МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им .В.П.АСТАФЬЕВА

(КГПУ им. В.П.Астафьева)

Институт/факультет Институт математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета)

Кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания
(полное наименование кафедры)

Специальность 44.03.01 (050100) направление «Педагогическое образование» профиль «математика»
(код ОКСО и наименование специальности)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав.кафедрой алгебры, геометрии и методики их преподавания
(полное наименование кафедры)

д.п.н., профессор
В.Р. Майер
(подпись) (И.О.Фамилия)

«15» июня 2015 г.

Выпускная квалификационная работа

ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВАМ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Выполнил студент группы 42
(номер группы)

Елена Викторовна Генова
(И.О.Фамилия)

15.06.15
(подпись, дата)

Форма обучения заочная

Научный руководитель:
к. физ.- мат. н., доцент кафедры
алгебры, геометрии и методики их преподавания
В.В. Абдулкин
(ученая степень, должность, И.О.Фамилия))

15.06.15
(подпись, дата)

Рецензент:
Старший преподаватель кафедры математического анализа и методике обучения математике в вузе
О.В.Берсенева
(ученая степень, должность, И.О.Фамилия)

15.06.15
(подпись, дата)

Дата защиты июня 2015 г.

Оценка

Красноярск
2015

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Логическое доказательство математических утверждений известно еще с Древней Греции. Греческие математики пифагорейской школы уже в VI--V веках до нашей эры делали попытки расположить цепь математических доказательств в определенную последовательность, чтобы переход от одного понятия к другому не вызывал ни у кого никаких сомнений. Этот «дедуктивный» метод получил дальнейшее развитие у Эвклида, Архимеда и Апполония.[24] Понятие доказательства у них уже ни в чем существенном не отличается от нашего. Математика и, в частности, геометрия, стала наукой лишь тогда, когда в ней начали систематически применять логические доказательства, когда ее положения стали выводить не только путем непосредственных измерений, но и при помощи умозаключений, когда те или иные ее положения начали устанавливать в общем виде[9].

Проблема обучения учащихся доказательству всегда являлась одной из центральных в методике преподавания математики. В настоящее время её актуальность возросла. Дело в том, что осуществляемый процесс гуманизации образования предполагает направленность обучения на развитие личности, на формирование её свойств, в частности нравственности, что возможно лишь в контексте обучения доказательству. Обучение доказательству должно быть одной из целей обучения математики и являться составляющей основы конструирования содержания обучения математике в средней школе.[10] Последнее заставляет взглянуть на проблемы обучения доказательству учащихся с более широких позиций. Это обусловлено и тем, что в дидактику проникает новый подход к формированию мышления, идущей от работ Миракова Т.Н.[20]. Суть его заключается в рассмотрении мышления как диалога образов культуры, диалога разных культур, формы общения людей. В свете этого подхода доказательство понимается не только как цепочка логических утверждений и их обоснований, но как борение логик, что упрощает в обучении доказательству такие составляющие, как обучение поиску способов доказательства, их сравнению, выбору из них наиболее простого.

Школьная практика показывает, что в работе учителей преобладает тенденция учить ученика конкретному доказательству тех или иных теорем, но слабо ведётся работа по умению учеников вообще доказывать.

А если ученика не научить доказывать самому, то ему будет сложно в дальнейшем доказывать свою точку зрения. С помощью доказательства можно развить логику и мышление, систематизировать и применять полученные знания. Во многих случаях самостоятельное доказательство теорем увеличивает интерес к изученному предмету, побуждает к более вдумчивому изучению предмета. Следует, помнит, что поиск различных способов доказательств является важным фактором развития математического мышления. Ведущая функция, обучения учащихся доказательству, должна быть развивающая, а не информационная.

Актуальность выбора темы исходит из того, что умение решать задачи на доказательство необходимы любому ученику, желающему не только быть успешным на уроках, на математических конкурсах и олимпиадах, но и подготовиться к поступлению в высшее учебное заведение и успешно в них обучаться. Как показывает опыт, применение свойств геометрических преобразований к решению задач на доказательство часто вызывает затруднения, так как эти задачи требуют поиска пути и способа доказательства, проведения доказательственных рассуждений, выдвижения гипотез и их обоснования.

Новая форма итоговой аттестации предлагает наличие заданий на владение исследовательскими навыками, а также умение найти и применить нестандартные приёмы рассуждений. Эти навыки отрабатываются при решении задач на доказательство в задании В25 ОГЭ мо математике в 9 классе. На основе этого, нами был разработан элективный курс

«Геометрические задачи на доказательство». Данный электив может способствовать наиболее успешной сдачи экзамена по математике в 9 классе.

Цель: разработка методических рекомендаций по развитию навыков учащихся проводить математические доказательства и реализация их в рамках основного государственного экзамена .

Предмет исследования: методика обучения математическим доказательствам.

Объект исследования: процесс обучения математическим доказательствам.

На основе всего вышесказанного возникла следующая гипотеза : эффективность обучения учащихся геометрическим доказательствам находится в прямой зависимости от уровня сформированности у них приёмов учебных действий: сравнения, обобщения и подведения под понятие. Проблема, предмет и гипотеза обусловили выбор следующих задач.

Задачи:

1)проанализировать учебную, методическую, справочную литературу по математике;

2) раскрыть сущность основных понятий по данной теме;

3) изучить методы доказательств, в основном курсе математики;

4)изучить и систематизировать особенности обучения математическим доказательствам;

5) разработка элективного курса.

Глава I. Теоретические основы обучения доказательству

1.1. Логические основы доказательства в школьном курсе математики

Доказательство представляет собой цепочки умозаключений, ведущих от истинных посылок к доказываемым тезисам. Истинность посылок не должна обосновывается в самом доказательстве, а должна каким-либо образом устанавливаться заранее. В этом заключается логический смысл доказательства. Однако рассмотрение доказательства как педагогические задачи выходит за рамки этого представления и приобретает ,более широкий смысл. Доказательство выступает не только борением разных логик, но и борением эвристик, что обуславливает широкий поиск различных способов доказательств, их оценку.[10] Доказательство включает в себя три основных элемента:

1.Тезис (главная цель доказательства - установить истинность тезиса). Форма выражения тезиса - суждение.

К доказываемому предложению предъявляют следующие требования:

1. Тезис должен быть сформулирован ясно и определённо.
2. Тезис должен оставаться неизменным на протяжении всего доказательства.

2.Аргументы (основания) доказательства - положения, на которые опирается доказательство и из которых при условии их истинности необходимо следует истинность доказываемого тезиса. Форма выражения аргументов - суждение. Связывая аргументы, приходим к умозаключениям, которые строятся по определённым правилам.

Требования, предъявляемые к аргументам:

1) аргументы доказательства должны быть суждениями истинными и доказанными;

2) аргументы должны быть такими суждениями, истинность которых доказана независимо от тезиса.

Нарушение этого требования приводит к «порочному» кругу в доказательстве.

3. Демонстрация - логический процесс взаимосвязи суждений, в результате которого осуществляется переход от аргументов к тезису.

В демонстрации так же возможны ошибки: *а*) тезис не вытекает из аргументов, а произвольно присоединяется к ним; *б*) тезис выведен из аргументов путём ошибочного умозаключения. Число ошибок уменьшилось бы, если правила вывода были бы предметом изучения в школе.

Способы связи аргументов от условия к заключению суждения называют *методами доказательства*, которые в школьном курсе математики, делятся на прямые и косвенные.

Приёмы *прямого доказательства*:

1) приём преобразования условия суждения;

2) приём преобразования заключения суждения: отыскание достаточных оснований справедливости заключения; отыскание необходимых признаков справедливости суждения с последующей проверкой обратимости рассуждений;

3) приём последовательного преобразования то условия, то заключение суждения.

Приёмы *косвенного доказательства*[31]:

1) метод от противного;

2) разделительный приём.

Главные составляющие умения доказывать заключаются в следующем:

- умение анализировать задание;
- умение сформулировать требования задания;

● умение воспользоваться знаниями полученные ранее.

1.2. Проблемы обучения школьников доказательству

Уровень обучения доказательству должен характеризоваться умением школьников осуществлять цепочки дедуктивных умозаключений и применять некоторые эвристики.[33] На этом уровне следует формировать действия преобразования требования задачи в равносильное ему, выведения следствий, составления вспомогательных задач и т.д. Эти действия составляют основу применения многих эвристических приемов, методов научного познания в различных ситуациях. К тому же некоторые логические действия, например выведение следствий, имеют эвристический характер, используются в поиске способа доказательства. То есть, формирование логических действий включает знакомство учащихся с их эвристичностью использованием в поиске решения задачи. Это, в частности, и является проявлением единства логического и эвристического в доказательствах, осуществляемых учащимися.

Данный уровень по характеру своих действий и их соотнесению с курсом геометрии наиболее свойственен первым разделам систематического курса планиметрии, которые содержат и многие эвристики, основанные на ассоциациях «равенство отрезков- равенство треугольников», «равенство' углов - равенство треугольников», «сторона *а* треугольника больше стороны *б* у- гол, лежащий против стороны *а,* больше угла, лежащего против стороны *б »,* «сравнить два объекта - ввести в рассмотрение третий объект, находящийся с данными в известных отношениях» и т.д. Формированию эвристик учитель должен уделить самое серьезное внимание.

Первые уроки геометрии изобилуют изучением определений многих понятий (биссектрисы, смежных углов, вертикальных углов и т.д.), что позволяет формировать действия подведения объекта под понятие, выведение следствий. Задачи на доказательство, содержащиеся в этом разделе; дают возможность совершенствовать навыки дедуктивных умозаключений. Появление теорем, доказательство которых основано на 6-12 логических шагах, позволяет вести работу по приобщению школьников к разбору доказательств, формируя тем самым умение самостоятельно разбираться в готовых доказательствах. Изучение таких теорем дает основу для развития умения выделять и формулировать идею доказательства. Все это способствует и развитию потребностей учащихся в доказательстве. Доказательства в школьном курсе геометрии содержательны, свернуты и содержат. В значительной мере интуитивны компонент, а порой даже делается ссылка на утверждение отсутствующее в учебнике. Анализ доказательства: выделение логических шагов, поиск и устранение логических пробелов развертывание дедуктивных умозаключений в логическую схему, выделение идеи доказательства и его воспроизведение - составляет содержание третьего уровня понимания доказательства, а его усвоение - соответствующего уровня обучения школьников доказательству. Содержание этого уровня, особенно поиск и устранение логических пробелов в текст доказательства теоремы, выделение идеи доказательства готовит школьников. К новому уровню - самостоятельному поиску и осуществлению доказательства. Немаловажное значение в этом принадлежит и вооружению школьников эвристическими приемами, начало чему положено уже на более раннем уровне усвоения доказательства.

Огромная роль в самостоятельном поиске доказательств принадлежит умению использовать методы научного познания: аналогию, обобщение, конкретизацию, анализ и т.д.[9] Уж изучение первых теорем, например первого и второго признаков равенства треугольников, дает возможность формирование метода аналогии, а заключительный этап работы с задачей является хорошим средством обучения школьников обобщению и конкретизации. Умение использовать методы научного познания и умение самостоятельно выполнят доказательство можно считать содержанием следующего уровня работы с доказательством. На этом уровне осуществляются доказательства по аналогии, с использованием обобщения и т.д. Он соответствует программе 7-8 классов.

Итак, обучение доказательству включает в формирование потребности в логическом обосновании утверждений. умения осуществлять дедуктивные выводы и цепочки логических шагов, обучение логическим действиям и эвристическим приёмам, самостоятельному разбору готовых доказательств, открытию фактов, самостоятельному поиску и выполнению доказательства, умению использовать методы научного познания и, наконец, умению опровергать предложенные доказательства. Отдельные умения включают в себя более простые. Так, умение самостоятельно разбирать готовые доказательства включает умение выполнять дедуктивные выводы, их цепочки, владение логическими действиями, а умение самостоятельно доказывать предполагает не только умение разбираться в готовых доказательствах, но умение открывать теоремы, владение набором эвристических приёмов Существующие точки зрения на обучение доказательству определяют соответствующие им направление и исследование этой проблемы: логические аспекты обучения доказательству и эвристические аспекты этой проблемы. Оба направления представлены большим количеством работ и значительными результатами. В результате первого направления выделены различные логические приёмы мышления, лежащие в основе обучения доказательству, во втором направлении отражена совокупность эвристических приёмов мышления.

Предполагаются многозначительные рекомендации по использованию приемов, зачастую противоречащие друг другу и потому трудно реализуемые в практике обучения. Отсутствует целостная программа обучения доказательству с учётом её соответствия содержанию обучения математике в разных классах.

Выполненные исследования создали условия целостного решения проблемы обучения доказательству исходя из новой концепции обучения доказательству, основывающийся на деятельностном подходе, единстве логического и эвристического в обучении доказательству и более расширенном содержании самого понятия обучения доказательству.

1.3. Методы формирования умений доказывать.

Существует много различных подходов к обучению доказательства. Рассмотрим некоторые из них.

1.Сообщающий метод -этот метод предполагает создание единичных ситуаций незначительной сложности. Учитель создает проблемные ситуации лишь на определенных этапах урока, с тем, чтобы вызвать интерес школьников к изучаемому вопросу, сконцентрировать их внимание на своих словах и действиях. Проблемы решаются по ходу изложения нового материала самим учителем. При использовании в обучении данного метода роль учеников довольно пассивна, уровень их познавательной самостоятельности невысок.

2.Познавательный метод-суть данного метода состоит в том, что учитель, создавая проблемные, ситуаций, предоставляет конкретную задачу и сам в процессе изложения материала осуществляет показательное доказательство этой задачи. Здесь на личном примере учитель показывает ученикам, какими приемами и в какой логической последовательности следует доказывать конкретные задачи. Усваивая логику рассуждений и последовательность поисковых приемов, которыми пользуется учитель в процессе доказательства, ученики производят действия по образцу, мысленный анализ проблемных ситуаций, сопоставляют факты и явлений и знакомятся со способами построения доказательства.

3.Диалогический метод - учитель предоставляет конкретную задачу. Доказательство задачи идёт совместными усилиями учителя и учеников. Наиболее активная роль учеников проявляется на тех этапах доказательства, где требуется применение уже известных им знаний. Этот метод создает довольно широкие возможности для активной творческой, самостоятельной познавательной деятельности учеников, обеспечивает тесную обратную связь в обучении, ученик привыкает высказывать свои мнения вслух, доказывать и отстаивать их, что, как нельзя лучше, воспитывает активность его жизненной позиции.

4.Эвристический или частично-поисковый метод - применяется тогда, когда учитель ставит цель обучить учеников отдельным элементам самостоятельного доказательства задачи, организовать и вести силами учеников частичный поиск новых знаний. Поиски доказательства осуществляются либо в виде определенных практических действий, либо путем наглядно- действенного или абстрактного мышления - на основе личных наблюдений или информации, полученной от учителя, из письменных источников и т. д. Как и при других методах доказательства, учитель в начале занятия предоставляет ученикам задачу, чтобы на основе полученной информации, ученики сделали самостоятельные выводы.

1.4. Сравнительный анализ особенностей обучения доказательству в 7-9 классах по различным учебным пособиям

В разных учебных пособиях понятие доказательство раскрывается по-разному.

В учебники, геометрии 7-9 класс И.Ф. Шарыгин [34] понятие доказательство вводится следующим образом: « В математики в, отличии от другой науки, есть такие понятия, как теорема и доказательство». Да и сама математика стала наукой лишь с появлением в ней теорем и доказательств.

В учебнике геометрии 7-9 класс Л.С. Атанасяна [2] понятие доказательство вводится следующим образом: «В математики каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путем рассуждений, называется теоремой, а сами рассуждения называются доказательством теоремы. Фактически мы уже имели дело с теоремами и их доказательствами. Так, утверждение о равенстве вертикальных углов является теоремой, а рассуждения, которые мы провели, чтобы установить равенство вертикальных углов, и есть доказательство этой теоремы».

В учебник геометрии 6-10 А.В. Погорелов [25] понятие доказательство вводится следующим образом: «Правильность утверждения о свойстве той или иной геометрической фигуры устанавливается путём рассуждения. Это рассуждения называется доказательством.

С помощью таблицы попробуем сравнить наличие методов и приемов доказательств, из учебников разных авторов

Таблица 1. Сравнительный анализ учебников

	Геометрия 7-9 класс Л.С.Атанасян.	Геометрия 7-9 класс И.Ф.Шарыгин.	Геометрия 6-9 класс А.Ф.Погорелов.
Раскрытие понятия доказательства	+	+	+
Теоремы	+	+	+
Виды теорем (обратная)	+	+	-
Метод от	+	+	+

противного			
Теорема признак, теорема-свойство	-	+	-
Метод симметрии	+	+	+

Проанализировав данную литературу с помощью составленной таблицы мы легко можем увидеть, что все учебные пособия имеют различие между собой. Каждый из представленных учебников, имеет свою особенность. Но наиболее содержательным является учебник геометрии И.Ф. Шарыгина.

1.5. Методическая концепция обучения доказательству

Концепция обучения доказательству определяется не только содержанием понятия «доказательство», но и целями, которые выдвигаются в связи с рассмотрением доказательств. Несомненно, и то, что её формирование должно учитывать возрастные особенности школьников. Очевидно зависимость обучения доказательству от содержанию обучения математике, от приятной структуры курса, ступеней обучения. Формирование концепции обучения доказательству должно осуществляться с учётом методов, средств и форм обучения математике. Таким образом, обучение доказательству представляет собой сложную систему, структура которой обусловлена многочисленными связями между различными её составляющими.

В литературе существуют разные точки зрения на сущность понятия обучения доказательству. Например, под обучением доказательству мы понимаем обучение мыслительным процессам поиска, открытие и построение доказательства, а не обучение воспроизведению и заучиванию готовых доказательств.

Эта концепция явилась, по-видимому, протестом против традиционно сложившейся в прошлом методики, в основном ориентированной на разучивание теорем и их доказательств и мало внимания уделявшей обучению самостоятельному открытию теорем и способов доказательств.

Имеется ряд работ, в которых обсуждаются отдельные аспекты проблемы обучения доказательству. Прежде всего, это работы психологов, результаты которых служат обоснованием принятой концепции обучения доказательству (М.Г.Ярошевский)[36] Среди таких положений выделим следующие:

1) структуры мозга, руководящей аналитической деятельностью формируется к 13-14 годам;

2) развитие доказательного мышления проходит две стадии. В возрасте школьников скорее усваивается доказательства, чем самостоятельно пользуется ими, и ещё он создает их. В юношеском же возрасте уже заметно выступает критическое отношение к готовым доказательствам;

3) доказательство - специфическая деятельность, овладение которой требует специального, целенаправленного формирования её составляющих действий.

Действия, адекватные доказательству, имеют логический и эвристический характер. Их выделению и разработке методике формирования посвящены работы многих исследователей логических аспектов доказательства:

- обучение дедукции, включающие разъяснение простейших схем дедуктивных рассуждений, не явно применяемых в доказательствах, является необходимым условием успешного применения новых знаний (А.А.Столяр)[30].

●процесс доказательства - сложный процесс мышления, и он формируется постепенно, от простых к более сложным структурам. Этому должны соответствовать и постепенное усложнение структуры доказательства, и постепенное повышение его уровня строгости.

●деятельность по доказательству включает следующие действия:

- подведение объекта под понятие;

- выбор системы признаков, необходимых и достаточных для подведение под понятие, соответствующих конкретным условиям теоремы или задачи на доказательство;

- развёртывание условий;

- выведение системы следствий;

- выделение в условии поисковых областей;

- вычленение из формулировки теорем их объектов, условия, заключения;

- запись теоремы в краткой символической форме, построение для данной теоремы на языке необходимых и достаточных условий;

- построение умозаключений таким образом, чтобы вывод любого из умозаключений использовался в виде качества посылки в одном или нескольких последующих.

Таким образом, совокупность действий, составляющих доказательство утверждений, выделенная Э.И.Айвазяном[1], включает почти все действия, отмечаемые его коллегами. Среди математиков и учителей распространена и иная точка зрения на обучение школьников правилам вывода. Так, З.И.Слепкань[29] отмечает, что: «положительный эффект в обучении применению элементов логики и математической символики был обнаружен у способных школьников, а средние и слабые учащиеся по-прежнему плохо рассуждали и решали задачи» [27]. Попутно заметим, что лучший результат даёт обучение элементам логики наряду с обучением общим умственным действиям и специфическим умственным действиям, лежащим в основе умения доказывать. Между тем, даже самостоятельный разбор готового доказательства предполагает понимания хотя бы простейших и наиболее распространённых в доказательства силлогизмов.

Существуют различные точки зрения на содержание понятия «обучение доказательству». Авторы одной из них акцент ставят на обучение школьников поиску доказательству и самостоятельному его осуществлению, авторы другой - на обучении умении разбираться в готовых доказательствах. Уже анализ литературы показывает, что эти точки зрения не противоречат друг другу, они лишь отражают две стороны проблемы обучения доказательству: логическую и эвристическую. Между тем реальный процесс доказательства опирается на единство логического и эвристического, в нём логика и эвристика взаимосвязаны и взаимообусловлены.

Отсюда следует, что концепция обучения доказательству должна включать обучение как умение разбираться в готовых доказательствах, так и умение самостоятельно осуществлять их поиск и конструирование.

1.6.Отличительные особенности элективных курсов по математике

Элективные курсы – новый элемент школьного учебного плана, дополняющие содержание профиля, что позволяет удовлетворять разнообразные познавательные интересы школьников. Элективные курсы могут касаться любой тематики, как лежащей в пределах общеобразовательной программы, так и вне ее.

Элективные курсы это новейший механизм актуализации и индивидуализации процесса обучения. С хорошо разработанной системой элективных курсов каждый ученик может получить образование с определенным желаемым уклоном в ту или иную область знаний.

Элективные курсы выполняют три основных функции:

Одни из них могут выступать в роли «надстройки», дополнения содержания профильного курса. В этом случае такой дополненный профильный курс становится в полной мере углубленным, а школа (класс), в котором он изучается, превращается в традиционную спецшколу с углубленным изучением отдельных учебных предметов.

Другой тип элективных курсов может развивать содержание одного из базисных курсов, изучение которого в данной школе (классе) осуществляется на минимальном общеобразовательном уровне. Это позволяет интересующимся школьникам удовлетворить свои познавательные потребности и получить дополнительную подготовку, например, для сдачи ЕГЭ по этому предмету на профильном уровне.

Третий тип элективных курсов направлен на удовлетворение познавательных интересов отдельных школьников в областях деятельности человека как бы выходящих за рамки выбранного им профиля. Например, вполне естественной выглядит ситуация, когда школьник, обучающийся в классах гуманитарного профиля, проявит интерес к курсу «Информационный бизнес» или «Экология», а школьник из класса технологического направления захочет расширить свои знания в области искусства или изучить элективный курс «Зарубежная литература XX века».

Элективные курсы – обязательные курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы. В первую очередь - это занятия по выбору, позволяющие школьникам развить интерес к тому или иному предмету и определить свои профессиональные пристрастия. Но главная особенность элективного курса – в ходе освоения его ученики включаются в профессиональную (профильную) деятельность, помочь им в профессиональном самоопределении

Рекомендации по составлению элективного курса .

1. Название курса должно быть по возможности привлекательным (ведь этот курс будут выбирать среди других).

2. Программа курса должна включать новые для учащегося знания, не содержащиеся в базовой программе и не дублирующие программу по математике основной и средней школы.
3. Программа должна содержать знания, вызывающие познавательный интерес учащихся и представляющие ценность для обучения по выбранному ими профилю обучения (мотив обучения).
4. Как следствие предыдущего, программа должна позволять учащимся оценить свои потребности и возможности и сделать обоснованный выбор своего дальнейшего образовательного пути после окончания школы.
5. Программа должна определять такую последовательность изучения знаний, которая является наиболее «коротким путем»: изучение новых знаний опирается на недавно пройденный и легко восстанавливающийся в памяти учащихся учебный материал.
6. Несмотря на то, что содержание элективных курсов не стандартизируется, необходимо, чтобы сам курс работал на достижение обозначенных в стандарте целей среднего образования вообще и математического образования в частности. И это, прежде всего, направленность любого учебного курса на достижение метапредметных результатов, - в частности, на формирование надпредметных умений и обобщенных способов деятельности, таких, как освоение способов совместной деятельности, умение выстроить ответ, участвовать в дискуссии, оппонировать и т.д.
7. Цели образования в соответствии со стандартом достигаются через реализацию личностно – деятельностного подхода в обучении. Поэтому в рамках любого элективного курса акценты должны быть смещены на формирование умений через активную самостоятельную деятельность учащихся: проектная и исследовательская работа, практические и лабораторные занятия, экскурсии, дискуссии и т.д.

8. Содержание элективного курса должно предусматривать наличие аппарата обращения к внешкольным источникам информации и к опыту школьника.
9. При построении программы элективного курса полезен модульный характер. Можно менять независимые по содержанию модули местами, конструировать курс из разного их количества.
10. Программа элективного курса носит примерный характер. Учитель в соответствии с запросами учащихся и своими профессиональными возможностями может осуществлять некоторую доработку программы в процессе ее реализации.
11. Содержание промежуточного и итогового контроля по курсу выбирает и разрабатывает учитель.
12. Темп учения курса адекватен складывающейся ситуации: на каком – то материале задержались, где – то просмотрели бегло, что – то пропусти совсем. Поэтому программа курса должна быть вариативной (гибкой).

Особенно актуальна сегодня работа школьных методических объединений, предметных кафедр, профессиональных объединений учителей. Именно они должны стать инстанцией первичной экспертизы элективных курсов, представляемых в РЭС. Ведь кто, как не педагогический коллектив образовательного учреждения, может диагностировать потребность учащихся своей школы в том или ином учебном курсе и, соответственно, поручить учителю или группе учителей разработать программу элективного курса, а затем обсудить ее, скорректировать на заседании методического объединения. Возможно, такого рода деятельность вполне может стать хорошим началом на пути успешного похождения экспертизы учебных курсов в региональных структурах. Одновременно с этим окажет неоценимую поддержку работе экспертов РЭС и снимет эмоциональное напряжение среди наших коллег, чьи представленные учебные курсы в силу самых разных причин были отклонены

Делая вывод по главе, можно сказать следующее:

1.Главные составляющие умения доказывать заключаются в следующем:

● умение анализировать задание;

● умение сформулировать требования задания;

● умение воспользоваться знаниями полученные ранее.

2. Выполненные исследования создали условия целостного решения проблемы обучения доказательству исходя из новой концепции обучения доказательству, основывающийся на деятельностном подходе, единстве логического и эвристического в обучении доказательству и более расширенном содержании самого понятия обучения доказательству.

3. Рассмотрев все методы решения задач на доказательство, мною сделан вывод такие методы как: познавательный, сообщающий и диалоговый наиболее подходит учащимся 7 классов, на первых уроках геометрии, когда учащиеся только учатся доказывать геометрические задачи. Такой метод как Эвристический или частично-поисковый наиболее подходит к учащимся 8-9 классов, когда учащиеся могут самостоятельно доказывать задачи.

4. Проанализировав данную литературу с помощью составленной таблицы мы легко можем увидеть, что все учебные пособия имеют различие между собой. Каждый из представленных учебников, имеет свою особенность. Но наиболее содержательным оказался учебник геометрии И.Ф.Шарыгина.

5. Концепция обучения доказательству должна включать обучение как умение разбираться в готовых доказательствах, так и умение самостоятельно осуществлять их поиск и конструирование.

ГлаваII. Методика обучения математическим доказательствам

2.1 Методические рекомендации по обучению математическим доказательствам

2.1.1.Формирование потребности в логических рассуждениях и умений выполнять дедуктивные выводы в 7-9 классах

Формирования у учащихся потребности в доказательстве рассматривается Столяра.А.А.[30] как воспитание потребности в обосновании истинности каждого высказывания .Обучение доказательству осуществляется в систематическом курсе геометрии, но потребность в доказательстве должна формироваться раньше, в начальной школе, в 5-6 классах. Поэтому при изучении курса математики можно использовать задания следующих видов:

1. *Задания, связанные с иллюзией зрения.*

Одно время широко практиковались в качестве средства формирования потребности в обосновании истинности утверждений упражнения, связанные с иллюзией зрения. Затем наблюдался отказ от таких упражнений, мотивируемый тем, что их использование закрепляет мысль об опасности «верить глазам своим». Однако широкое использование наблюдения, опыта в обучении математике вновь вернуло такие упражнения в сборнике задач. Поскольку упражнения, связанные с иллюзией зрения, способствуют воспитанию потребности в обосновании истинности утверждений, то они могут использоваться в обучении учащихся. Однако они малоэффективны в воспитании потребности логического обоснования утверждений, поэтому увлекаться ими не следует. Примеры таких упражнений.

а) длина отрезка АВ (рис.№6) меньше длины отрезка CD;

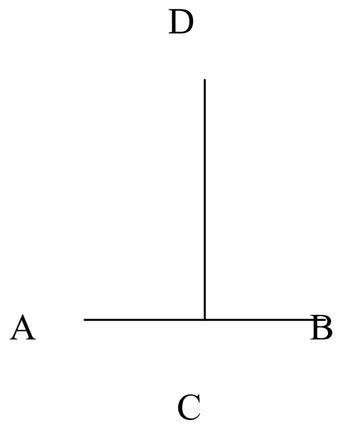


Рис. №6

Обоснованием ответа на вопрос служит измерение, измерив отрезки мы выясняем, что отрезки равны между собой.

2. *Задания на определение истинности высказывания.*

Воспитать потребность в рассуждениях можно только в процессе рассуждений. Поэтому необходимы такие упражнения, в которых учащиеся убедились бы в справедливости утверждения общим рассуждением. Приведем пример этого типа утверждений.

Верны ли утверждения:

а) все ломанные состоят из трёх звеньев;

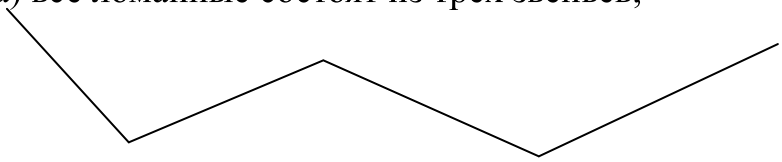


Рис. №7

Это утверждение легко опровергается приведением ломаной, например, состоящей из четырёх звеньев (рис.№7).

3. *Задания, в которых из одного утверждения можно выводить другое***.**

Задача: « В автобусе было 50 пассажиров. На одной остановки из него вышло12 пассажиров, а на другой 18 пассажиров. Сколько пассажиров осталось?

Сформулируем несколько утверждений, которые следуют из данной задачи».

Такими утверждениями могут быть следующие:

1) *на остановках вышло 30 пассажиров;*

2) *после выхода пассажиров на двух остановках в автобусе осталось 20 пассажиров;*

3) *на второй остановки вышло на 6 пассажиров больше и т.д.*

Развитие представления о том, что из одних утверждений можно выводить другие, целесообразно осуществлять не только при изучении геометрического материала, но и при решении геометрических задач.

2.1.2. Формирование умения доказывать на первых уроках геометрии

Опыт показывает, что не следует спешить с введением термина «доказать». Дело в том, что реализация требования доказать предполагает выполнение ряда действий, например преобразование требования задачи в равносильное ему, сопоставление условия задачи с ее требованием. Без овладения этими действиями в мышлении ученика не возникает тех ассоциаций, которые позволили бы ему осуществлять продвижение в решении задачи или в доказательстве теоремы. К числу таких ассоциаций относятся следующие:

«доказать - выделить условие и заключение теоремы, зафиксировать их словесно и графически»;

«доказать- преобразовать требование задачи (теоремы) в новое, из которого старое вытекает как следствие» и т. д.

Отсутствие в мышление школьника ассоциаций, связанных с термином «доказать», делает его бесцеремонным в решение задач. Многим учителям известна ситуация, когда ученик замолкает после выполнения рисунка, записи «дано» и «требуется доказать». Поэтому действенная помощь ученику может быть только в одном: сформировать в его мышлении нужные для осуществления доказательства ассоциации. На первых уроках геометрии 7 класса специальным предметом формирования должен быть прием *переформулировки требования задачи* (заключения теоремы), играющий большую рол в решении задач (доказательстве теорем). Основным средство формирования этого эвристического приема также являются специальные упражнения. Как известно, сущность приема переформулирования (преобразования) требования задачи заключается в замене требования задачи новым, равносильным ему. Использование этого приема предполагает владение приемами выведения следствий подведения объекта под понятие, навыками анализа ситуаций, т. е. по своему содержанию этот прием более сложен, чем ране рассмотренные, а потому его формированию надо уделить самое серьезное внимание.

В процессе поиска решения задачи часто приходится осуществлять не только выведение следствий, замену требования задачи равносильным первоначальному, но и *самостоятельно формулировать промежуточные* задачи. В процессе решения задач следует обращать внимание на развертывание дедуктивного обоснования. Ясно, что такая работа необязательна при выполнении каждого упражнения, в отдельных случаях она выполняется устно.

Для формирования у учащихся обобщенного стандарта логических рассуждений следует использовать упражнения в анализе заданного решения задачи. Таких упражнений в учебниках нет, но их легко составить путем трансформации зада учебника. Возьмем, к примеру, следующую задачу: «Найдите угол между биссектрисами смежных углов». Представим данную задачу в такой форме. Изучите решение задачи:

«Найдите угол между биссектрисами смежных углов и ответьте на указанные вопросы»

Решение:

Пусть углы *ABC* и *DBC* смежные, а лучи *BK* и *BL* - соответственно их биссектрисы.

Луч *BK* - биссектриса угла *ABC,* следовательно, *угол ABK=*

= углу KBC.

Угол CBL = углу DBL, т.к. *BL* - биссектриса угла *CBD.*

Углы *ABC* и *DBC* смежные, значит, угол *ABC* + *угол DBC* = 180.

Учитывая доказанное выше, получаем: угол *KBC* + *угол CBL =*

1/2 (угол А*BC* + *угол DBC)* = 90.

Таким разом, угол *KBL* = 90.

Вопросы:

1) Объяснить, почему *угол CBL = углу LBD?*

1) Откуда следует, *что угол ABD* развернутый?

2) Приведите условия, из которых следует, что *угол ABD =* 2 *(угол KBC + угол CBL)?*

Важное значениие в решении геометрических задач принадлежит умению читать чертёж. Актуальность умения обусловлена и тем, что в школьных учебниках условия многих задач на доказательство заданы чертежом. Под чтением чертежа понимают осознание чертежа в соответствии с условием задачи. Его составляют такие действия, как:

1) простое вычленение фигур;
2) сопоставимое вычленение фигур;
3) распознавание фигур;
4) переосмысливание элементов чертежа с точки зрения другого понятия;
5) сравнение фигур;

6) изменение взаимного расположения разов;

7) изменение структуры образов.

Различная наглядность (схемы, чертежи, модели) облегчает учащимся поиск доказательства задачи в том случае, если действия с применением наглядности соотносятся с необходимыми преобразованиями содержания этой задачи, т. е. с умением преобразо-вывать требование задачи, извлекать информацию из требования и условия задачи, вычленять отдельные элементы, комбинировать их и т. д.

Таким образом, формирование умения читать чертеж должно осуществляться в единстве с формированием умения анализировать условие и требование задачи. Эта цель хорошо достигается в процессе составления задач на готовых чертежах.

2.1.3.Развитие умения доказывать.

А.А.Столяр [30] формулирует такие требования, необходимые при развитии умения учащихся доказательствам:

1) школьный курс геометрии ни на одном этапе обучения не строится как формальная дедуктивная система и всегда остается в рамках содержательной модели;

2) в школьных доказательствах теорем неизбежны интуитивные элементы;

3) понимание потребности в логическом доказательстве лучше достигается на неочевидных примерах.

В обучении доказательствам выделяются два уровня:

1. 6-7 класс. Используемые в доказательствах правила вывода остаются невыясненными, они применяются в неявном виде. На данном этапе рекомендовано применять такие методы как:

сообщающий, познавательный и диалоговый, все эти три этапа предусмотрены, совместную работу учителя и ученика.

Рассмотрим эти методы на примере введения теоремы о сумме смежных углов.

1)Сообщающий метод:

дано: смежные углы;

доказать: что сумма смежных углов равна 180 ^{o};

доказательство: (учитель начинает доказательство теоремы сам), пусть $\angle(a_1b)$ и $\angle(a_2b)$ данные смежные углы (рис.1). Луч b проходит между сторонами a1 и a_2 развёрнутого угла. Поэтому сумма углов (a_1b) и (a_2b) равна развернутому углу, а чему равна сумма развернутого угла? (на этот вопрос ученики должны ответить самостоятельно, в правильном ответе и заключается продолжение доказательства). Развернутый угол равен 180^{o}, следовательно, сумма смежных углов равна 180^{o}, что и требовалось доказать.

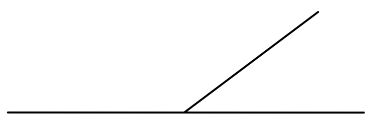


Рис. 1

2)Познавательный метод:

дано: смежные углы;

доказать: что сумма смежных углов равна 180 ^{o};

доказательство: (суть этого метода похожа на предыдущий, учитель начинает доказательство теоремы сам), пусть $\angle(a_1b)$ и $\angle(a_2b)$ - данные смежные углы (рис. 2). Луч b проходит между сторонами a_1 и a_2 развёрнутого угла. Поэтому сумма углов (a_1b) и (a_2b) равна развернутому углу, а чему равен развернутый угол? (на этот вопрос учитель отвечает сам, но при этом свой ответ обосновывает, к примеру говоря, что развернутый угол равен

180°,опираясь на определение развернутого угла). Что и требовалось доказать.

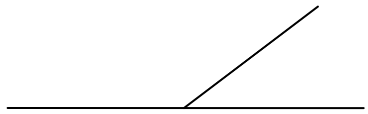


Рис.2

3) Диалогический метод:

дано: смежные углы;

доказать: что сумма смежных углов равна 180°;

доказательство: (суть данного метода состоит в совместном доказательстве этой теоремы учителя и учеников). Можно предоставить наглядный чертеж смежных углов, (рис. 3).Спросить ребят, что они видят на данном чертеже, если убрать луч b, (см. рис. 4). Развернутый угол. Чему равен развернутый угол? Развернутый угол равен 180°, что и требовалось доказать.

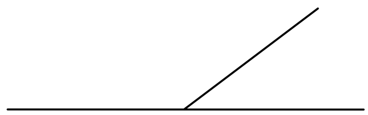


Рис. 3

Рис. 4

2. 8-9 класс. Несколько уточняется понятие доказательства, учащимся разъясняются простейшие правила вывода. На этом уровне ученикам становится доступным анализ доказательства, выявление его логической структуры и используемых в нем правил вывода. На данном этапе я рекомендую такой метод как эвристический или частично-поисковый, данный метод

направлен на наиболее самостоятельную работу ученика при доказательстве.

Рассмотрим этот метод на примере той же теоремы о сумме смежных углов. Эвристический или частично-поисковый метод:

дано: смежные углы;

доказать: что сумма смежных углов равна 180 ^{o};

доказательство: (этот метод можно представить следующим образом), учитель даёт задание измерить угол 1 и угол 2(рис.№5), далее сложить полученные результаты, затем предложить записать доказательство, одним из выше перечисленных методов.

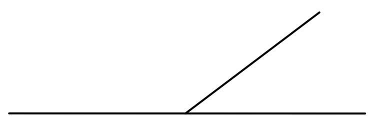


Рис. 5

Рассмотрев все методы решения задач на доказательство, можно еще раз напомнить что такие методы как: познавательный, сообщающий и диалоговый наиболее подходит учащимся 5-7 классов, на первых уроках геометрии, когда учащиеся только учатся доказывать геометрические задачи. Такой метод как Эвристический или частично-поисковый наиболее подходит к учащимся 8-9 классов, когда учащиеся могут самостоятельно доказывать задачи.

2.1.4. Способы закрепления теоремы.

Закрепление теоремы осуществляется в два этапа:

1. на уроке, где эта теорема изучается;
2. на последующих уроках.

Закрепление теоремы сводится к повторению ее формулировки и доказательства, к формированию у учащихся умений и навыков по применению теоремы к решению задач.

Обратим внимание , что способность ученика воспроизводить доказательство теоремы не всегда означает, что это доказательство им сознательно. Здесь на лицо разница в «усвоении доказательства» и в «запоминании доказательства».

В своих рекомендациях я укажу некоторые условия, обеспечивающие успешное запоминание учащимися теорем и их доказательств и покажу и рекомендации, которые может использовать учитель для закрепления теорем и их доказательства.

1. Установка на запоминание.
2. Запоминаемый материал- объект деятельности ученика.
3. Смысловая группировка учебного материала.
4. Эффективная организация повторения, распределенного во времени.
5. Развитие памяти ученика.
6. Эмоциональная окраска изучаемого материала.
7. Мотивация изучаемого материала путем показа его практического применения.

Рекомендация 1. После объяснения доказательства теоремы учителем один или несколько учащихся повторяет его, а остальные слушают.

Рекомендация 2. Учитель предлагает учащимся несколько вопросов, ответы на которые позволят повторить узловые части теоремы.

Для закрепления, например, теоремы о площади правильного многоугольника вопросы могут быть такие:

- Как читается теорема о площади правильного многоугольника?
- Как строится апофема в правильном многоугольнике?
- Каким образом мы разбиваем правильный многоугольник на равные треугольники?

- Чему равна площадь треугольника?
- Как найти периметр правильного многоугольника?
- Какие элементы правильного многоугольника нужно знать для нахождении его площади?

Рекомендация 3. Ученикам предлагается по ходу доказательства теоремы, которое проводит учитель или с которым они знакомится самостоятельно по учебнику, составить план доказательства.

Рекомендация 4. После изучения теоремы учащиеся сразу приступают к решению задач, а в конце урока, при подведении итогов возвращаются к теореме(вспоминают ее формулировку, основные этапы доказательства и т.д.)

Рекомендация 5. На уроке можно организовать такую работу, которая бы заменила проработку теоремы дома.

Для этого учитель записывает на доске вопросы, адресованные учащимся, по изученной теореме. Школьникам предлагается :

- прочитать доказательство теоремы по учебнику;

- подготовится отвечать на вопросы, записанные на доске;

- помочь подготовиться своему соседу по парте;

-ответить соседу по парте на поставленные вопросы и выслушать его ответы на них, исправляя возможные ошибки;

- сообщить учителю о готовности своей и соседа отвечать на вопросы.

Ученики, первыми подготовившие ответы на вопросы, отвечают учителю. Те из них, кто хорошо ответил на вопросы, назначаются ассистентами и по указанию учителя опрашивают других учащихся. Заметим, что целесообразно для такой работы в пары организовать учащихся, приблизительно равных по уровню подготовленности и скорости работы. Школьникам, выполнившим работу, следует предложить дополнительные задания.

Рекомендация 6. На доске или на слайде, если есть возможность, подготовить презентацию, заранее готовится запись доказательства теоремы в виде одних лишь выводов, без соответствующих аргументаций каждого из них. Учащимся предлагается привести большую или меньшую посылки для каждого вывода.

Рекомендация 7. Слабоуспевающие учащиеся могут отработать доказательство теоремы, используя тетрадь с печатной основой (рабочую тетрадь).

Рекомендация 8. Проработка доказательства теоремы по учебнику дома. Отметим, каким должен быть общий подход к выполнению домашних заданий по учебнику геометрии.

1. Воспроизведение материала, изученного в школе:
   - Вспомнить главное из того, что изучалось на уроке;
   - Сделать по памяти чертеж и запись.
2. Восприятие изучаемого материала по учебнику:
   - Прочитать весь текст в целом, сделать чертеж и сравнить его с чертежом из учебника;
   - Разделить части речи на смысловые части;
   - Выделить в каждой части основную мысль и записать;
   - Вспомнить тот материал, на который делаются ссылки;
   - Выборочно прочитать наиболее трудные места, постараться осмысленно усвоить их.
3. Повторное воспроизведение изучаемого материала:
   - По выполненному чертежу и записям воспроизвести вслух изученное, отвечая на вопросы плана;
   - Выучить формулировки, запомнить обозначения;
   - Наметить схему будущего ответа.
4. Творческая деятельность учащихся в связи с изучением материала:

- Доказать теорему или воспроизвести текст(или его часть) при другом расположении чертежа и других обозначениях;
- Увидеть и выделить частные случаи;
- Попытаться обосновать выделенные частные случаи;
- Попытаться найти другой способ доказательства или вывода;
- Связать изучаемое с уже известным.

Организуя закрепление теоремы, учитель должен знать об основных формах реконструкции воспроизводимого учащимися материала, в том числе и доказательства теорем. Формы реконструкции могут быть такими:

- конкретизация и детализация того, что дано в более общем или сжатом виде ;

- обобщение того, что в подлиннике дано в конкретной , развернутой , детализированной форме;

- замена одного содержания другим, неравнозначным по смыслу, а так же по степени общности и детализации;

- смещении или перемещение отдельных частей подлинника;

- объединение того, что дано отдельно от друг от друга и разъединение того, что в оригинале связанно между собой;

- дополнения, выходящее за пределы подлинника;

- искажение смыслового содержания оригинала в целом, равно как и его отдельных частей.

Подобные формы рекомендаций доказательства теорем учитель может заранее предвидит, если будет вести учет достижения каждым учащимся обязательных результатов обучения.

Я привела несколько приемов закрепления теорем и учитель в праве выбрать тот из них который в данный момент будет наиболее эффективен, но подчеркнем еще раз, что основным средством закрепления теорем является их применение к решению задач. Именно в этом учащиеся испытывают большие трудности.

Задачи, к которым приложена отрабатываемая теорема, должны быть разнообразны как по содержанию, так и по методам решения.

2.2. Программа элективного курса «Геометрические задачи на доказательство» (в рамках ОГЭ по математике 9 класса)»

Данный курс способствует подготовке учащихся к более успешной сдачи выпускных экзаменов в 9 классе. Его содержание расширяет базовый курс геометрии, способствует ознакомлению учащихся с нестандартными, интересными подходами при решении задач на доказательства, развитию логического мышления учащихся. Предлагаемые задачи на доказательства очень удобны для закрепления нового материала и попутного повторения по любому разделу школьного курса геометрии.

2.2.1.Пояснительная записка

Для жизни в современном обществе важным является формирование математического стиля мышления, проявляющегося в определённых умственных навыках. В арсенал примеров и методов человеческого мышления в процессе математической деятельности естественным образом включаются индукция и дедукция, анализ и синтез, обобщение и конкретизация, классификация и систематизация, абстрагирование и аналогия.

Без математической подготовки невозможна постановка образования современного человека. Всё больше специальностей, требующих высокого уровня, связано с непосредственным применением математики (экономика, бизнес, финансы, техника, физика, химия, информатика, биология, психология и многое другое). Таким образом, школьников, для которых математика становится профессионального значимым предметом, становится больше.

Геометрические задачи на доказательство вскрывают механизм логических построений, вырабатывают умение формулировать, обосновывать и доказывать суждения, тем самым развивают логическое мышление.

Актуальность выбора темы исходит из того, что умение решать задачи на доказательство необходимы любому ученику, желающему не только быть успешным на уроках, на математических конкурсах и олимпиадах, но и подготовиться к поступлению в высшее учебное заведение и успешно в них обучаться. Как показывает опыт, применение свойств геометрических преобразований к решению задач на доказательство часто вызывает затруднения, так как эти задачи требуют поиска пути и способа доказательства, проведения доказательственных рассуждений, выдвижения гипотез и их обоснования.

В ходе своей дипломной работы, мною был разработан элективный курс, который направлен на повышения качества решения задания В25 в Общем Государственном Экзамене по математике в 9 классе. Просмотрев статистику, результатов сдачи ГИА(ОГЭ) по математике в 9 классе можно отметить, что уровень решения задания В25 (задача на доказательство) очень низкий. Если в 2013 году по Красноярскому Краю процент выполнения задания В25 был 13,64% то в 2014 году он стал ниже 11,2%, на основе этого можно утверждать, что предложенный мною электив, достаточно актуален в ходе подготовке учащихся к сдачи ОГЭ по математике в 9 классе.

Программа адресована учащимся 9 классов. Данный курс рассчитан на 10 часов. Предлагается для учащихся в классах с углубленным изучением математики, при необходимости его можно применять в общеобразовательных классах. Курс предусматривает формирование устойчивого интереса к предмету, появление и развитие математических способностей, выбор профиля дальнейшего обучения.

Цель данного курса: обучение методам и способам доказательств, совершенствование навыков решения задач на доказательство по темам: «Треугольник», «Четырёхугольник», «Окружность», «Подобие».

Задачи курса:

- научить проводить доказательственные рассуждения при решении задач, используя известные теоремы, обнаруживая возможности для их использования;

– научить использовать дополнительные построения, алгебраический аппарат, идеи симметрии при решении задач на доказательство;

– подготовить учащихся к решению заданий типа B25 ОГЭ по математике в 9 классе.

2.2.2.Содержание курса

1. Геометрические задачи на доказательство. Состав теоремы, доказательство от противного, метод математической индукции.
2. Решение задач на доказательство по теме: «Треугольники». Равенство треугольников, линии в треугольнике, углы в треугольнике, сравнение сторон и углов треугольника.
3. Решение задач на доказательство по теме: «Четырёхугольники». Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция, средняя линия треугольника, замечательные точки треугольника.
4. Решение задач на доказательство по теме: «Окружность». Касательные к окружности. Хорды. Углы в окружности. Взаимное расположение окружностей. Вписанные и описанные треугольники.
5. Решение задач на доказательство по теме: «Подобие». Подобие фигур.

2.2.3.Учебно-тематическое планирование материала

№	Тема	Кол-во часов	Форма занятия
1.	Вводное занятие. Геометрические задачи на доказательство.	1	Урок-диалог
2.	Решение геометрических задач на доказательство по теме: «Треугольники».	2	Лекция Практикум
3.	Решение геометрических задач на доказательство по теме: «Четырёхугольники».	2	Лекция Практикум
4.	Решение геометрических задач на доказательство по теме: «Окружность».	2	Лекция Практикум
5.	Решение геометрических задач на доказательство по теме: «Подобие».	2	Лекция Практикум
6.	Итоговая проверочная работа.	1	Проверочная работа

2.2.4.Требования к уровню подготовки учащихся

В результате изучения курса учащийся должен:

– знать основные формулы и формулировки теорем и уметь их применять при решении задач на доказательство;

– уметь анализировать полученное решение;

– владеть основными методами доказательств, используемыми в геометрии;

– владеть основами эвристической деятельности (поиска решения), составить план доказательства;

– уметь строить примеры и контрпримеры для подтверждения (опровержения) утверждения.

2.2.5.Библиографический список

1. Барыбин К.С. Сборник геометрических задач на доказательство: пособие для учителей / К.С. Барыбин. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1954. – 152с.

2. Программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев: Математика. 5-11 кл. / Сост. Г.М. Кузнецова, Н.Г. Миндюк. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 2011. – 320с

3. Сборник нормативных документов. Математика / сост. Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев. – М.: Дрофа, 2010. – 128с.

4. Семиряжко В.А. Теория и практика предпрофильной подготовки. Элективные курсы по математике: учебно-методическое пособие / В. А. Семиряжко, Е.В. Лебедева. – Липецк: ЛГТУ, 2009. – 70с.

5. Шарыгин И. Ф. Стандарт по математике: 500 геометрических задач: кн. Для учителя / И.Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение, 2005. – 205 с.

2.2.6. Практические задания по темам:

I. Треугольники

1. В треугольнике ABC AL – биссектриса угла A. Через точку A проводят прямую перпендикулярно AL и из вершины B опускают на эту прямую перпендикуляр BB_1. Доказать, что периметр треугольника BB_1C больше периметра треугольника ABC.

Доказательство :

Пусть прямая KM перпендикулярна биссектрисе AL (рис.1). Опустим из точек B и C перпендикуляры BB_1 и CC_1 на прямую KM и продолжим перпендикуляр CC_1 на отрезок C_1E, равный CC_1. Соединим прямой точку E с точкой A и докажем, что линия BAE – прямая. AL – биссектриса угла BAC, а потому

$$BAB_1 = CAC_1, \qquad (1)$$

как дополнения равных углов до прямого. Точки A и B_1 лежат на перпендикуляре MK, проведенном через середину отрезка CE, а потому

$$AC = AE \text{ и } B_1C = B_1E \qquad (2)$$

Значит, треугольник CAE – равнобедренный и его высота AC_1 есть биссектриса угла CAE, т.е

$$EAC_1 = CAC_1 \qquad (3)$$

Из равенств (1) и (3) следует, что $BAB_1 = EAC_1$, но B_1AM – прямая, следовательно, и линия BAE – прямая.

В треугольнике BB_1E $BA + AE < BB_1 + B_1E$, или, учитывая равенство (2), $BA + AC < BB_1 + B_1C$; прибавив к обеим частям неравенства по BC, получим что $P_{ABC} < P_{CBB1.}$

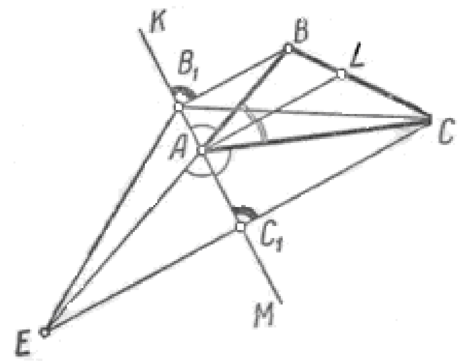


Рис.1

2. *(УМК «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014» под ред. Лысенко Ф.Ф. [19])* **В треугольнике ABC(рис.2) BM и CN – биссектрисы внешних углов B и C, AM и AN – перпендикуляры, опущенные из вершины A соответственно на BM и CN. Доказать, что длина отрезка MN равна полупериметру треугольника ABC.**

Доказательство :

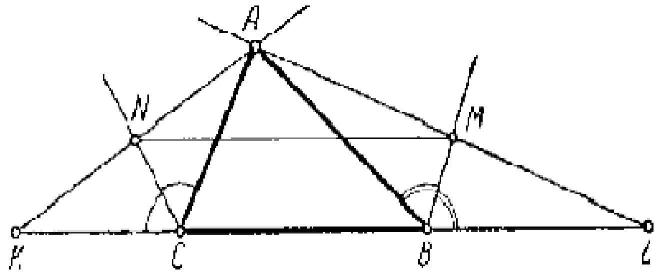


Рис. 2

Пусть (рис.2) BM – биссектриса внешнего угла ABL, а CN – биссектриса угла ACK, $AM \perp BM$, $AN \perp CN$. В треугольнике ABL биссектриса BM – и высота, а потому треугольник ABL –равнобедренный и AB=BL, AM=ML.

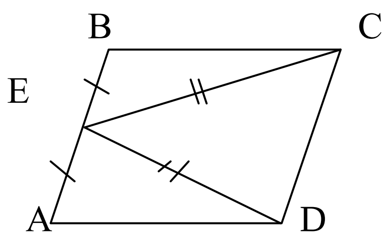
Аналогично AC=CK и AN=NK. Следовательно, P_{ABC}= AB+BC+CA= BL+BC+CK=KL. В треугольнике KAL отрезок MN – средняя линия, а потому MN=1/2KL=1/2$P_{ABC.}$

II. Четырехугольники

1. *(УМК «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014» под ред. Лысенко Ф.Ф. [19])* **В параллелограмме ABCD точка E середина стороны AB. Известно, что ED=EC(рис.3).**

Докажите что данный параллелограмм- прямоугольник.

Доказательство :Треугольники *BEC* и *AED* равны по трём сторонам. Значит, ∠ CBE и ∠ DAE равны. Так как их сумма равна 180 °, то углы равны 90° . Такой параллелограмм — прямоугольник.



(рис.3)

2. Внутри треугольника ABC взята точка M и построены параллелограммы $AMBM_1$, $BMCB_2$, $CMAM_3$. Доказать, что прямые AM_2, BM_3, CM_1 пересекаются в одной точке.

Доказательство :

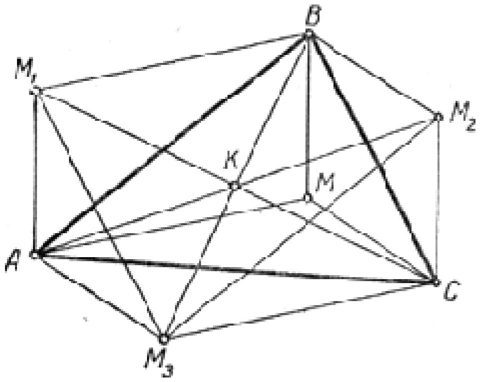
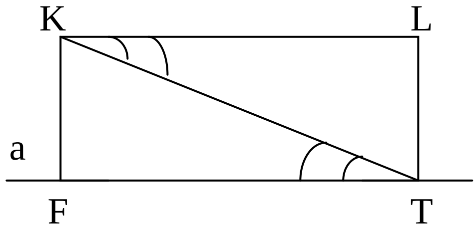


Рис.4

В параллелограмме MBM_2C (рис.4) сторона BM_2 равна и параллельна стороне MC; в параллелограмме MCM_3A сторона AM_3 равна и параллельна стороне MC, а потому равна BM_2 в четырехугольнике ABM_2M_3 равна и параллельна стороне AM_3, и, следовательно, ABM_2M_3 – параллелограмм, а потому его диагонали AM_2 и BM_3 в точке пересечения К делятся пополам. Аналогично доказывается, что в параллелограмме CM_3M_1B диагональ CM_1 пересечет диагональ BM_3 в ее середине К; следовательно, прямые AM_2, BM_3, CM_1 пересекаются в одной точке.

3. *(УМК «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014» под ред. Лысенко Ф.Ф. [19])* **Точки K и L лежат по одну сторону от прямой a. перпендикуляры KF и LT, проведенные к прямой a равны. Точка O середина отрезка KT.(рис 5) Докажите, что угол OKL = углу OTE.**

Доказательство. По условию KF перпендикулярна FT и LT перпендикулярна LT, следовательно KF параллельна LT. А так KF=LT по условию, то четырехугольник – параллелограмм. Делаем вывод KL параллельна FT как противоположные стороны параллелограмма. Таким образом, угол OKL=углу OTF как накрест лежащие углы при параллельных прямых KL и FT и секущей KT, что требовалось доказать.



(рис5)

4. В параллелограмме проведены биссектрисы внутренних углов до взаимного пересечения. Доказать, что четырехугольник, образованный этими биссектрисами, - прямоугольник.

Доказательство :

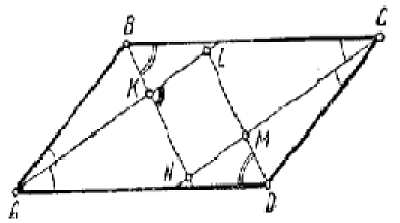


Рис.6

LAD = NCB и N B C= LDA, как половины равных углов (рис.6), а потому треугольники BCN и DAL равны, откуда AL=CN и BN=DL. Аналогично АК=СМ и ВК=DM. Тогда KL=MN и KN=LM, как разности равных отрезков. Внешний угол треугольника АВК АКN= АВК+ВАК=90^0, и потому NKL=90^0; следовательно, четырехугольник KLMN – прямоугольник.

II. Окружность

1. *(УМК «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014» под ред. Лысенко Ф.Ф. [19])* **В окружности с центром *O* проведены две равные хорды *AB* и *CD*. На эти хорды опущены перпендикуляры *OK* и *OL* соответственно(рис.7). Докажите, что *OK* и *OL* равны.**

Доказательство . Проведём радиусы *OA, OB, OC, OD*. Треугольники *AOB* и *COD* равны по трём сторонам. *OK* и *OL* — их следовательно, они равны как соответственные элементы равных высоты, проведённые к равным сторонам, треугольников.

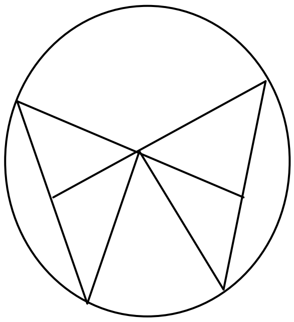


Рис. 7

2. В угол A вписана окружность O, которая точками касания делится на две дуги(рис.8). К меньшей дуге проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C; к большей дуге проведена касательная. Пересекающая стороны в точках D и E. Доказать, что: 1) периметр треугольника ABC не зависит от положения касательной BC; 2) разность между полупериметром треугольника ADE и стороной DE постоянна.

Доказательство : 1) P_{ABC} = AB+BC+CA=AB+BL+LC+CA; но BL=BK и CL=CM (рис.4), как касательные, проведенные из одной внешней точки к окружности, а потому P_{ABC}=AB+BK+CM+AC=AK+AM. Величина этой суммы постоянна, так как положение точек K и M не меняется, следовательно, величина периметра треугольника ABC не зависит от положения касательной BC.

2) 1/2P_{ADE} – DE=1/2(AD-DE+EA)=1/2(AD-DK+EA-EM)=1/2(AK+AM).

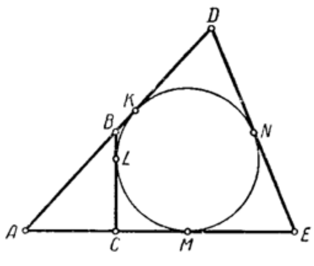


Рис. 8

3. В треугольнике ABC: AA_1, BB_1, CC_1 – высоты и A_2, B_2, C_2 – середины высот. Доказать, что окружности $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ проходят через ортоцентр треугольника ABC и каждая из них проходит через середину одной из сторон.

Доказательство :

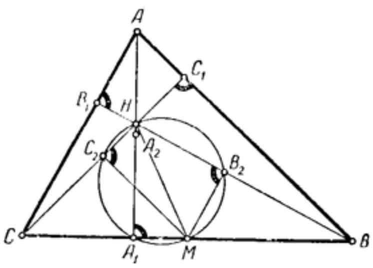


Рис.9

Возьмем точку M – середину стороны BC (рис.9) и на отрезке HM, как диаметре, построим окружность. Угол MA_1H – прямой, прямая MB_2 – средняя линия треугольника BCB_1, а потому MB_2 параллельна CA, и, значит, угол MB_2H тоже прямой; аналогично и угол MC_2H прямой, а потому построенная окружность пройдет через точки A_1, B_2, C_2. Следовательно, окружность $A_1B_2C_2$ проходит через ортоцентр H и середину стороны BC.

Аналогично доказывается теорема для остальных случаев.

4. Во вписанном остроугольном треугольнике ABC H - ортоцентр; перпендикуляр, опущенный из ортоцентра H на сторону AB, пересекает ее в точке D, а дугу AB – в точке E. Доказать, что AH=AE.

Решение:

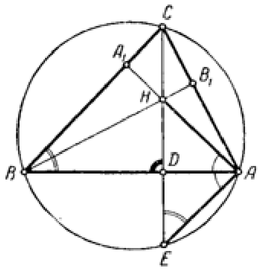


Рис 10

ABC=AEC (рис.10), как вписанные, опирающиеся на дугу AC, но угол BAA_1 дополняет угол ABC до прямого, а угол BAE дополняет угол AEC, следовательно, BAA_1=BAE. Поэтому прямоугольные треугольники HAD и EAD, имеющие по равному углу и общему катету, равны, откуда AH=AE.

5. Из точки окружности опущены перпендикуляры на стороны вписанного в нее треугольника. Доказать, что основания перпендикуляров лежат на одной прямой (прямая Симсона)

Решение: Пусть P – точка окружности ABC (рис.11) и K, L, M – основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на стороны BC, CA и AB треугольника. В четырехугольнике CKPL PLC +CKP = 180^0, и потому он вписываем, откуда PKL = PCL. Аналогично PKM = PBM. Но PCL= PBM, а следовательно, PKL = PKM, и прямая KL совпадает с прямой KM, т. е. точка K, M и N лежат на одной прямой.

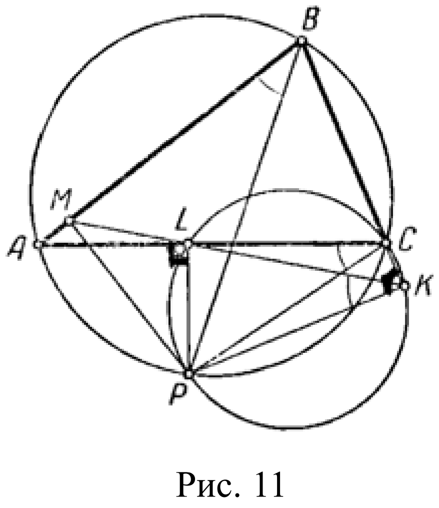


Рис. 11

III. Подобие

1. Во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

Доказательство :

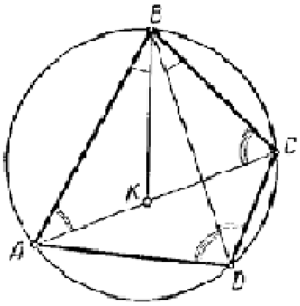


Рис .12

Проведем прямую BK (рис.12) так, что ABK = DBC; при этом KAB=CDB, как вписанные, опирающиеся на одну дугу, следовательно, треугольники ABK и BCD подобны, откуда AK:CD = AB:BD, или

AK·BD=CD·AB (1);

BCK = BDA, как вписанные, опирающиеся на одну дугу, KBC = ABD, как суммы равных углов, следовательно, треугольники CBK и ABD подобны и KC:BC=DA:BD, или

KC·BD=BC·DA (2).

Складывая равенства (1) и (2), получим, что

AK·BD+KC·BD=(AK+KC)·BD=AC·BD=AB·CD+BC·DA.

2. *(УМК «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014» под ред. Лысенко Ф.Ф. [19])* **Известно, что около четырехугольника ABCD можно описать окружность и что продолжение сторон AB и CD четырехугольника пересекаются в точке M.(рис.13) Докажите, что треугольники MCB и MDA подобны.**

Доказательство. У указанных треугольников угол M общий. Кроме того, угол MCB =180 °, ∠ ABC как смежный, а ∠ ADC=180 °, ∠ABC по свойству вписанного четырехугольника. Поэтому∠ADM = ∠CBM, и указанные треугольники подобны по двум углам.

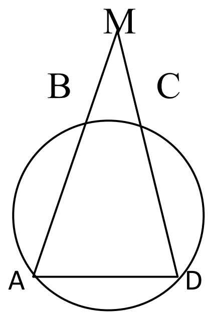


Рис. 13

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около этого треугольника окружности.

2. Докажите, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

3. Докажите, что если в треугольнике совпадают центры вписанной и описанной окружностей, то этот треугольник правильный.

4. Окружность радиуса 25 пересекает каждую из сторон четырёхугольника в двух точках. Все образовавшиеся хорды равны между собой и равны 14. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через B, вторично пересекает данные окружности в точках K и M. Докажите, что все возникающие таким образом треугольники AKM подобны между собой.

6. Диагонали вписанного четырёхугольника перпендикулярны. Докажите, что сумма квадратов двух его противоположных сторон равна квадрату диаметра описанной окружности.

7. Докажите, что диагональ AC четырёхугольника ABCD делит диагональ BD в отношении, равном отношению площадей треугольников ABC и ADC.

8. Докажите, что в тупоугольном треугольнике медиана к большей стороне меньше радиуса описанной окружности.

9. Прямая, проходящая через вершину равнобедренного треугольника, делит его на два треугольника. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны.

10. Пусть ABCD – параллелограмм. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и CDA лежат на диагонали BD и делят её на 3 равные части.

11. Пусть O – центр описанной, I – центр вписанной в треугольник ABC окружности, H – точка пересечения высот этого треугольника. Докажите, что если угол A равен 60 градусам, то точки B, C, O, I, H лежат на одной окружности.

12. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения её диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Заключение

Тема моей курсовой работы: «Обучение математическим доказательствам в основной школе». В ходе всей курсовой работы я придерживалась поставленной цели: разработка методических рекомендаций по развитию навыков учащихся проводить математические доказательства и реализация их в рамках основного государственного экзамена.

В своей дипломной работе я рассмотрела, в чем заключаются основные проблемы обучения доказательству в основной школе. Проблема обучения учащихся доказательству всегда являлась одной из центральных в методике преподавания математики. В настоящее время её актуальность возросла. Особое внимание хотелось бы обратить на то, что основная проблема заключается в том, что учителя учат ученика уже готовым доказательствам, а не доказывают совместными усилиями. Обучение доказательству должно быть одной из целей обучения математики и являться составляющей основы конструирования содержания обучения математике в средней школе. Следует, помнит, что поиск различных способов доказательств является важным фактором развития математического мышления.

Рассмотрев понятие доказательство, мы узнали, что оно включает в себя три основных элемента: тезис, аргументация и демонстрация; предъявляются требования к осуществлению каждой части и выделяются основные ошибки в осуществлении доказательства. Узнали, что существуют приёмы косвенного и прямого доказательства.

Во второй главе мы выяснили, что потребность в доказательстве должна формироваться ещё в начальной школе и в 5-6 классах. Для этого могут использоваться задания, связанные с иллюзией зрения, на определение истинности высказывания, задания в которых их одного утверждения можно выводить другое.

Так же узнали, что важное значение в решении задач принадлежит умению читать чертёж, что различная наглядность облегчает учащимся поиск доказательства задач.

Изучив различные учебные пособия по геометрии, мы выявили, что понятие доказательство вводится везде разными способами.

В ходе изучения мы рассмотрели различные методики формирования умения доказывать: сообщающий, познавательный, диалогический и эвристический или частично поисковый методы.

В результате проведенной работы были выполнены поставленные задачи. По изучению научной, учебной и методической литературы, собран и систематизирован теоретический материал. Раскрыты основные понятия по данной теме. Рассмотрены различные методы формирования умения доказывать.

В заключении заметим, что успех в обучении учащихся доказательству теорем определяется не применением одного какого-нибудь приема или метода, а системой преподавания в целом. В значительной степени этот успех зависит от того, на каком уровне сформированы у учащихся такие интеллектуальные умения, как понимание предложенной задачи, умение сформулировать проблему, спланировать деятельность, выделить существенное в наблюдаемых явлениях, провести исследование, интерпретировать полученные данные, провести измерения в нестандартных ситуациях.

Библиографический список

1. Айвазян Э. И. Методологические основы обучения математическим доказательствам 1998
2. Атанасян Л.С. Геометрия 7-9 класс// Учебное пособие.
3. Башмаков М.И., Резник Н.А. Развитие визуального мышления на уроках математики //Математика в школе. 1991 №1.
4. Высокий Б.Ф. Факультативный курс по изучению понятий логики // Математика в школе. 1977. №4
5. Глейзер Г. О теореме Пифагора и способах её доказательства // Математика.2001 №24.
6. Градштейн И.С. Прямая и обратная теоремы. – М.: Физматгиз, 1961.
7. Груденов Я.И. Методы усвоения математических предложений // Математика в школе. 1977. №6.
8. Гусев В.А. методика обучения геометрии. – М. Академия. 2004.
9. Далингер В.А. Методика работы над формулировкой.
10. Далингер В.А. Теорема, её методы доказательства. Омск. ОмИПКРО. 1993.
11. Дорофеев В.Г. и др. Оценка качества подготовки выпускников основной школы по математике.-М:Дрофа,2000.
12. Драбкина М.Е. Обучение доказательным рассуждениям в 7-9 классах: методика рекомендации для учителей математики. – М.: Издательство НИИ содержания и методов обучения АПН СССР, 1990.
13. Клейман Я.М. Решение задач различными способами // Математика в школе. 1987.№6.
14. Колоскова М. Применяем принцип математической индукции // Математика. 2007 №4 с. 31-45.
15. Крутецкиц В.А. Психология математических способностей – м. Просвещение, 1963.

16. Крыговская А.С. Развитие математической деятельности учащихся и роль задач в этом развитии // Математика в школе. 1966. №6
17. Куваев М.Р. Ещё раз теореме // Математика в школе.1966 №1.
18. Лакатош И. Доказательства и опровержения : Как доказываются теоремы. - М.: наука, 1967.
19. Лысенко Ф.Ф. (УМК «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014» .
20. Миракова Т.Н. Школьная математика и логическое развитие учащихся: проблемы и решения. Школа 2000. Концепции. Программы. Технологии. Вып . 2. с. 70.
21.Мостовой А.И. Различные способы доказательств в курсе геометрии восьмилетней школы.- М.Просвещение, 1965.
22. Нагибин Ф.Ф. Достаточные и необходимые условия. // Математика в школе.1927 № 3.
23. Никольская В.А. Семёнов Е.Е. Учимся рассуждать и доказывать.- М. Просвещение, 1989.
24.Никольская И.Л. Изучение логического следования и равносильности в 7 классе // Математика в школе. 1977. №1
25. Погорелов А.Ф. Геометрия 6-9 класс. //Учебное пособие.
26.Рощина Н.Л. Решение задач различными способами – первый шаг к эстетическому восприятию геометрии // Математика в школе. 1996 №3.
27. Саранцев Г.И. Обучения математическим доказательствам и опровержениям в школе. - .:Гуманизм. Изд. Центр ВЛАДОС, 2005.
28. Сефибеков С.Р. Из опыта начального обучения решению геометрических задач на доказательство. // Математика в школе. 2007.№6. с. 41-44.
29. Слепкань З.И., Дубинчук Е.С. - Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. [2003,].
30.Столяра.А.А. Формирование элементарных математических представлений у дошкольников/ под ред. . - М.: Просвещение, 1988.

31. Тимофеева И.Л. О косвенных доказательствах в обучении математике// Математика в школе.2007.№1. с. 15-20.

32. Финкельштейн В. Первые теоремы. Математика. 2007. №36. с. 11-15.

33. Фрейтаг К.И. Математические доказательства и обоснования Математика в школе 1984.

34 . Шарыгин И.Ф.Геометрия 7-9 класс,// Учебное пособие.

35. Шенье А. Математическая индукция// Математика. 2007. №5. с. 38-46.

36.Ярошевский .М.Г.история психологии от античности до середины XXв. М.,1996