент времени определяется только одним состоянием. С течением времени

она последовательно переходит из состояния S_i в состояние S_j . Если вероятность p_{ij} перехода зависит только от состояния S_i , то такой процесс является марковской цепью, а такой переход – шагом процесса». [23]

При фиксированном «настоящем» условные вероятности всех состояний системы в «будущем» не зависят от предыстории процесса, т. е. от того, когда и как система S к моменту t_0 пришла в состояние s_i

«Настоящее» может быть задано не одним каким-то состоянием s_i , а целым подмножеством состояний $V \subset W$, где W – множество всех возможных состояний системы.

Подчеркнем также, что «настоящее» может быть задано не только одним состоянием системы S в момент t_0 ; в него при желании можно включить и те элементы из «прошлого», от которых, при заданном «настоящем», зависит будущее. Например, вероятности состояний в «будущем» могут зависеть не только от состояния s_i системы в настоящем, но и от того, из какого состояния s_i система перешла к моменту t_0 в состояние s_i ; в этом случае настоящее характеризуется не только состоянием s_i , в которое система перешла к моменту t_0 , но и состоянием s_j из которого она перешла в s_i . Вводя в состав параметров, характеризующих настоящее состояние системы, те параметры из прошлого, от которых зависит будущее, можно, как говорится, «марковизировать» многие немарковские случайные процессы, но, как правило, это приводит к сильному усложнению математического аппарата.

§1.3.2. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем

Предположим, что граф состояний системы S имеет вид, представленный на рисунке 8. Процесс блуждания системы S по состояниям можно представить как последовательность или «цепь» событий, состоящих в том, что в начальный момент $t_0 = 0$ система находится в одном из состояний (например, в состоянии $s_1^{(0)}$), в момент первого шага перешла из него скачком в состояние $s_5^{(1)}$, из которого на втором шаге перешла в $s_3^{(2)}$, на третьем шаге перешла в $s_2^{(3)}$ и т. д. «Траектория» системы, блуждающей по состояниям s_1, s_5, s_3, s_2 показана на рис. 8 жирными линиями. На каких-то шагах система может задерживаться в том или другом из своих состояний, $s_i^{(k)} = s_i^{(k+1)}$ (это показано «возвратной стрелкой» на рис. 8) или же вернуться в него после ряда шагов.

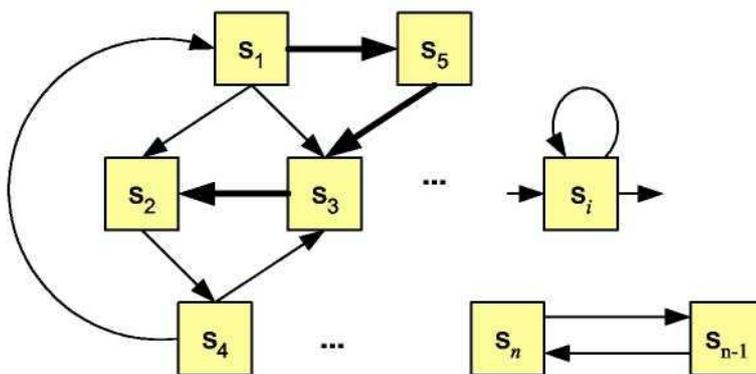


Рис. 8 Граф состояний системы S

«Траектория» блуждания системы по графу состояний, изображенная на рис. 8 жирными линиями, представляет собой не что иное, как реализацию случайного процесса, полученную в результате одного опыта. При повторении опыта, естественно, реализации в общем случае не совпадают.

Рассмотрим общий случай. Пусть происходит случайный процесс в системе S с дискретными состояниями $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n$, которые она может принимать в последовательности шагов с номерами $0, 1, 2, \dots, k, \dots$

Случайный процесс представляет собой последовательность событий вида $\{S(k) = s_i\} (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots)$. Наиболее важной ее характеристикой являются вероятности состояний системы

$$P\{S(k) = s_i\} (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

где $P\{S(k) = s_i\}$ – вероятность того, что на k -м шаге система S будет находиться в состоянии s_i .

Распределение вероятностей (17) представляет собой не что иное, как одномерный закон распределения случайного процесса $S(t)$, протекающего в системе S с «качественными» дискретными состояниями и дискретным временем $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$

Процесс, протекающий в такой системе S , называется марковским процессом с дискретными состояниями и дискретным временем (или, короче, марковской цепью), если выполняется условие: для любого фиксированного момента времени (любого шага k_0) условные вероятности состояний системы в будущем (при $k > k_0$) зависят только от состояния системы в настоящем (при $k = k_0$) и не зависят от того, когда (на каком шаге, при $k < k_0$) и откуда система пришла в это состояние. Марковская цепь представляет собой разновидность марковского процесса, в котором будущее зависит от прошлого только через настоящее.

Цепь, в которой условные вероятности состояний в будущем зависят только от состояния на данном, последнем, шаге и не зависят от предыдущих, иногда называют простой цепью Маркова, в отличие от такой, где будущее

зависит от состояний системы не только в настоящем на данном шаге, но и от ее состояний на нескольких предыдущих шагах; такую цепь называют сложной цепью Маркова. Сам А. А. Марков рассматривал сложные цепи, построенные на материале буквенных последовательностей, взятых из текста пушкинского «Евгения Онегина».

Если в качестве системы, в которой происходит случайный процесс, рассмотреть букву, входящую в текст, которой могут быть: а, б, в, щ, ъ, ы, ь, э, ю, я, «пробел», то сразу ясно, что вероятность последующей буквы быть той или другой зависит от того, какова была предыдущая (например, последовательности букв «яы» или «эь» в русском языке исключены); не так очевидно, но все же ясно, что эта вероятность зависит не только от предыдущей буквы, но и от других, ей предшествовавших (например, последовательность букв «ттт» в русском языке если не исключена, то практически невозможна, тогда как последовательность «тт» встречается довольно часто). Мы в данном элементарном изложении будем рассматривать только простые цепи Маркова и вычислять для них вероятности состояний.

Из определения марковской цепи следует, что для нее вероятность перехода системы S в состояние s_i на $(k + 1)$ -м шаге зависит только от того, в каком состоянии s_i находилась система на предыдущем -м шаге и не зависит от того, как она вела себя до этого $(k - 1)$ -го шага.

Основной задачей исследования марковской цепи является нахождение безусловных вероятностей нахождения системы S на любом -м шаге в состоянии s_i ; обозначим эту вероятность $p_i(k)$:

$$p_i(k) = P\{S(k) = s_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

Для нахождения этих вероятностей необходимо знать условные вероятности перехода системы S на -м шаге в состояние s_i , если известно, что

на предыдущем $(k - 1)$ -м шаге она была в состоянии s_j . Обозначим эту вероятность

$$p_{ij}(k) = P\{S(k) = s_i | S(k - 1) = s_j\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (19)$$

В заданной марковской цепи все значения p_{ij} для пар i и j указаны.

Помимо этого, задано исходное состояние, в котором находится система в начальный момент времени. Вероятности p_{ij} располагаются в вероятностной матрице перехода.

$$M = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix} \quad (20)$$

В этой матрице сумма вероятностей каждой строки равна единице $p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ik} = 1$, потому что представляет сумму вероятностей переходов состояния S_i в любые другие состояния системы $U = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$.

Для конечного количества переходов марковской цепи на основе этих данных строится граф логических возможностей и вероятностная мера на нем.

При задании марковской цепи матрицей такой выбор начального состояния задается вектором, компонентами которого служат вероятности, которые на дереве логических возможностей приписаны ветвям, идущим из начальной точки. Такой вектор называют вероятностным вектором состояний системы. Очевидно, что у вероятностного вектора, определяющего начальное состояние системы, сумма компонент всегда должна быть равна единице, т.к. они являются вероятностями всех состояний системы.

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}(k) = 1$$

Матрица, обладающая таким свойством, называется стохастической. Естественно, что все элементы стохастической матрицы отвечают условию

$$0 \leq p_{ij}(k) \leq 1.$$

Чтобы найти вероятностный вектор состояний системы после первого шага, надо вероятностный вектор, характеризующий состояния системы на начало процесса ($P^{(0)}$) умножить на матрицу перехода M

Чтобы найти безусловные вероятности $p_i(k)$, недостаточно знать матрицу переходных вероятностей; нужно еще знать начальное распределение вероятностей, т. е. вероятности состояний $p_i(0)$, соответствующие началу процесса – моменту $t_0 = 0$:

$$p_1(0), p_2(0), \dots, p_i(0), \dots, p_n(0) \quad (21)$$

в сумме образующие единицу:

$$\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1 \quad (22)$$

При некоторых условиях в цепи Маркова с возрастанием k (номера шага) устанавливается стационарный режим, в котором система S продолжает блуждать по состояниям, но вероятности этих состояний уже от номера шага не зависят. Такие вероятности называются предельными (или финальными) вероятностями цепи Маркова.

Сформулируем условия существования стационарного режима для системы S с конечным числом состояний n , в которой протекает марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова): [23]

1. Множество всех состояний W системы S должно быть эргодическим.
2. Цепь Маркова должна быть однородной:

$$p_{ij}(k) = p_{ij}$$

3. Цепь Маркова должна быть «достаточно хорошо перемешиваемой» (не должна быть «циклической»).

Цепи Маркова, отвечающие этим условиям, будем называть эргодическими цепями Маркова.

ГЛАВА II. ОРИГИНАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Цивилизация и прогрессивное развитие человечества значительно усложнили устройство человеческой жизни, сделав ее встроенной в огромное количество системных связей и случайных процессов. Простота и лаконичность жизнеустройства древнего человека наглядно демонстрировали и цель, и путь ее достижения. Они были просматриваемы заранее и быстро и без особых затруднений подтверждались практикой. Сегодня, практически во всех сферах жизнедеятельности, начатое действие не гарантирует запланированного результата. Производственные области, сферы обслуживания (торговля, медицина, образование и пр.), сферы государственно-общественного устройства структурированы, системны и многосложны. При этом их деятельность протекает в условиях случайно происходящих событий. Следовательно, и результат их деятельности с одной стороны будет зависеть от устройства самой системы, а с другой – от фактора случайности. Предположим, возникла необходимость в информации о состоянии здоровья пациента медицинского учреждения. Принципы и подходы, используемые в современной традиционной медицине, система устройства и функционирования медицинского учреждения предполагают последовательность действий пациента и врача, которые должны привести к искомому результату: фиксации состояния здоровья. Но, как показывает практика, результат может случиться, а может и нет. В этом случае последовательные действия как результат одного обследования, провоцирующего необходимость проведения следующего, могут протекать как угодно долго или даже бесконечно и по любой траектории: линейно, циклично и т.д. Часто это крайне ресурсозатратно и даже лишает целесообразности само обследование. Таким образом, цель действия либо отдалается, либо теряет актуальность. Проблема достижимости цели при определенной последовательности действий фиксируется практически во всех областях человеческой практики. Решение ее было найдено в научных областях, занимающихся способами обработки информации. Методами

математической статистики, используя разработки теории вероятности, оказалось возможным смоделировать реальные процессы жизни и спрогнозировать результат. Более того, определить области действий, условий и прочего как параметров и критериев достижимости цели, а значит получить реальную возможность управления и контроля случайными процессами. Но в силу относительной научной молодости данного направления, окончательного и завершеного способа моделирования случайных и закономерных процессов не найдено.

§2.1. Разработка математической модели.

Первоочередной задачей в исследовании поставленной проблемы явилось создание адекватной математической модели. Мы предполагаем, что распределение вероятностей количества выдаваемых направлений должно обладать рядом свойств. Во-первых, это дискретное распределение вероятностей — количество направлений n является целым числом $(0, 1, 2, 3 ..)$. Во-вторых, это распределение должно иметь максимум, приходящийся на небольшие целые числа. Это зависит от возраста пациента, тяжести заболевания, медицинской (области) и других факторов. В общем случае ноль направлений, очевидно, не характеризуется максимумом вероятности, однако как частный случай это возможно. При увеличении параметра n поведение вероятности $p(n)$ должно быть убывающим. В-третьих, это распределение должно подчиняться условию нормировки. Это означает, что практически мы должны ограничиться конечным рядом для n разумной длины и для этого набора применить условие нормировки. На основании перечисленных свойств функция распределения вероятностей должна иметь вид, как на рисунке 9.

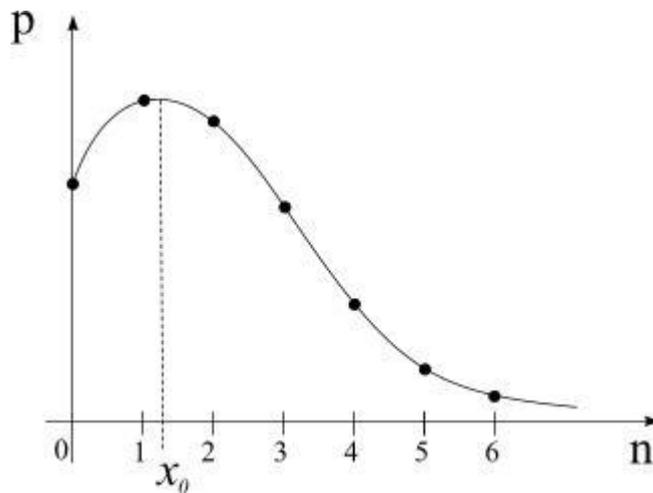


Рис. 9 Функция распределения вероятностей

Следующей задачей было подобрать такую непрерывную функцию $f(x)$, которой принадлежат значения дискретного распределения $p(n)$ или найти известное дискретное распределение с указанными свойствами. Среди известных дискретных распределений распределение нужного вида не нашлось, поэтому мы подбирали непрерывную функцию такого вида. Очевидно, что в качестве такой функции можно взять широко известную функцию распределения Гаусса, описывающую нормальное распределение.

$$f(x) = C e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

Эта функция необходима нам в области положительных значений аргумента, параметры x_0 и σ определяют положение и вид этой кривой: x_0 — точка максимума функции, σ — т. н. полуширина кривой (среднеквадратичное отклонение). Как указывалось выше, x_0 — действительное число порядка 1. Важным моментом является то, что нормировать нужно не функцию $f(x)$, а дискретное распределение вероятностей $p(n)$. Задавая x_0 и σ , мы меняем наиболее вероятное количество направлений и тем самым вид возникающего медицинского «квеста» (вид дерева). Исследование конечности или бесконечности возникающей траектории является основной задачей работы,

поэтому на этом этапе разработки модели мы понимаем, что параметры x_0 и σ будут меняться, и для каждого из возникающих распределений необходимо выполнять нормировку. Таким образом, необходимо задать разумный верхний предел значений n – назовем этот параметр N_{max} . Далее для каждой пары независимых переменных x_0 и σ нормируем дискретное распределение вероятностей и на их основе производим моделирование возникающего квеста.

Условие нормировки:

$$\sum_{n=0}^{N_{max}} p(n) = 1$$

$$f(x) = C e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} = C \cdot g(x)$$

$$p(n) = f(x = n)$$

$$g(x) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sum_{n=0}^{N_{max}} C \cdot g(n) = 1$$

$$C = \frac{1}{\sum g(n)}$$

Таким образом $p(n)$ становятся известны.

Мы думаем, что квест прохождения медицинского обследования является экспоненциальным деревом. Оценим максимальное число докторов в n -том поколении, если известно, что при данных параметрах вероятностного распределения (n, σ) максимальное количество направлений составляет N_{max} .

$$N_{doct\ max} = N_{max}$$

Максимальное число докторов $N_{doct}(k)$ в k -том поколении равно:

Номер поколения	Максимальное число докторов $N_{doct\ max}(k)$
$k = 1:$	1
$k = 2:$	$\sim N_{max}$
$k = 3:$	$\sim N_{max} \cdot N_{max} = N_{max}^{3-1}$
...	...
k	N_{max}^{k-1}

$$N_{doct\ max}(k) = N_{max}^{k-1}$$

Реальные значения числа докторов в каждом поколении $N_{doct}(k)$ меньше максимальных значений и являются величиной случайной, но возрастающей приблизительно по тому же закону:

$$N_{doct} = \langle C \rangle^{k-1}$$

где $\langle C \rangle$ – среднее число направлений от одного доктора. Чтобы убедиться в экспоненциальном росте, возьмем логарифм натуральный от обеих частей равенства:

$$\ln N_{doct} = \ln \langle C \rangle^{k-1}$$

$$\ln N_{doct} = (k - 1) \ln \langle C \rangle$$

$$\ln N_{doct} = k \cdot \ln C - \ln C$$

Если обозначить $\ln N_{doct} = y$, $k = x$, а $\ln C = tg\alpha$, получаем

$$y = x \cdot tg\alpha - \ln C,$$

то есть уравнение прямой. Таким образом, если в указанных логарифмических осях, в которых по горизонтальной оси откладывается номер поколения k , по вертикальной – натуральный логарифм числа докторов, возникает прямая, то можно утверждать, что количество докторов с ростом поколения растет по показательному закону или экспоненциально (поскольку любая показательная функция может быть приведена к основанию e : $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$). При этом, тангенс угла наклона этой прямой будет связан со средним числом направлений C , выдаваемых каждым доктором. Такие построения и вычисления позволят в программе независимо определять среднее число направлений C , выдаваемых каждым доктором:

$$\ln C = \operatorname{tg} \alpha = a$$

$$C = e^a$$

Мат.ожидание числа направлений мы можем рассчитать по распределению $p(n)$:

$$M(n) = \sum_n n \cdot p(n)$$

§2.2. Организация моделирования

Необходимо выяснить, как по данному набору вероятностей того или иного количества направлений осуществить моделирование движения в соответствии с этими направлениями. Наиболее просто понять суть моделирования в случае бинарного выбора с вероятностями p и q , такими, что $p + q = 1$. Такая идея активно используется в моделировании в статистической физике методом Метрополиса. Представим себе область полной вероятности $p + q = 1$ какого либо из исходов (A или B) в виде отрезка $(0..1)$ (рис 10).

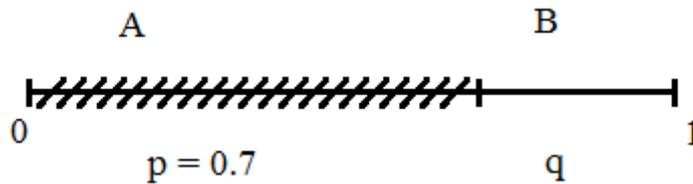


Рис. 10 Розыгрыш случайного события в случае биномиального выбора

Пусть для определенности $p = 0.7$, $q = 0.3$. Нанесем на этот отрезок области, равные p и q . Будем считать заштрихованную на рисунке область размером p областью реализации события A , а оставшуюся область размером q — областью события B . Если случайно брошенная точка на этот отрезок попадет в область A длиной p , значит реализуется событие A , если в оставшийся кусок длиной q — событие B . Очевидно, в данном методе используется представление о геометрической вероятности. В нем доля всех исходов A действительно составит p , исходов B — q . Этот же прием можно использовать для розыгрыша многовариантного выбора количества направлений с вероятностями $p(n)$. Имеем

$$p(0) + p(1) + p(2) + \dots + p(N_{\max}) = 1$$

Аналогично разбиваем отрезок (0..1) на области, равные $p(0), p(1), p(2), \dots, p(N_{\max})$, и бросаем точку на этот отрезок. В зависимости от того, в какой частичный отрезок упадет эта точка, то событие и считаем выпавшим. (см. рис. 11)

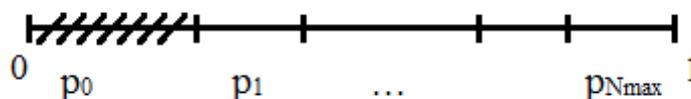


Рис. 11. Розыгрыш случайного события в случае полиномиального выбора

§2.3. Переходный характер траекторий

Очевидно, что в том случае, когда максимумы вероятностей приходятся на $n = 0$ или $n = 1$, вероятность того, что путь пациента будет коротким, весьма высока. Ясно, что при увеличении среднего количества направлений, выдаваемого каждым врачом, траектория имеет тенденцию к неограниченному «разрастанию». Таким образом, при малых значениях параметров x_0 и σ траектория конечна, при больших – бесконечна (неограничена). Значит, существуют критические значения этих параметров (или область), при которых происходит переход от траекторий с конечной длиной к траекториям с бесконечной. Система проявляет, таким образом, своего рода критическое поведение с фазовым переходом из одного режима в другой. Наряду с терминологией фазового перехода в данной задаче будет уместна также протекательная терминология. Это значит, что при определенных значениях параметров система «находит» непрерывный путь (или несколько путей), позволяющий ей достигнуть некоторой границы, при этом длина этой траектории становится бесконечной.

Мы надеемся найти эти критические значения x_0 и σ , отделяющие области конечных и бесконечных квестов. На плоскости этих параметров, очевидно, это должна быть некоторая кривая $\sigma(x_0)$, на которой происходят фазовые переходы — кривая фазовых переходов.

И тем самым цель будет достигнута.

§2.4. Результаты исследования

Нами разработана программа в среде Delphi для моделирования описанного процесса блуждания по медицинской траектории. В программе в соответствии с разработанной моделью создается дискретное распределение вероятностей количества направлений, обладающее свойствами, указанными в предыдущем разделе. На рисунке 12 показан вид этого распределения, соответствующий некоторым значениям x_0 и σ .



Рис. 12 Распределение вероятностей

Напомним, что x_0 является точкой максимума непрерывной функции $f(x)$ гауссового вида, значения которой в целочисленных точках $x = n$ задают дискретное распределение вероятностей $p(n)$ для количества направлений. Аналогично, σ – это привычная характеристика распределения Гаусса — его нормальное (среднеквадратичное) отклонение. Необходимо четко понимать, что для функции $f(x)$, определенной на всей числовой прямой, x_0 являлось бы мат. ожиданием, тогда как для дискретного распределения $p(n)$ мат. ожидание, очевидно, будет пропорциональным, но не равным x_0 . То же можно сказать и о связи среднеквадратичных отклонений непрерывной функции $f(x)$ и дискретного распределения $p(n)$: они не равны, но, очевидно, пропорциональны, в чем можно легко убедиться путем расчета дисперсии и среднеквадратичного отклонения дискретного распределения. Ниже в ходе описания моделирования будут представлены еще ряд графиков этого вида, демонстрирующие их разнообразие при различных значениях x_0 и σ .

В программе реализована графическая процедура рисования возникающих деревьев, соответствующих данной медицинской траектории

пациента. При малых x_0 и σ деревья, как правило, конечные или имеют нулевую высоту (ограничены первым поколением при отсутствии выданных направлений), неразветвленные. Они соответствуют области конечных квестов. На рисунке 13 показаны примеры таких деревьев с указанием значений параметров x_0 и σ .

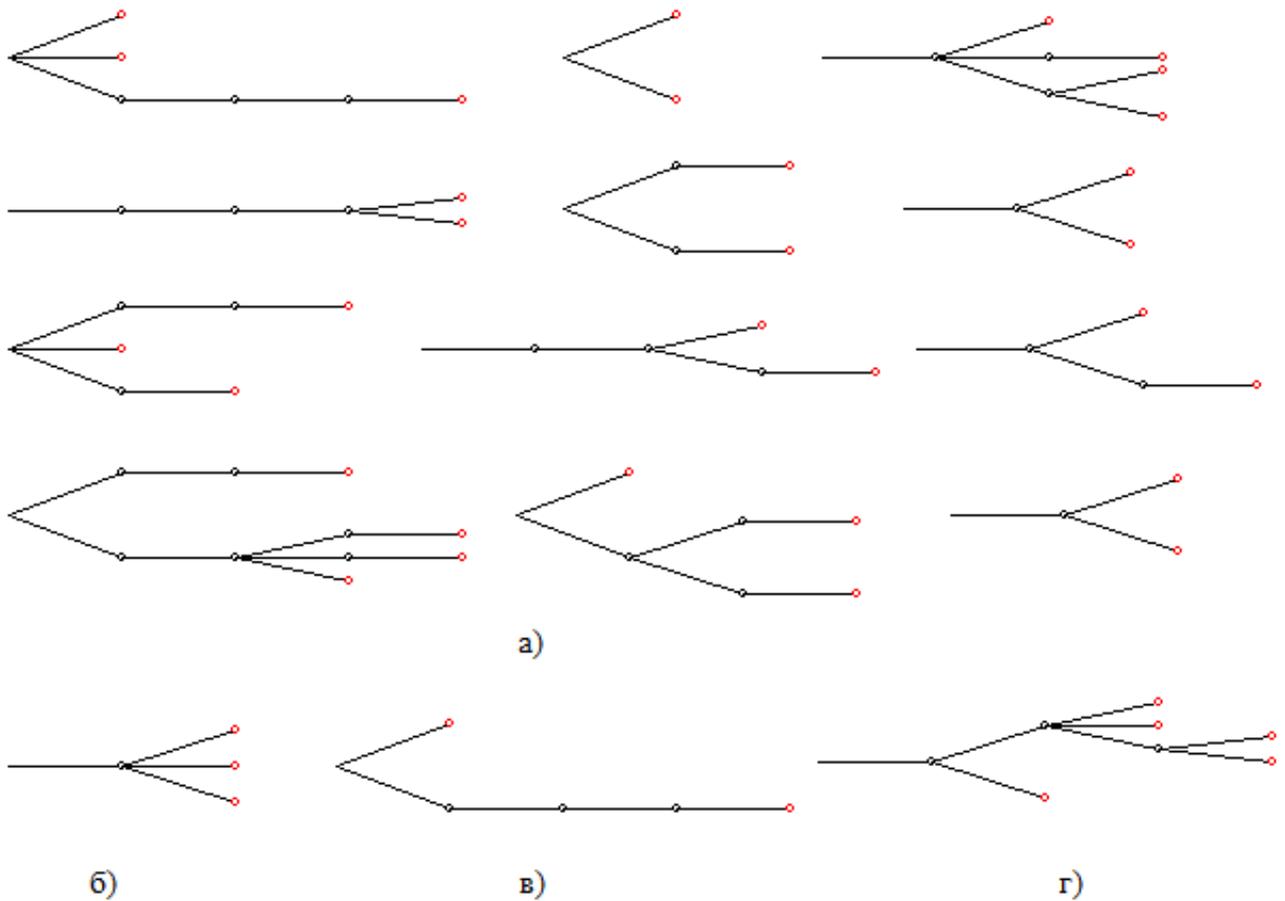


Рис. 13 Варианты конечных деревьев при ограничении числа поколений $k_{max} = 5$ и при: а) $x_0 = 0,1$ и $\sigma = 1$; б) $x_0 = 0,3$ и $\sigma = 1$; в) $x_0 = 0,5$ и $\sigma = 1$; г) $x_0 = 0,3$ и $\sigma = 1$

После преодоления некоторых граничных значений этих параметров высота деревьев, как правило, достигает границы, и это почти наверняка свидетельствует о том, что при открывании верхней границы дерево продолжит

расти вверх и будет бесконечным. На следующем рисунке (рис. 14) показаны примеры реализации таких деревьев с указанием значений параметров x_0 и σ .

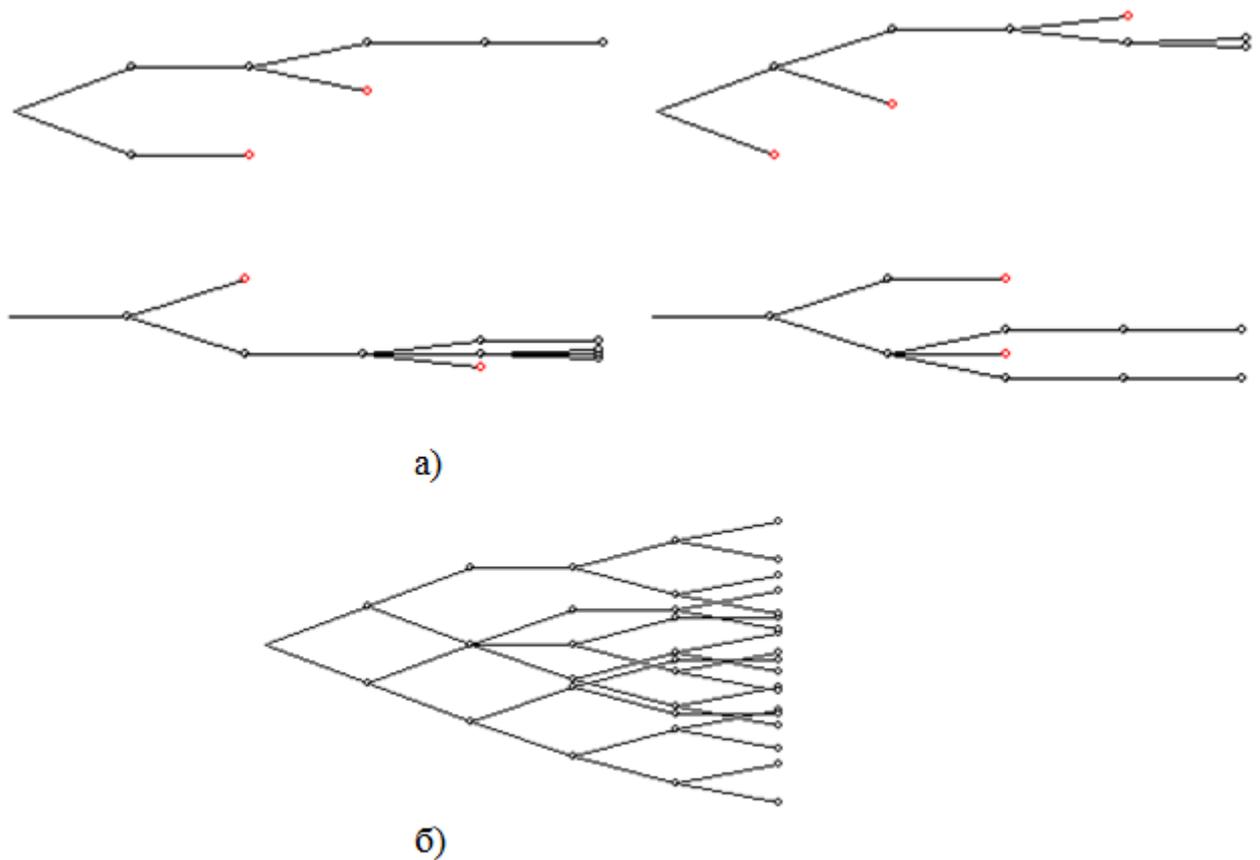


Рис.14 Варианты деревьев при а) $x_0 \approx 1,5$ и $\sigma \approx 0,2$ б) $x_0 \approx 0,3$ и $\sigma \approx 1$.

Каким образом в программе реализуется определение критерия конечности или бесконечности дерева? Были исследованы различные варианты такого критерия. На начальном этапе в этой роли выступала средняя высота дерева, однако в дальнейшем стало понятно, что наиболее удобной величиной для анализа в данном случае является все же вероятность достижения границы. При одних и тех же значениях параметров x_0 и σ дерево может быть как конечным, так и бесконечным, поскольку это вероятностный процесс. Однако, при малых значениях основных параметров деревья как правило конечные, при больших — как правило, бесконечные. Это значит, что речь идет о вероятности конечной или бесконечной высоты. В программе мы считаем количество

достижений верхней границы поколений и их долю от полного числа реализаций, осуществленных при данных значениях x_0 и σ . Указанная доля и является оценкой вероятности достижения верхней границы или вероятности возникновения бесконечного дерева. На рисунке 15 показан вид функции $p_\infty(x_0)$ при двух значениях параметра σ . Видно, что эта функция действительно ведет себя предсказуемым образом: равна нулю при малых x_0 , затем возрастает до значения $p_\infty = 1$ с той или иной скоростью, и эта скорость перехода к верхнему значению зависит от σ . Вероятность бесконечного квеста рассчитывается по формуле:

$$p_\infty = \frac{N_\infty}{N_{trees}}$$

где N_∞ – число бесконечных деревьев, $N_{trees} = 150 \div 500$ – число деревьев, по которым делается усреднение

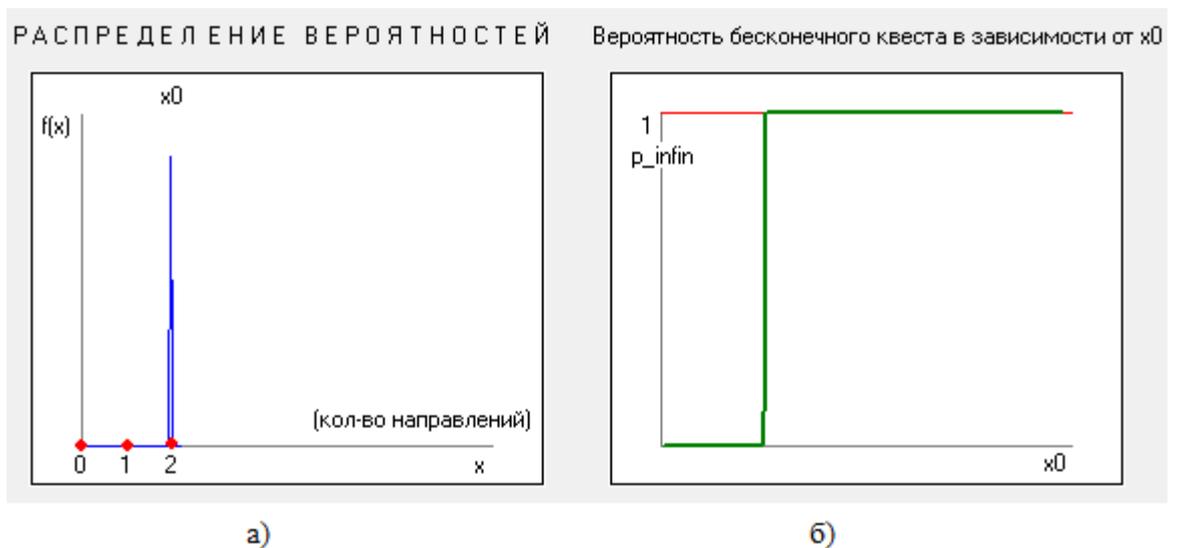


Рис. 15 Соответствующие друг другу зависимость вероятности бесконечной траектории и распределение вероятностей количества

направлений при $\sigma = 0,015$ Рис. а) Вид распределения вероятностей. Рис. б)

Переходный характер вероятности бесконечной траектории

Такое поведение вероятности соответствует существованию фазового перехода в системе указанного вида. Как следует из этих графиков, наиболее резким этот переход будет при малых σ – функция вероятности при этом представляет собой практически прямоугольную ступеньку. Размытие этой функции при увеличении σ не говорит об исчезновении фазового перехода, поскольку эта функция по-прежнему наверняка переходит от значения $p_\infty = 0$ к значению $p_\infty = 1$. (см. рис. 16)

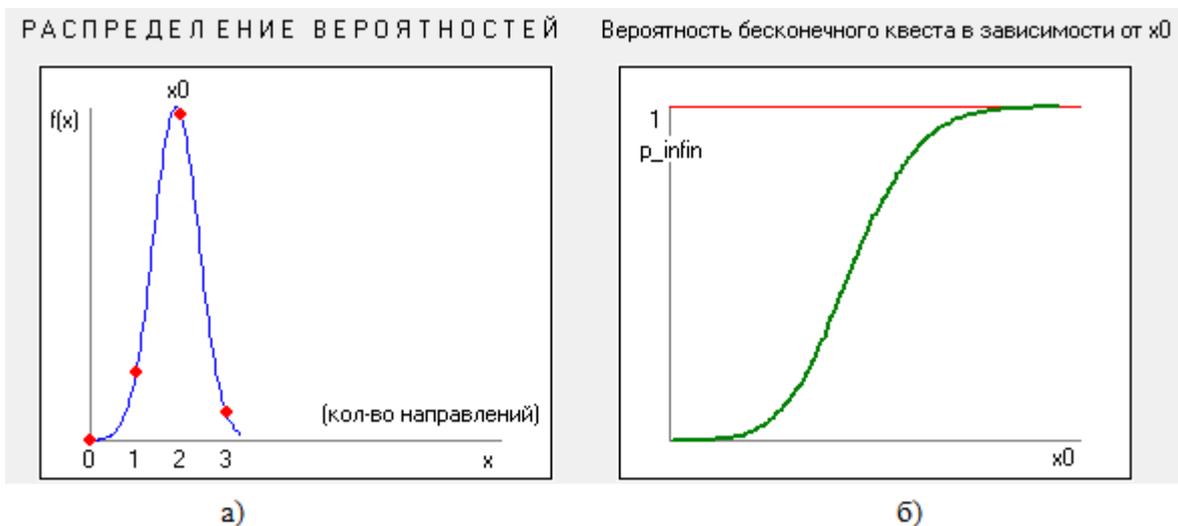


Рис. 16 Соответствующие друг другу зависимость вероятности бесконечной траектории и распределение вероятностей количества направлений при значении $\sigma = 0,5$. Рис. а) Вид некоторого распределения вероятностей числа направлений при $\sigma = 0,5$. Рис. б) Расплывание зависимости вероятности бесконечного квеста при $N_{trees} = 10000$ и увеличении σ

На рис. 16 видно постепенное расплывание функции вероятности бесконечного квеста, что соответствует возникновению целой области перехода от конечных ($p_\infty = 0$) к бесконечным ($p_\infty = 1$) квестам.

Для того чтобы определить области конечных и бесконечных траекторий на диаграмме $x_0 - \sigma$, мы строим линии уровня функции $p_\infty(x_0, \sigma)$, то есть отображаем значения этой функции при разных количествах деревьев на этой диаграмме цветом. На рис. 17 ниже показаны эти диаграммы.

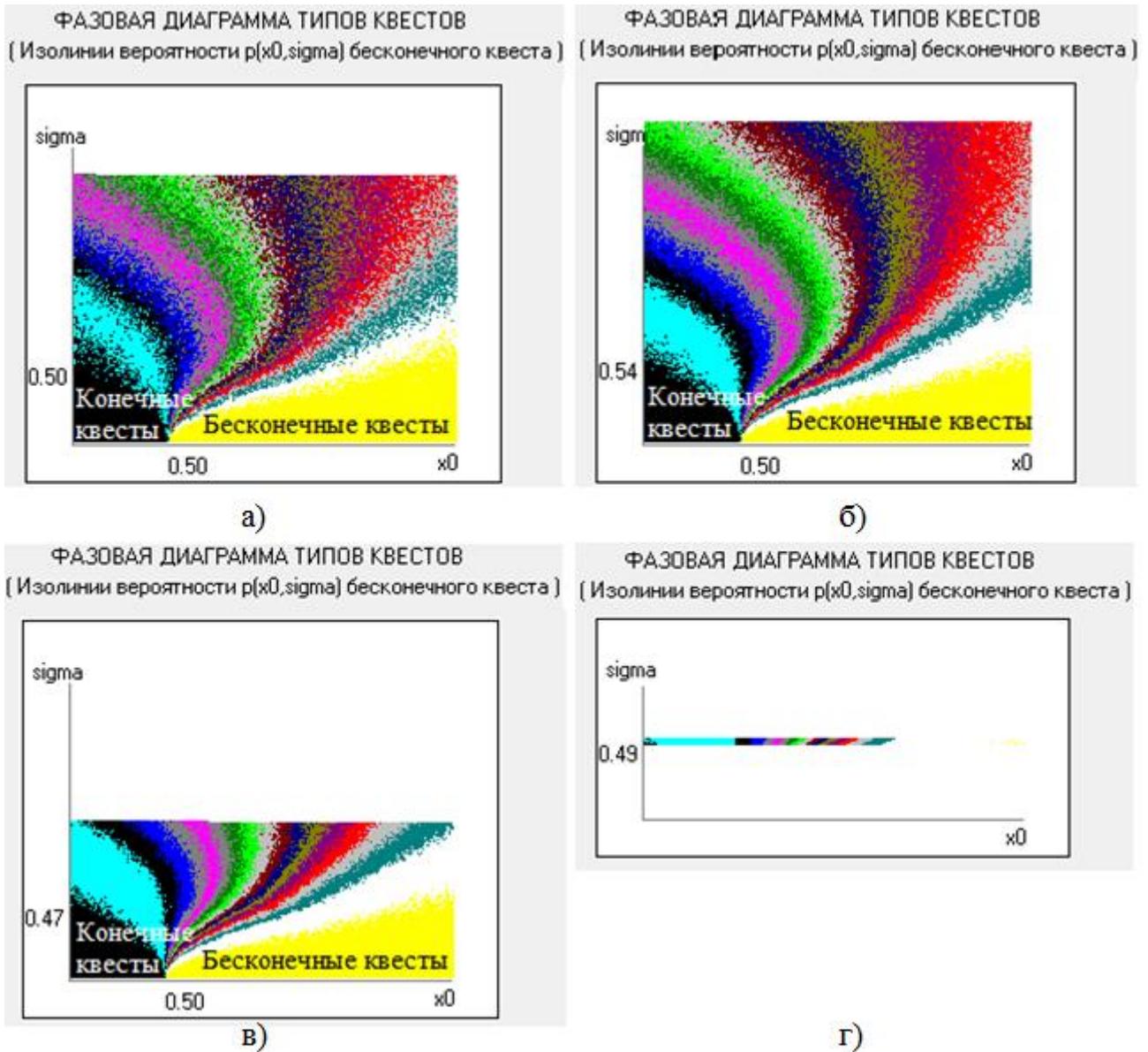


Рис. 17 Диаграммы конечных и бесконечных траекторий квестов при:

а) $N_{trees} = 150$; б) $N_{trees} = 500$; в) $N_{trees} = 1000$ г) $N_{trees} = 10000$

Черный цвет вблизи начала координат (малые x_0 и σ) соответствует нулевому значению функции и является областью конечных квестов, т.е. цель достижима наверняка, желтый — значению 1 и является областью бесконечных

квестов, где цель недостижима в принципе. Также на этих диаграммах хорошо видно, что резкий переход от одного режима поведения к другому осуществляется только при малых σ , при повышении σ переход размывается (радужная область, соответствующая промежуточным значениям вероятности, в которой результат может быть как конечен, так и бесконечен). Точка такого резкого перехода при малых σ соответствует $x_0 = 0,5$. Точка на оси σ , соответствующая концу конечных квестов, составляет $\sigma \approx 0,5$.

Границы области определены: $x_{0 \text{ критич}} = 0,5$ и, вероятно, $\sigma_{\text{критич}} = 0,5$.

Увеличивая количество деревьев, по которым производится усреднение, мы уточняли границу по σ – значение гуляет вблизи 0,5. На этой оси флуктуации очень большие (разброс n большой – все деревья разные, среднее гуляет больше, чем на оси абсцисс). Для $N_{\text{trees}} = 10000$ деревьев $\sigma_{\text{критич}}$ получилась 0,49.

Таким образом, область существования конечных траекторий на диаграмме $x_0 - \sigma$ определена.

График зависимости числа узлов от поколения показан на рисунке 18 и видно, что в логарифмическом масштабе эта зависимость прямая, что означает, что сама зависимость ведет себя экспоненциально.

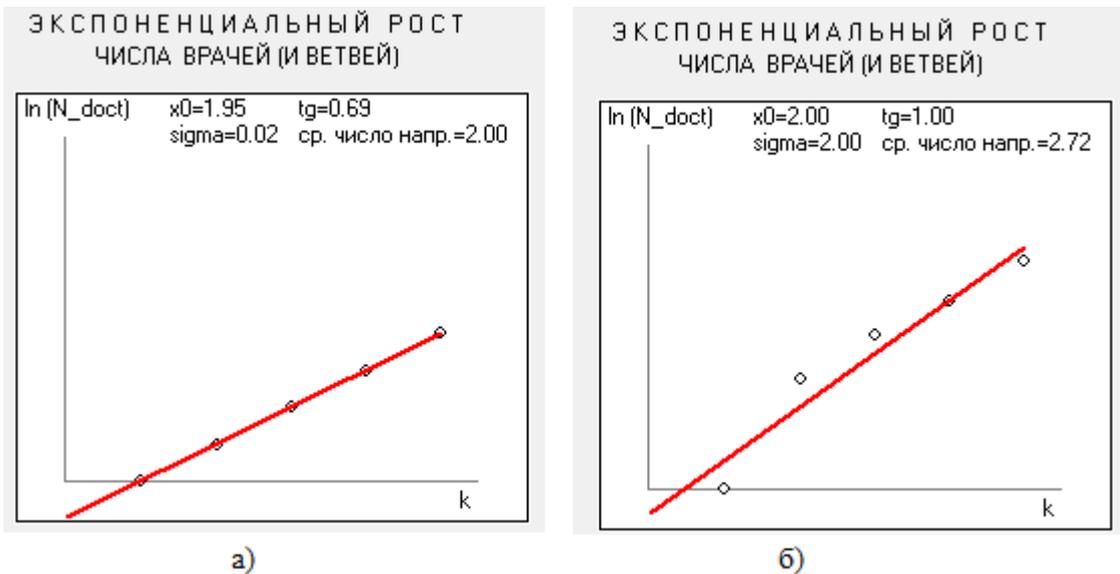


Рис. 18 Зависимость числа узлов от поколения. Рис. а) зависимость при малых σ . б) зависимость при больших σ .

При самом малом $\sigma \sim 0$ функция $f(x)$ δ -образная, т.е. очень узкая. Это значит, когда пик -функции приходится на $n = 0$ – дерево нулевой длины, т.е. все врачи выдают ноль направлений. На $n = 1$ – все врачи выдают одно направление, и дерево становится бесконечного вида. На $n = 2$ – все врачи выдают точно 2 направления, и дерево становится двоичным. При этом, среднее число направлений, выдаваемых одним врачом $C = e^a = 2$ и $tg = \ln C = 0,69$, как показано на графиках.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей дипломной работе проведено исследование возможности возникновения стохастических деревьев конечной высоты (конечных медицинских квестов) в модели вероятностного распределения числа ветвей на каждом узле.

1. Разработана математическая модель для описания медицинского квеста, а также вид дискретного распределения вероятностей количества направлений гауссового вида.
2. Разработана программа для моделирования указанного процесса и расчета его количественных характеристик в среде Delphi.
3. Установлено, что поведение вероятности бесконечных квестов имеет переходный характер. Задача имеет сходство с задачами о протекании.
4. Построена фазовая диаграмма системы в плоскости параметров мат.ожидание – нормальное отклонение ($m - \sigma$), на которой определены области реализации конечных и бесконечных квестов. Характеризована граница этой области (аналог кривой фазовых переходов).
5. Изученная проблема отнесена к разделу математики «стохастические графы», по которой исследована соответствующая литература.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barabasi A.-L., Albert R., Jeong H. Mean-field Theory for Scale-free Random Networks // *Physica*. 1999. A 272. P. 173–187.
2. Bollobas B. (1984), The evolution of random graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* 286, 257-274.
3. Bollobas B., *Random Graphs*, New York: Academic Press, 1985.
4. Bunde A., Havlin S. – *Fractals and disordered systems*, 1996, 115-176.
5. Bunde A., Havlin S. – *Fractals in Science*, 1994, 1-26.
6. Cohen R., Erez K., Ben-Avraham D., Havlin S. – *Physical review letters*, 2000.
7. Dall J., Michael Christensen Random geometric graphs // *Phys. Rev. E.* — 2002. — T. 66. — C. 016121.
8. Durrett, R.; Nguyen, B. Thermodynamic inequalities for percolation. *Comm. Math. Phys.* 99 (1985), no. 2, 253-269.
9. Erdos P., Renyi A. (1959). On random graphs I, *Publ. Math. Debrecen* 6, 290-297.
10. Erdos P., Renyi A. (1960). On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* 5, 17-61.
11. Erdos P., Renyi A. (1961a). On the evolution of random graphs, *Bull. Inst. Int. Statist. Tokyo* 38, 343-347.
12. Grimmett G., *Percolation (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*, Springer: Berlin, Germany, 2010.
13. Hammersley, J. M. Percolation Processes: Lower Bounds for the Critical Probability. *Ann. Math. Statist.* 28 (1957), no. 3, 790-795.
14. Hara T., Slade G. – *Communications in Mathematical Physics*, 1990, 333-391.
15. Karonski M., Rucinski A. (1997), The origins of the theory of random graphs. In *The Mathematics of Paul Erdős*, /, eds. R.L. Graham h J. Nešetřil,

- Algorithms and Combinatorics, 13, Springer, Berlin, 311-336.
16. Kolchin V. F., (1986), Random Mappings. Optimization Software, New York.
 17. Luczak T. (1990), On the equivalence of two basic models of random graphs. In Random Graphs '87, Proceedings, Poznan, 1987, John Wiley & Sons, Chichester, eds. M. Karonski, J. Jaworski & A. Rucinski, 151-158.
 18. Ma, S.-K., Modern Theory of Critical Phenomena, Benjamin-Cummings, Menlo Park, Calif., 1976.
 19. Stanley, H. E., Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena, Clarendon, Oxford, U. K., 1971.
 20. Stauffer D. and Aharony A. Introduction to Percolation Theory. London: Taylor & Francis, 1992.
 21. Кузьмин О.В., Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. – 294 с.
 22. Лери М. М. Моделирование случайных графов Интернет-типа // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16, вып. 5. С. 737–744.
 23. Майер Р. А., Майер Р.Р., Ванюрин А.В. Формирование вероятностно-статистического мировоззрения школьников: учебное пособие /Майер Р. А., Майер Р.Р., Ванюрин А.В. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2008. – 92 с.
 24. Марков А. А., "Изв. Петерб. АН" (6), 1907, т. 1, № 3, с. 61-80.
 25. Харари Ф., Палмер Э., Перечисление графов. – М.: Мир, 1977.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
{ $N+ }  
unit quest;  
interface  
uses  
    Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,  
    Dialogs, StdCtrls, ExtCtrls;  
type  
    TForm1 = class(TForm)  
        Button1: TButton;  
        Button2: TButton;  
        Button3: TButton;  
        PaintBox1: TPaintBox;  
        PaintBox2: TPaintBox;  
        PaintBox3: TPaintBox;  
        PaintBox4: TPaintBox;  
        Label1: TLabel;  
        Label2: TLabel;  
        Label3: TLabel;  
        Label4: TLabel;  
        Label5: TLabel;  
        Label6: TLabel;  
        PaintBox5: TPaintBox;  
        Label7: TLabel;  
        Label8: TLabel;  
        Memo1: TMemo;  
        procedure Button1Click(Sender: TObject);  
        procedure Button2Click(Sender: TObject);  
        procedure Button3Click(Sender: TObject);  
    private  
        { Private declarations }  
    public
```

```

        { Public declarations }
end;
const pi=3.14; alpha0=0.75*pi; percent=0.77;
      x0_0=0.01; x0_k=2.0; dx0=0.01;
      sigma0=0.015; sigma_k=2.0; dsigma=0.01;
      // x0_0=0.3; x0_k=2.5; dx0=0.01;
      // sigma0=3.0; sigma_k=2.5; dsigma=0.01;
      m=2; Nmax_ocenka=round(x0_k+3*sigma_k)+2;
      k_max=5;

      //Nomer_doct_max = Nmax_ocenka * Nmax_ocenka * Nmax_ocenka * Nmax_ocenka;
//Nmax_ocenka^(kmax-1)
      Nomer_doct_max = 6000;
      N_of_trees=150; { 150}
      draw=false;{ }
      // draw=true;{ }
      BkColor=ClWhite;
col : array[1..19] of integer=(clNone,clAqua,clBlack,clBlue,clDkGray,clFuchsia,
clGray,clGreen,clLime,clLtGray,clMaroon,clNavy,clOlive,clPurple,clRed,clSilver,
clTeal,clWhite,clYellow);
var
      Form1: TForm1;
i,k,j,it: longint;
n,x1,y1,x2,y2: integer;
S: longint;
Nmax: byte;
alpha, mask,
C, sum,
masx, masy: extended;
N_doctors: array[1..k_max] of longint;
N_napr: array[1..k_max,1..Nomer_doct_max] of integer;
xd: array[1..k_max] of integer;
yd: array[1..k_max,1..Nomer_doct_max] of integer;
p: array[0..Nmax_ocenka] of extended;
xp: array[0..Nmax_ocenka+1] of real;
st: string;

```

```

l: integer;
l_mid,l_max: extended;
x0,sigma: extended;
N_infin: longint;
ps,p_infin: extended;
p_fin, p_inf : real; // границы вероятности, начиная с которых считаем, что это 0 или 1
mx1, my1, d_x1, d_y1,
mx2, my2, d_x2, d_y2,
mx3, my3, d_x3, d_y3,
mx4, my4, d_x4, d_y4,
mx5, my5, d_x5, d_y5: integer;
Process_End, Pause: boolean;
first_x0, first_sigma,
x0_kr, sigma_kr: boolean;
var Sx,Sy,Sxy,Sx2, a,b: real;
    mas_k, mas_ln_Ndoct : real;
    Nt : integer;
implementation
{$R *.dfm}
procedure analyse_key;
begin
    Application.ProcessMessages; {Чтобы анализировала, нажимаются ли кнопки
во время исполнения}
    if Process_End=true then halt;
    if Pause=true then repeat Application.ProcessMessages; until Pause=false;
end;
procedure parameters_of_f_x;
begin
    {if x0>0.0005 then sigma:=0.7*x0 else sigma:=1;}
    Nmax:=round(x0+3*sigma); if Nmax=0 then Nmax:=1; {up granice}
end;
function f_exp(x,x0,sigma : real): extended;
begin
    f_exp:=exp( -sqr(x-x0)/(2*sqr(sigma)) );
end;

```

```

procedure normirovka_f_x;
{var sum : real;}
begin
    sum:=0; for n:=0 to Nmax do sum:=sum + f_exp(n,x0,sigma);
    C:=1/sum;
end;
function f(x,x0,sigma : real): extended;
begin
    f:=C * f_exp(x,x0,sigma);
end;
procedure massiv_p_xp;
begin
    normirovka_f_x;
    xp[0]:=0;
    for n:=0 to Nmax do begin p[n]:=f(n,x0,sigma);
        xp[n+1]:=xp[n] + p[n];
    end;
    for n:=Nmax+1 to Nmax_ocenka do p[n]:=0;
end;
procedure graphika;
begin
    Form1.Memo1.Lines.Append(' ');
    str(N_of_trees,st);
    Form1.Memo1.Lines.Append('Для каждой точки (x0,sigma)');
    Form1.Memo1.Lines.Append('усреднение проводится по ');
    Form1.Memo1.Lines.Append(' ');
    Form1.Memo1.Lines.Append(' N_trees='+st+' деревьям');
    Form1.Memo1.Lines.Append(' ');
    str(k_max,st);
    Form1.Memo1.Lines.Append('Верхняя граница числа поколений');
    Form1.Memo1.Lines.Append(' ');
    Form1.Memo1.Lines.Append(' k_max = '+st);
    mx1:=Form1.PaintBox1.width; my1:=Form1.PaintBox1.height;
    mx2:=Form1.PaintBox2.width; my2:=Form1.PaintBox2.height;
    mx3:=Form1.PaintBox3.width; my3:=Form1.PaintBox3.height;

```

```

mx4:=Form1.PaintBox4.width; my4:=Form1.PaintBox4.height;
mx5:=Form1.PaintBox5.width; my5:=Form1.PaintBox5.height;
d_x1:=Round(mx1/10); d_y1:=Round(my1/10);
d_x2:=Round(mx2/10); d_y2:=Round(my2/10);
d_x3:=Round(mx3/10); d_y3:=Round(my3/10);
d_x4:=Round(mx4/10); d_y4:=Round(my4/10);
d_x5:=Round(mx5/10); d_y5:=Round(my5/10);

Form1.PaintBox1.Canvas.Pen.Color := clBlack;
Form1.PaintBox1.Canvas.Pen.Width := 1;
Form1.PaintBox1.Canvas.Brush.Style := bsSolid;
Form1.PaintBox1.Canvas.Brush.Color := BkColor;
Form1.PaintBox1.Canvas.FillRect(Rect(0,0,mx1,my1));
Form1.PaintBox1.Canvas.Rectangle(0+1,0+1,mx1-1,my1-1);

Form1.PaintBox2.Canvas.Pen.Color := clBlack;
Form1.PaintBox2.Canvas.Pen.Width := 1;
Form1.PaintBox2.Canvas.Brush.Style := bsSolid;
Form1.PaintBox2.Canvas.Brush.Color := BkColor;
Form1.PaintBox2.Canvas.FillRect(Rect(0,0,mx2,my2));
Form1.PaintBox2.Canvas.Rectangle(0+1,0+1,mx2-1,my2-1);

Form1.PaintBox3.Canvas.Pen.Color := clBlack;
Form1.PaintBox3.Canvas.Pen.Width := 1;
Form1.PaintBox3.Canvas.Brush.Style := bsSolid;
Form1.PaintBox3.Canvas.Brush.Color := BkColor;
Form1.PaintBox3.Canvas.FillRect(Rect(0,0,mx3,my3));
Form1.PaintBox3.Canvas.Rectangle(0+1,0+1,mx3-1,my3-1);

Form1.PaintBox4.Canvas.Pen.Color := clBlack;
Form1.PaintBox4.Canvas.Pen.Width := 1;
Form1.PaintBox4.Canvas.Brush.Style := bsSolid;
Form1.PaintBox4.Canvas.Brush.Color := BkColor;
Form1.PaintBox4.Canvas.FillRect(Rect(0,0,mx4,my4));
Form1.PaintBox4.Canvas.Rectangle(0+1,0+1,mx4-1,my4-1);

```

```

Form1.PaintBox5.Canvas.Pen.Color := clBlack;
Form1.PaintBox5.Canvas.Pen.Width := 1;
Form1.PaintBox5.Canvas.Brush.Style := bsSolid;
Form1.PaintBox5.Canvas.Brush.Color := BkColor;
Form1.PaintBox5.Canvas.FillRect(Rect(0,0,mx5,my5));
Form1.PaintBox5.Canvas.Rectangle(0+1,0+1,mx5-1,my5-1);

```

```
with Form1.PaintBox4.Canvas do begin
```

```

    Brush.Color := clWhite; FillRect(Rect(d_x4-4,my4-2,mx4-d_x4,2));{Оси фазовой
диаграммы}

```

```
Pen.Color:=ClGray;
```

```
x1:=d_x4; y1:=my4-d_y4;
```

```
x2:=mx4-d_x4; y2:=y1; PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]); TextOut(x2-10,y2+3,'x0');
```

```
x1:=d_x4; y1:=my4-d_y4;
```

```
x2:=x1; y2:=d_y4; PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]); TextOut(x2-20,y2,'sigma');
```

```
end;
```

```
end;
```

```
procedure draw_generation;
```

```
var dk_graph, {mask,} alpha_k, Ndoct_max_k : extended;
```

```
dy, id_next_k,xi: longint;
```

```
x11,y11,x22,y22 : integer;
```

```
begin
```

```
dk_graph:=0.95*mx1/(k_max+1);
```

```
{ mask:=0.85*dk_graph;}
```

```
// for yd: array[1..k_max,1..Nomer_doct_max] обнулить?
```

```
if k=1 then begin xd[1]:=10; yd[1,1]:=round(my1/2); end;
```

```
xd[k+1]:=xd[k] + round(dk_graph);
```

```
x11:=xd[k];
```

```
x22:=xd[k+1];
```

```
Ndoct_max_k:=exp( (k-1)*ln(Nmax));
```

```
alpha_k:=0.3*2*arctan( k * sin(alpha0/2)/cos(alpha0/2)/ Ndoct_max_k );
```

```
// alpha_k:=alpha0 * exp( (k-1)*ln(percent) );
```

```
id_next_k:=0; {schetchik doctorov v k+1-om pokolenii}
```

```
for i:=1 to N_doctors[k] do {i - nomer doctora v k-om pokolenii}
```

```
begin
```

```

if N_napr[k,i]=0 then
with Form1.PaintBox1.Canvas do begin
    Pen.Color := ClRed;
    ellipse(xd[k]-2,yd[k,i]+2,xd[k]+2,yd[k,i]-2);
end {stop vetka}
else
for j:=1 to N_napr[k,i] do begin
inc(id_next_k);
if N_napr[k,i]=1 then alpha:=0;
if N_napr[k,i]>1 then alpha:=-alpha_k/2+(j-1)*alpha_k/(N_napr[k,i]-1);
dy:=round(dk_graph*sin(alpha)/cos(alpha));
{str(yd[k,i],st); y1:=round(strToFloat(st));}
y11:=yd[k,i];
y22:=y11-dy;
yd[k+1,id_next_k]:=y22;
with Form1.PaintBox1.Canvas do begin Pen.Color:=ClBlack;
    PolyLine([Point(x11,y11),Point(x22,y22)]);
    ellipse(x22-2,y22+2,x22+2,y22-2);
end;
end;
end;
end;
procedure draw_p_n;
begin
with Form1.PaintBox2.Canvas do begin
Pen.Color:=ClRed;
for n:=0 to Nmax do begin
    x1:=round(d_x2+n*masx);    y1:=round(my2-d_y2-p[n]*masy);
    Pen.Color:=ClRed; ellipse(x1-3,y1+3,x1+3,y1-3);
    Brush.Color:=ClRed; Brush.Style:=bsSolid; Floodfill(x1,y1,ClRed,fsBorder);
    Pen.Color:=ClGray; Brush.Color:=ClWhite;
    str(n,st); TextOut(x1-4,my2-d_y2+3,st);
end;
Pen.Color:=ClBlack;
end;
end;

```

```

end;
procedure draw_f_x;
var x,dx,max_f,Nmax_max : real;
begin
    {if f(x0,x0,sigma) > f_exp(x0,x0,sigma)
    then max_f:=f(x0,x0,sigma) else max_f:=f_exp(x0,x0,sigma);}
    {x:=0.3*x0_k;}
    max_f:={1000.2}f(x0,x0,sigma);
    Nmax_max:=round(x0_k+3*0.8*x0_k);
    masx:=(mx2-2*d_x2)/(1.3*Nmax_max); masy:=(my2-2*d_y2)/max_f;
    with Form1.PaintBox2.Canvas do begin
        Brush.Color := clWhite; FillRect(Rect(d_x2-4,my2-2,mx2-d_x2,2));
        {Osi f(x)}
        Pen.Color:=ClGray;
        x1:=d_x2;   y1:=my2-d_y2;
        x2:=mx2-d_x2;   y2:=y1;   PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]);   TextOut(x2-
10,y2+3,'x');
        TextOut(x2-90,y2-20,'(кол-во направлений)');
        x1:=d_x2; y1:=my2-d_y2;
        x2:=x1; y2:=d_y2; PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]); TextOut(x2-20,y2,'f(x)');
        x1:=round(d_x2+x0*masx-5);           y1:=round(my2-d_y2-f(x0,x0,sigma)*masy-15);
        TextOut(x1,y1,'x0');
        dx:=1.1*Nmax/100;
        x:=0;
        repeat
            Pen.Color:=ClBlue;
            x1:=round(d_x2+x*masx);   y1:=round(my2-d_y2-f(x,x0,sigma)*masy);
            x2:=round(d_x2+(x+dx)*masx); y2:=round(my2-d_y2-f(x+dx,x0,sigma)*masy);
            PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]);
            analyse_key;
            x:=x+dx;
        until x>1.1*Nmax;
        end; {with PaintBox2}
    draw_p_n;
end;

```

```

procedure clear_board_p_x0;
begin
    with Form1.PaintBox3.Canvas do begin
        Brush.Color := clWhite; FillRect(Rect(d_x3-4,my3-2,mx3-d_x3+2,2));
        { Osi p_infin (x0) }
        Pen.Color:=ClGray; Pen.Width := 1;
        x1:=d_x3; y1:=my3-d_y3;
        x2:=mx3-d_x3; y2:=y1; PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]); Textout(x2-
15,y2+2,'x0');
        x1:=d_x3; y1:=my3-d_y3;
        x2:=x1; y2:=d_y3; PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]); Textout(x2-15,y2+15,'p_infin');
        x1:=round(d_x3+0*(mx3-2*d_x3)/x0_k); y1:=round(my3-d_y3-1*(my3-2*d_y3)/1);
        x2:=round(d_x3+x0_k*(mx3-2*d_x3)/x0_k); y2:=y1;
        Pen.Color:=ClRed; PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]); Textout(x1-10,y1,'1');
    end;
end;
procedure draw_p_infin_x0;
begin
    with Form1.PaintBox3.Canvas do begin
        x1:=round(d_x3+(x0-dx0)*(mx3-2*d_x3)/x0_k); y1:=round(my3-d_y3-ps*(my3-
2*d_y3)/1);
        x2:=round(d_x3+x0*(mx3-2*d_x3)/x0_k); y2:=round(my3-d_y3-p_infin*(my3-
2*d_y3)/1);
        Pen.Color:=ClGreen; {ellipse(x2-1,y2+1,x2+1,y2-1);}
        Pen.Width := 2;
        PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]);
    end;
end;
procedure draw_lines_of_levels_p_infin;
var ic,col_bar : integer;
    pl, pr, Delta_p, dp : real;
begin
    p_fin:=0.0001; p_inf:=0.9999;
    Delta_p:=p_inf-p_fin; dp:=Delta_p/17;
    if (p_infin < p_fin) then col_bar:=col[1];

```

```

if (p_infin > p_inf) then col_bar:=col[19];
for ic:=2 to 18 do begin
    pl:=p_fin+(ic-2)*dp; pr:=pl+dp;
    if (p_infin >= pl) and (p_infin <= pr) then col_bar:=col[ic];
    end;
with Form1.PaintBox4.Canvas do begin
    x1:=round(d_x4 + x0*(mx4-2*d_x4)/x0_k); y1:=round(my4-d_y4 - sigma*(my4-
2*d_y4)/sigma_k);
    x2:=round(d_x4 + (x0+dx0)*(mx4-2*d_x4)/x0_k); y2:=round(my4-d_y4 -
(sigma+dsigma)*(my4-2*d_y4)/sigma_k);
    Brush.Color := col_bar; FillRect(Rect(x1,y1,x2,y2));
    // проверка точки фазового перехода по x0
    if (first_sigma=true) and (sigma<0.2) and (p_infin > p_fin) and (x0<0.5) and (x0_kr=false)
    then begin x0_kr:=true;
        y1:=round(my4-d_y4+5);
        Brush.Color := clWhite;
        str(x0:1:2,st); TextOut(x1,y1,st);
        end;
    // проверка границы по sigma
    if (first_x0=true) and (x0<0.1) and (p_infin > p_fin) and (sigma_kr=false)
    then begin sigma_kr:=true;
        x1:=2;
        Brush.Color := clWhite;
        str(sigma:1:2,st); TextOut(x1,y1,st);
        end;
        end;
end;
procedure rosigrish_N_napr;
var r : real;
begin
    r:=random;
    for n:=0 to Nmax do if (r>xp[n]) and (r<xp[n+1]) then N_napr[k,i]:=n;
    end;
procedure tree;
begin

```

```

Form1.PaintBox1.Canvas.Brush.Color := clWhite;
Form1.PaintBox1.Canvas.FillRect(Rect(2,2,mx1-2,my1-2));
for k:=1 to k_max do begin N_doctors[k]:=0;
    for i:=1 to Nomer_doct_max do N_napr[k,i]:=0;
    end;
k:=1; N_doctors[k]:=1; // первое поколение, один доктор
repeat
    S:=0;
    for i:=1 to N_doctors[k] do begin
        rosigrish_N_napr;
        S:=S+N_napr[k,i];
    end;
    N_doctors[k+1]:=S;
    if draw=true then draw_generation;
    inc(k);
    until (k>k_max) or (N_doctors[k]=0);
    if k>k_max then inc(N_infin);
end;
procedure draw_Ndoct_k;
{ var Sx,Sy,Sxy,Sx2, a,b : real;
    mas_k, mas_ln_Ndoct : real;
    Nt : integer;}
var N_napr_mid : real;
begin
    with Form1.PaintBox5.Canvas do begin
        Brush.Color := clWhite; FillRect(Rect(d_x5+1,my5,mx5-d_x5,d_y5+10));
        {Osi }
        Pen.Color:=ClGray;
        x1:=d_x5-1; y1:=my5-d_y5;
        x2:=mx5-d_x5; y2:=y1; PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]); TextOut(x2-
10,y2+3,'k');
        x1:=d_x5-1; y1:=my5-d_y5;
        x2:=x1; y2:=d_y5; PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]); TextOut(5,2,'ln
(N_doct)');
        mas_k:=(mx5-2*d_x5)/(1.1*k_max);

```

```

mas_ln_Ndoct:=(my5-2*d_y5)/(k_max*1.3);
Pen.Color:=ClBlack;
for k:=1 to k_max do if N_doctors[k]<>0 then
begin
x1:=round(d_x5 + k*mas_k);
y1:=round(my5-d_y5 - ln(N_doctors[k])*mas_ln_Ndoct);
ellipse(x1-3,y1+3,x1+3,y1-3);
//Floodfill(x1,y1,clBlack,fsBorder); { тормозит работу программы }
end;
{метод наименьших квадратов} {MNK}
Nt:=0;
Sx:=0; Sy:=0; Sxy:=0; Sx2:=0;
for k:=1 to k_max do if N_doctors[k] <> 0 then
begin Nt:=Nt+1;
Sx:=Sx+k;
Sy:=Sy+ln(N_doctors[k]);
Sxy:=Sxy+k*ln(N_doctors[k]);
Sx2:=Sx2+sqr(k);
end;
if Nt<>1 then begin
a:=(Sx*Sy-Sxy*Nt)/(sqr(Sx)-Sx2*Nt); {tg}
b:=(Sy-a*Sx)/Nt;
N_napr_mid:=exp(a);
{проводим прямую}
x1:=round(d_x5+0*mas_k); y1:=round(my5-d_y5-b*mas_ln_Ndoct);
x2:=round(d_x5+k_max*mas_k); y2:=round(my5-d_y5-(a*k_max+b) * mas_ln_Ndoct);
Pen.color:=clRed; Pen.Width:=2; PolyLine([Point(x1,y1),Point(x2,y2)]); Pen.Width:=1;
{выводим найденное значение tg}
str(a:2:2,St); TextOut(round(5.5/10*mx5),2,'tg='+St+ ' ');
str(N_napr_mid:2:2,St); TextOut(round(5.5/10*mx5),15,'ср. число напр.='+St+ ' ');
str(x0:2:2,St); TextOut(round(3/10*mx5),2,'x0='+St+ ' ');
str(sigma:2:2,St); TextOut(round(3/10*mx5),15,'sigma='+St+ ' ');
end;
end;
end;

```

```

procedure x0_sigma_experiments;
begin
    parameters_of_f_x;
    massiv_p_xp;
    draw_f_x;
    N_infin:=0;          {сколько раз достигнута граница}
    for it:=1 to N_of_trees do begin
        tree;
        draw_Ndoct_k;
        analyse_key;
        end;

    ps:=p_infin;
    p_infin:=N_infin/N_of_trees;
    if first_x0 <> true then draw_p_infin_x0;
    draw_lines_of_levels_p_infin;
    end;

    procedure Evolution;
    BEGIN
        randomize; graphika;
        x0_kr:=false; sigma_kr:=false;
        sigma:=sigma0; first_sigma:=true;
    repeat
        clear_board_p_x0; ps:=0; p_infin:=0;
        x0:=x0_0; first_x0:=true;
    repeat x0_sigma_experiments; x0:=x0+dx0; first_x0:=false; until x0 > x0_k;
        sigma:=sigma+dsigma; first_sigma:=false;
    until sigma>sigma_k;
    END;

    procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject); begin Process_End:=false; Pause:=false;
Evolution; end; {Start}

    procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject); begin Process_End:=true; end;
{Stop}

    procedure TForm1.Button3Click(Sender: TObject); begin Pause:=not Pause; end;
{Pause}

end.

```