МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П.АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Кафедра математики и методики обучения математике

СИВУХИНА ЕЛЕНА АЛЕКСАНДРОВНА

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ ФУНКЦИЙ В ШКОЛЬНОЙ АЛГЕБРЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНИМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ GEOGEBRA

Направление подготовки 44.04.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы
Информационные технологии в математическом образовании

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ:

Заведующий кафедрой
д. пед. наук, проф. Шкерина Л.В.

____

Руководитель магистерской программы
д.пед.наук, доцент Майер В.Р.

____

Научный руководитель
к.ф.-м.н., проф. Ларин С.В.

____

Дата защиты
28.12.2020

Обучающийся
Сивухина Е.А.

____

Оценка_______________________

Красноярск 2020

Оглавление

Диссертационное исследование состоит из Введения и двух глав, что составляет 91 страницы. В качестве приложения подготовлен «Альбом анимационных рисунков» по теме диссертации, содержащий 30 анимационных рисунков. Библиографический список содержит 61 источников информации.

Актуальность исследования определяется вниманием общества к цифровому обучению и вопросам реализации использования компьютерных технологий в обучении математике. В современных учебниках по математике в школе понятие функциональной зависимости уже заняло свое достойное место. Вместе с тем, компьютерные технологии могут быть эффективно использованы при изучении функций.

Целью данной работы является создание методической системы изучения функций в школе с использованием анимации в среде GeoGebra.

Объект исследования: процесс обучения школьников по теме «Функции».

Предмет исследования: роль и значение компьютерной анимации в среда GeoGebra в практике обучения школьной математике.

Задачи исследования:

1) Проанализировать специальную литературу и имеющийся педагогический опыт по теме исследования.
2) Описать роль, место и значение компьютерной среды GeoGebra в обучении математике в школе.
3) Охарактеризовать анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra при обучении математике в школе.
4) Рассмотреть методические особенности обучения школьников по теме «Функции» с использованием анимационных рисунков.
5) Провести педагогический эксперимент по апробации методической системы обучения школьников по теме «Функции» в разных классах

с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra, проанализировать и описать его результаты.

Методы исследования: изучение и анализ психолого-педагогической, методической и учебной литературы по теме исследования, анализ теоретических и эмпирических данных, изучение и обобщение педагогического опыта, сравнительный анализ.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

1. Обоснована эффективность использования анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra в обучении алгебре и началам математического анализа.

2. Дары конкретные примеры использования компьютерных технологий при объяснении нового материала в исследовательском стиле, для исключения обременительных вычислений, при организации тестирования.

Теоретическая значимость исследования заключается в указании места, роли и значения компьютерных технологий в дидактике современного обучения математике.

Практическая значимость исследования заключается в разработке методики обучения математике с использованием анимационных возможностей компьютерной системы GeoGebra, создание Альбома анимационных рисунков, призванных пополнить комплекс средств обучения математике в школе.

Апробация и внедрение результатов. Материалы исследования были апробированы на уроках в классах МБОУ СШ №45, а также представлены: в докладах и статьях (см. список литературы). По теме исследования опубликовано 4 работы.

Гипотеза исследования: если в процессе изучения функций использовать исследовательский подход и анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra, то это будет способствовать повышению уровня сформированности у обучаемых основных компетенций по этой теме.

ВВЕДЕНИЕ

Цифровизация является общепризнанным трендом современного образования, закрепленным законодательными актами.

В цифровизации образования целесообразно выделить две составляющие: коммуникативную и технологическую, составляющую часть технологии дидактики обучения [6]. Коммуникативная часть – это прежде всего организация дистанционного обучения, особенно востребованная в настоящее время всемирной пандемии. Кроме того, это обеспечение административных функций учебного заведения, связь с общественностью [42].

Технологическая часть цифровизации образования состоит в пополнении средств классической дидактики новыми возможностями компьютерных технологий. Отметим, что эта часть цифрового обучения находится в начале пути своего развития и, как все новое, даже встречает сопротивление на пути внедрения в практику обучения математике. Ее роль и значение еще предстоит осмыслить и утвердить. В этом мы видим актуальность нашей диссертации.

Подчеркнем, что какие бы технологии мы не внедряли в обучение математике, на первом месте, в центре внимания должна стоять сама математика с ее проблемами и задачами. Использование компьютерных технологий целесообразно лишь в том случае и в той мере, в которой эти нововведения способствуют усвоению знаний, помогают достижению более высокого уровня образовательных результатов. Вместе с тем, неприятие априори компьютерных технологий иногда связано с искаженным представлением о них. Подчеркнем, что мы не призываем исключить «ручной труд» По образному выражению Н.Д. Подуфалова, связка «рука - мозг» должна по-прежнему работать. Но там, где это целесообразно, мы предлагаем заменять шариковую ручку на компьютер, и использовать связку «компьютер - мозг» в тех же учебных целях, но с экономией трудозатрат, а следовательно, и драгоценного времени [43].

Рассмотрим, что вносят компьютерные технологии в обучение математике.

1. Вспомним, что компьютер появился как вычислительная машина, поэтому первой назовем роль компьютерных технологий в устранении обременительных вычислительных трудностей. При этом мы не собираемся исключать «ручные вычисления» для приобретения вычислительных навыков. Компьютер используется там, где вычисления явно «не ручные».

2. Использование символьных вычислений компьютерной алгебры, например, с помощью пакета Maple или встроенной системы CAS (Computer, Algebra, System) пакета GeoGebra можно использовать для переоткрытия известных формул, или поиска новых закономерностей, или опровержения гипотез [46].

3. Важным приобретением современной дидактики является использование компьютерной анимации в виде анимационных рисунков – то, чего раньше не было и что появилось именно благодаря совершенствованию компьютерных технологий и появлению специализированных программ типа «Живая математика» и GeoGebra. Появилась возможность компьютерного моделирования математических понятий и утверждений. Примерами являются моделирование непрерывного вычерчивания графиков функций, построение движения, задаваемого данной функцией, укрепление связи физика + математика + информатика, где физика является источником изучения разного рода движений, математика предоставляет аппарат для исследования, а информатика обеспечивает моделирование изучаемых

движений. При этом анимацию мы понимаем широко. Помимо геометрической анимации, основанной на сохранении шагов построения чертежа при перемещении его первичных объектов, это и текстовая анимация, основанная на так называемых условиях видимости объекта, и изменение параметра, которое обеспечивается специализированным инструментом под названием «Ползунок», и другие виды анимации [51].

4. Специально созданным анимационным рисунком можно смоделировать проблемную ситуацию (как в геометрии, так и в алгебре или арифметике), обеспечить экспериментирование для решения проблемы и тем самым поддерживать экспериментально-исследовательский стиль обучения.

5. Можно создать анимационные рисунки для тестирования, (само)проверки усвоения знаний, а также для создания проверочных материалов, например, однотипных заданий с «хорошими» (например, целочисленными) ответами и «ручным» решением, не требующим сложных вычислений [50].

Применение компьютерных технологий имеет целью упрощение решения математической задачи [1-15]. Иногда традиционное математически строгое решение задачи является слишком сложным для понимания ученика данного возраста. В то же время удается найти анимационно-геометрическое решение, которое значительно проще, его легко понять и усвоить. В этом случае ученику можно сообщить о наличии первого решения и дать второе. В некоторых случаях анимационно-геометрическое решение проще традиционного, но связано с явно не «ручными» вычислениями. В этой ситуации особенно ярко проявляется вычислительная роль компьютера.

По типу использования можно выделить следующие виды анимационных рисунков.

1. Готовые анимационные рисунки для сопровождения учебного материала. Собранные в одном «Альбоме анимационных рисунков» для

данного класса по выбранному учебнику, они могут оказать существенную помощь практикующему учителю, повышая его дидактическую оснащенность [13].

2. Анимационные рисунки, создаваемые на уроке с целью решения математической задачи. Они одновременно приобщают обучаемых к компьютерным технологиям, тем самым способствуя раскрытию в будущем творческих способностей личности в условиях цифровой экономики.

3. Самостоятельное создание учащимися анимационных рисунков учебно-исследовательского характера для решения математических задач является хорошей темой для докладов на всевозможных ученических форумах. Но чтобы успешно руководить такой исследовательской работой, учитель сам должен овладеть соответствующим ресурсом «Живая математика» или GeoGebra [53].

Таким образом, анимационные рисунки как технологическая часть цифрового обучения вносят в дидактику современного обучения математике весьма весомый вклад, увеличивая арсенал средств обучения практикующего школьного учителя.

Сформулируем основные требования, которым должен удовлетворять цифровой образовательный контент современного математического образования.

1. Предлагаемые цифровые технологии в обучении математике должны иметь очевидные педагогические достоинства, способствующие успешному усвоению школьных знаний, экономили учебное время и не содержать обременительных требований по использованию специализированных компьютерных программ [55].

2. Новые цифровые технологии должны просто и естественно встраиваться в традиционные методики, дополняя их и усиливая их эффективность [43].

4. Самостоятельное изготовление школьниками анимационных рисунков, использование компьютерных технологий при решении математических и физических задач должны способствовать приобщению учащегося к цифровым технологиям для деятельности в будущем в условиях цифровизации экономики и общественных отношений [33, 34].

Первостепенные задачи по разработке и внедрению цифрового обучения математике.

1. Разработка психолого-педагогических основ цифрового обучения, создание понятийного аппарата, единой терминологии (глоссария).

2. Создание по каждому классу и по каждому предмету Альбомов анимационных рисунков для сопровождения изучаемого материала.

3. Необходимо провести серию педагогических экспериментов по апробированию цифрового контента, распространить опыт успешного использования цифровых образовательных технологий.

Сформулированные во введении идеи были высказаны профессором С.В. Лариным в докладе «Роль и значение компьютерных технологий в математическом образовании», сделанном 02.12.2020 на семинаре (Круглый стол), организованном СФУ и КГПУ им. В.П. Астафьева, под руководством академика РАО Н.Д. Подуфалова.

Глава 1. Теоретические основы разработки методической системы обучения функциям в школьной математике с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra

1.1. Компьютерная среда GeoGebra как средство создания анимационных рисунков, виды компьютерной анимации

В настоящее время возросла роль цифровизации различных сфер человеческой деятельности. В том числе это касается и сферы образования: за последние 10 лет появилось множество образовательных платформ в онлайн-доступе, компьютерных программ, приложений на телефон [20]. Все они выполняют разные функции, для их использования требуется различный уровень подготовки, направлены они на конкретные дисциплины. Особенно актуальным в школе стало использование специализированных математических пакетов. Пожалуй, именно в сфере математического образования представлено наибольшее количество разнообразных программ. Но стоит отметить, что, несмотря на обилие программ и ресурсов, среди них так и нет универсального. Поэтому всегда нужно понимать, какой ресурс, программу или приложение нужно выбрать для достижения той или иной образовательной цели [52].

Среди стандартных классов математических пакетов можно выделить следующие программные продукты:

– компьютерная алгебра – открытая система, предназначенная для выполнения числовых и символьных вычислений, а также построения двумерных и трехмерных образов (Maple, Mathematica, MatLab, Mathcad и др.);

– динамическая геометрия – интерактивная геометрическая среда (ИГС), позволяющая конструировать и манипулировать геометрическими моделями, которая реализует динамические измерения и вычисления их различных параметров и характеристик (GeoGebra, Cabri Geometry, C.a.R., GeoNext, DG, «Живая математика», «Математический конструктор» и др.);

– специализированные системы – это программные продукты, которые специализируются на поддержке изучения отдельных разделов математики или решения узкого круга проблем (например, таких как: исследование групп симметрии (Tess), построение многогранников (Poly) и т.д.) [56, 60].

Остановимся на программе Geogebra.

GeoGebra – это бесплатная, кроссплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования [58].

Geogebra является одной из популярнейших математических программ в мире [59]. Она включает в себя такие разделы, как геометрия, алгебра, таблицы, графы, статистика и арифметика, математический и комплексный анализ [57]. Основными преимуществами данного программного продукта являются:

- абсолютно бесплатное пользование – на сайте можно скачать версию программы для любого устройства;
- возможность работы как в режиме онлайн, так и в автономном;
- интеграция с офисными приложениями;
- возможность переноса чертежей для дальнейшего использования в других редакторах[61].

Использование динамической среды GeoGebra целесообразно на любом этапе изучения той или иной темы. Рассмотрим подробнее каждый этап.

1. Изучение нового: на уроке открытия новых знаний GeoGebra станет центральным инструментом – ведь демонстрация графика функции, новой теоремы в динамике способствует более высокому уровню понимания и усвоения темы;

2. Урок контроля знаний: среда GeoGebra может быть использована при тестировании, проверке и самопроверке усвоения заданий благодаря наличию соответствующего инструментария (ползунки, условия видимости, флажок и др.) Появляется возможность вариативного способа проверки знаний, а также каждому ученику можно дать индивидуальное задание.
3. Исследовательская деятельность: выполнение учебно-научной работы обучающимся с использованием возможностей среды GeoGebra.

Приведем примеры тем, связанных с функциями, где использование среды GeoGebra позволит достичь более высоких образовательных результатов:

1. Преобразование графиков функций (сжатие, растяжение, построение параллельным переносом);
2. Введение понятия «обратной функции»;
3. Решение уравнений и неравенств функционально-графическим методом;
4. Исследование функции:
    a. на монотонность;
    b. на экстремумы;
    c. на непрерывность;
5. Изучение тригонометрических функций;
6. Доказательство некоторых теорем и тождеств;
7. Решение практических задач на использование функциональной зависимости (построение моделей в среде GeoGebra) [48].

Внимательно рассмотрим основные достоинства использования анимационной среды GeoGebra в образовательном процессе:

– демонстрация;
– визуализация;

– интерактивность;

– моделирование, в том числе анимационное;

– многократное использование [54].

Таким образом, можем видеть, что использовать динамическую среду GeoGebra можно на уроке любого типа, обучающийся может, как самостоятельно взаимодействовать со средой, так и быть наблюдателем [32].

Проиллюстрируем конкретными примерами из практики преподавания перечисленные выше возможности и достоинства использования среды GeoGebra как технологической части цифровизации образования, поддерживающей исследовательский стиль обучения математике.

1. Анимационный рисунок для тренинга.

Анимационный рисунок 1 предназначен для демонстрации сложения целых чисел на числовой прямой и для отработки с пониманием процедуры сложения с осмысленной формулировкой правил сложения целых чисел (6 кл.). Под числовой прямой помещен текст, который должен произнести ученик при объяснении знака ответа и его модуль.

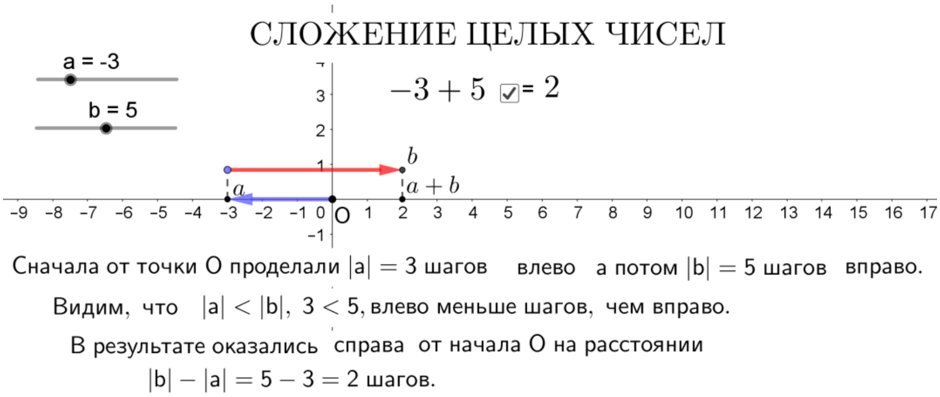


Рисунок 1 Сложение целых чисел

2. Числовое выражение и его значение.

Анимационный рисунок 2 многофункционален. Во-первых, его можно использовать как тренировочный для выполнения действий над целыми числами в 6 классе. Во-вторых, он предназначен для отработки понятия числового, а потом и буквенного выражения и его значения в плане пропедевтики функциональной зависимости [26].

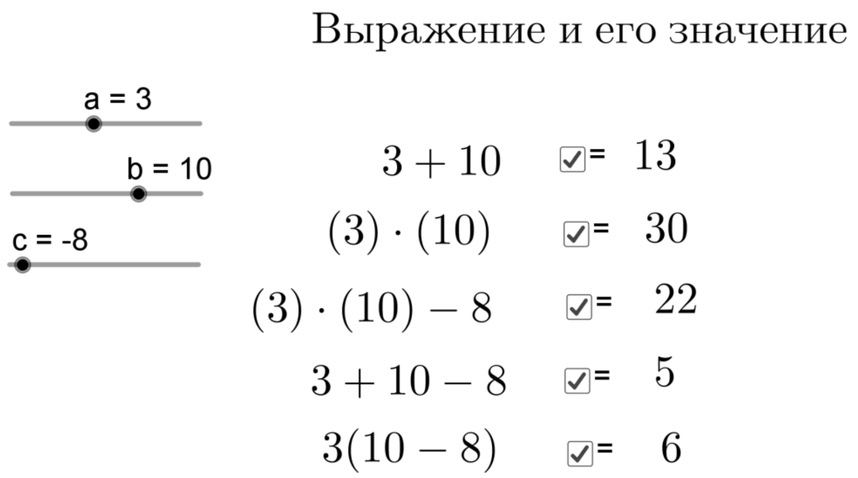


Рисунок 2 Действия с рациональными числами

1.2. Анимационно-геометрическая трансформация пропедевтических задач на функциональную зависимость

Пропедевтика математического понятия, по нашему мнению, это совокупность предварительных вводных знаний, приобретение которых поможет в дальнейшем понять и усвоить основные черты и характеристики вводимого математического понятия, а также мотивирует его дальнейшее изучение и использование. Характерной чертой пропедевтического материала является его происхождение из повседневной жизни, приобретенного опыта. Его цель – создание интуитивной, чувственной основы для усвоения вводимого понятия [49].

Обратимся к книге специалиста в области методики преподавания математики, в прошлом декана математического факультета Красноярского государственного педагогического института (ныне университета им. В.П. Астафьева) Роберта Адольфовича Майера «Задачи по формированию функциональных понятий» [27]. На конкретных примерах, взятых из этой книги (на которых сам автор акцентирует внимание читателей во введении) мы покажем как трансформируются эти задачи и их решения с использованием анимационных рисунков, изготовленных в среде GeoGebra [23]. С анимационными возможностями этой среды пожно познакомиться, например, по книге [1].

В инструментарии GeoGebra эффективно используется встроенный инструмент под названием «Ползунок». Он представляет собой отрезок с точкой на нем, изображающей параметр в границах его изменения. Мы используем также команду «Анимировать», которая заставляет точку перемещаться по линии, на которой она построена. Условия видимости позволяют создавать эволютизируемые изображения для демонстрации этапов решения задачи.

На анимационном рисунке 3 представлена формулировка задачи 50 из [1], в которой спрашивается: «сколько часов следует спать ежедневно: 1) 4-летнему ребенку, 2) 12-летнему ребенку, 3) каждому из ваших братьев и сестер».

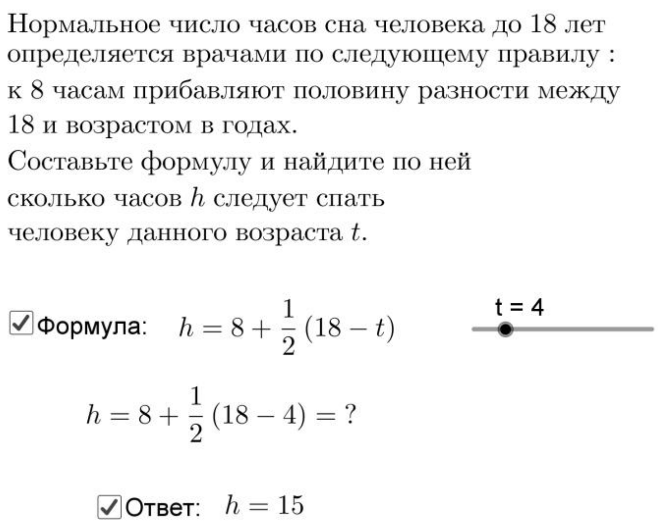


Рисунок 3 Формулировка и решение задачи №50

Текст задачи есть словесное задание функции, полученная формула является ее аналитическим заданием. Сообщаем ученикам, что буква t

обозначает независимую переменную, а буква h зависимую переменную. Значение переменной t можно изменять с помощью ползунка. Текст, помеченный «птичкой» (результаты вычислений) можно скрыть/открыть. Предполагается, что ученик сначала выполнит задание при скрытом ответе, а потом откроет ответ для проверки своих вычислений.

Наш анимационный рисунок к задаче 50 позволяет не только ответить на поставленные в задаче вопросы, но и найти все значения функции при $0 < t < 18$, составить таблицу для всех целых значений t с проверкой.

На анимационных рисунках 4*a*, 4*b*, 5*a*, 5*b*, представлена следующая задача 76 из [1]. В треугольнике ABC сторона $AC = 50$см, сторона $AB = 30$см, отрезок BD перпендикулярен к основанию AC. Требуется, обозначив длину отрезка DC буквой x, а длину стороны BC – через y, вывести формулу, выражающую y через x (найти аналитическое задание функции), установить, какие значения может принимать x (область определения функции), построить график зависимости y от x и по графику ответить на некоторые дополнительные вопросы. В геометрической части задачи система координат никак не участвует и формула зависимости y от x записывается из чисто геометрических соображений – работает теорема Пифагора. Используя масштаб 1:10, строим анимационный рисунок 4*a* при $n = 1$ с удаленными осями координат и выводим формулу $y = \sqrt{DC^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + b^2 - (a-x)^2} = \sqrt{2ax + b^2 - a^2}$. В частности, при значениях параметров на ползунках $a = 5$, $b = 3$ получаем $y = \sqrt{10x - 16}$. Заглядываем в ответ и убеждаемся, что наш ответ не совпадает с ответом в книге. В чем дело? Вспоминаем, что мы использовали масштаб, и для перехода к сантиметрам нужно заменить x на $10x$, a на $10a$ и b на $10b$. После замены получаем формулу $y = 10\sqrt{2ax + b^2 - a^2}$ и при $a = 5$, $b = 3$ получаем $y = 10\sqrt{x - 16}$, как в книге.

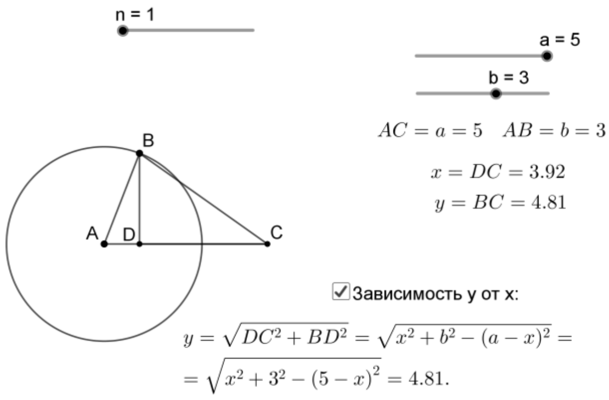


Рисунок 4a Задача №76

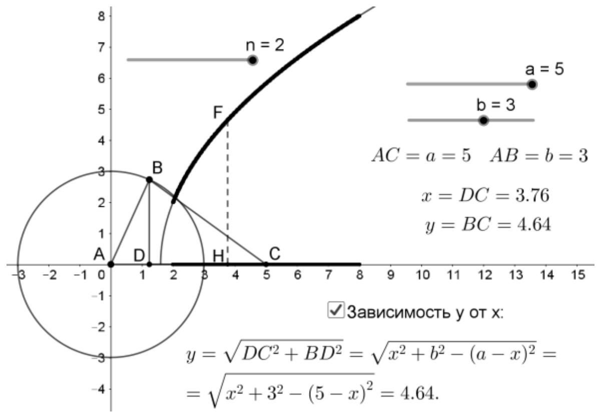


Рисунок 4b Задача №76 (кривая)

Теперь на анимационном рисунке возвращаем оси координат, устанавливаем $n=2$ и появляется рис. 4b, на котором видим изображение графика функции $y=\sqrt{2ax+b^2-a^2}$. Он построен в результате записи в строку ввода этого аналитического выражения y через x без связи с треугольником. Область определения этой функции $2ax+b^2-a^2 \ge 0$, $x \ge \dfrac{a^2-b^2}{2a}$. При $a=5$, $b=3$ получаем $x \ge 1.6$.

Для перехода к функции, когда $x = DC$, строим на оси абсцисс точку H с этой абсциссой и через нее проводим перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком функции в точке F. Заставляем точки H и F оставлять следы и включаем анимацию точки B. Точки H и F, оставляя следы, вычерчивают соответственно область определения и множество значений функции, отвечающей условиям задачи. При анимации точки B видим, что наименьшее (наибольшее) значение независимая переменная $x = DC$ принимает, когда точка B попадает на ось абсцисс и совпадает с точкой D справа (рис. 5a), (слева, рис. 5b) от начала координат.

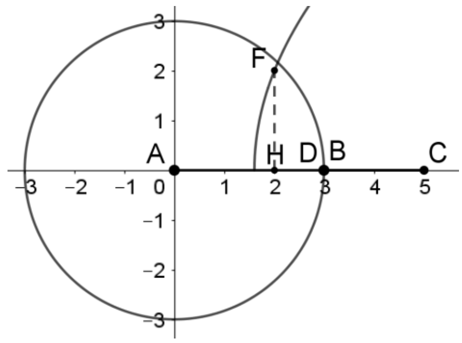


Рисунок 5а (справа)

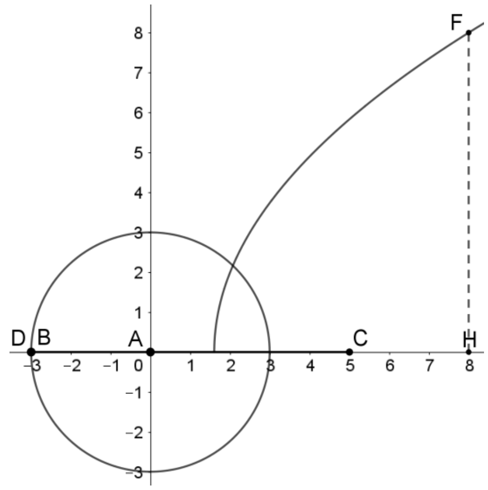


Рисунок 5b (слева)

Отсюда следует, что наименьшее значение $x = DC = AC - AB = a - b$, а наибольшее $x = DC = AC + AB = a + b$. Соответственно получаем наименьшее $y = a - b$, а наибольшее $y = a + b$. При $a = 5$, $b = 3$ получаем $2 \le x \le 3$ и $2 \le y \le 3$. В задаче предлагается: «зная, что длина отрезка BC равна 35 см, найдите длину стороны DC». В переводе этого задания на язык функций нужно по данному $y = 3.5$ найти соответствующее x. На рис. $2b$ перемещаем точку H в положение, когда ордината точки F равна 3.5 и получаем ее абсциссу равной примерно 2.83. Заметим, что для достижения нужной точности можно использовать колесико мышки для изменения масштаба. Аналогично с переводом на язык функций выполняются остальные задания в этой задаче.

Внесение наглядности существенно помогает в осмыслении задачи и ее решении. В частности, обнаруживается две функции: общая функция, заданная формулой, и функция, связанная с треугольником, которая получается из первой при сужении области определения.

В заключение рассмотрим задачу 137 из главы, посвященной линейным функциям. Спирально-цилиндрическая пружина длиной в 20 см под действием груза в 300 г растягивается до 23 см. Вторая пружина длиной 15 см под действием груза в 200 г растягивается до 19 см. Существует ли груз, при котором обе пружины будут иметь одинаковую длину?

Эта задача легко решается как аналитически так и графически нахождением точки пересечения графиков двух линейных функций. Построение анимационного рисунка, моделирующего эту задачу и ее решение, является хорошей учебно-исследовательской задачей для учащихся 10 классов.

Заметим, что эта задача похожа на задачу о движении вдогонку двух шаров [41]. Дело в том, что график линейной функции $y = kx + b$ задает вертикальное движение точки (шара) $F = (0, y)$ по оси ординат. Анимационный рисунок, изображающий растягивающуюся пружину при добавлении определенного груза строится в среде GeoGebra несколько труднее.

Таким образом, главная цель использования компьютерных технологий состоит в визуализации математики, в моделировании на экране компьютера жизненных явлений и задач, подлежащих математическому решению, что способствует пониманию, позволяет экспериментировать, поддерживает исследовательский стиль обучения, открывает новую учебно-исследовательскую тематику построения анимационных рисунков по изучаемой математикой теме [38].

1.3. Тема «Функции» в школьных учебниках. Анализ последовательности изучения функций в действующей учебной литературе

Для проведения анализа последовательности изучения темы «Функции» были выбраны учебно-методические комплекты (УМК) по алгебре 7–11 классов под редакцией Г.В. Дорофеева, Ю.Н. Макарычева, Ю.М. Колягина, С.М. Никольского.

Учебники отбирались по принципу:

1. Массовость использования данного учебника в школах.

В процессе проведения дидактического анализа будут рассмотрены следующие критерии:

1. Содержание и структура материала;
2. Наглядность изложения материала;
3. Задачи, рассмотренные в учебнике

Перейдем непосредственно к дидактическому анализу учебных комплектов.

1) Содержание и структура материала

Рассмотрим последовательность изучения функций с 7 по 9 класс по учебнику Г.В. Дорофеева. Изучение функционально-графической линии в 7 классе начинается с введения двух видов зависимостей. Вводится понятие «прямой пропорциональности» на жизненно-иллюстративных примерах. Затем вводится понятие «обратной пропорциональности», после чего строится график двух рассмотренных зависимостей на одной координатной плоскости. Таким образом в учебнике вводится понятие «график». Далее следует глава, посвященная графикам функций. В ней рассматриваются различные преобразования графика функции $y = x$. После следует пункт под названием «Ещё несколько важных графиков» – в нем изучается график «парабола». Её изучение проходит через составление таблицы координат точек и построения графика. Свойства графика зависимости не выделены отдельно, их упоминание происходит вскользь. Аналогичным образом выполняется построение графика кубической параболы. Построение графика $y = |x|$ осуществляется на основании ранее изученного графика прямой пропорциональности [10].

Изучение темы «Функции» в восьмом классе начинается с зависимости $y = \sqrt{x}$. С помощью таблицы происходит построение графика данной зависимости. Впервые появляются намеки на четность функций и понятие обратной функции путем подмечания симметричности данного графика $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ относительно прямой $y = x$, это утверждение доказывается в обе стороны. Затем выделяются некоторые свойства графика зависимости $y = \sqrt{x}$. В главе «Системы уравнений» происходит рассмотрение графика уравнения вида $y = kx + m$. Во время изучении данного графика рассматриваются различные свойства и расположения двух прямых относительно друг друга на плоскости. Также существует пункт «Для тех, кому интересно». В данном пункте рассказывается геометрическая интерпретация системы неравенств с двумя переменными. И лишь к концу восьмого класса вводится понятие «функции». Выделяется отдельная глава «Функции», в которой сначала изучается чтение графиков, график функции, свойства функции и в конечном счёте вводится линейная функция. Изучение линейной функции излагается на основе с жизненных примеров, иллюстрирующих принципы применения данной функции. Через эти примеры осуществляет ввод определения линейной функции. Во время построения графика линейной функции отмечается зависимость знака коэффициента и монотонности графика. Аналогичным образом происходит введение функции обратной пропорциональности. При помощи таблицы значений аргумента строится график функции с различным знаком коэффициента. В дальнейшем вводится понятие «гипербола» [11].

В девятом классе продолжается изучение функционально-графической линии. И начинается оно с квадратичной функции, заданной формулой $y = ax^2 + bx + c,$ где $a, b, c -$ некоторые числа, причем $a \neq 0$. Вспоминают простейшую квадратичную функцию $y = x^2$, строят графики квадратичных функций с различными коэффициентами, находят ось симметрии и координаты вершины параболы. Затем подробно рассматривают график и свойства функции $y = ax^2$, делают вывод об изменении направления ветвей и ширине графика в зависимости от знака коэффициента. После этого изучают движения графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат. Исходя из построенных графиков, формулируют вывод о движении графика функции вдоль координатных осей в зависимости от коэффициентов. И наконец, делается вывод о том, что можно получить график функции $y = ax^2 + bx + c$ с помощью движения вдоль осей графика функции $y = ax^2$.

В дополнительном параграфе изучается график дробно-линейной функции аналогично изучению графика квадратичной функции, а именно: используется график гиперболы и происходит его преобразование с помощью изменения коэффициентов, входящих в его состав [12].

Учебника для 10-11 классов под редакцией данного автора найдено не было.

Но учебник под редакцией Г.В. Дорофеева не вошел в федеральный перечень учебников, и, соответственно, пока используется в школах последний год. Поэтому рассмотрим последовательность изучения функций в учебнике под редакцией Ю.Н. Макарычева. Впервые изучение функций осуществляется в 7 классе. Первоочередно вводится определение, значения функции и построение ее графика. Далее вводится понятие прямой пропорциональности, а затем изучается линейная функция и ее график [28]. В 8 классе представлены функции $y = \frac{k}{x}$ и $y = \sqrt{x}$. Данные функции вводятся наглядно-интуитивным образом. Изложение материала по данной теме скудно, отсутствует рассмотрение типовых задач. Не происходит рассмотрение свойств функции [29]. Изучение функционально-графической линии в 9 классе начинается с темы «Функции и их свойства». В данной теме рассматриваются в общем виде свойства, а также область определения и область значений функции. Затем изучается квадратичная функция, ее свойства и график. Рассматриваются графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$. После этого вводится определения степенной и дробно-линейной функций. Далее осуществляется изучение графиков данных функций. Затем рассматривается решение уравнений и неравенств графическим и функциональным методами [30]. Учебников для 10 – 11 классов под редакцией данного автора найдено не было.

В учебнике Ю.М. Колягина за 7 класс впервые функции представлены в 6 главе, которая имеет название «Линейная функция и ее график». В самом начале параграфа приводится историческая справка термина «функция», а также приводится ряд примеров функциональной зависимости. Перед изучением непосредственно понятия функции, происходит введение прямоугольной системы координат на плоскости. В начале каждого параграфа имеется небольшая аннотация, в которой указано какие знания будут получены обучающимися в ходе изучения этой темы. Определение функциональной зависимости вводится после рассмотрения задач на движение. Затем происходит рассмотрение различных способов задания функции. Вводится определение графика функции. Линейная функция вводится с помощью рассмотрения задачи на нахождение площади прямоугольника. Далее изучаются понятия прямой и обратной пропорциональности. В следующем параграфе вводится строгое определение линейной функции и ее графика. В конце этого параграфа имеется небольшое дополнение, в котором описывается способ построения графика функций со знаком модуля. В следующей главе под названием «Системы двух уравнений с двумя неизвестными» освещаются различные способы решений систем уравнений, среди которых, разумеется, присутствует графический способ. В данном параграфе рассматривается пример решения аналитически и графически системы двух уравнений. Затем происходит рассмотрение трех случаев взаимного расположения двух прямых на плоскости и к ним приводятся примеры [17]. В 8 классе в главе 5, которая носит название «Квадратичная функция», вводится определение квадратичной функции, а затем поочередно функции $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$. После чего производится построение графика квадратичной функции. Определение квадратичной функции введено через два примера. Также введено понятие «нули квадратичной функции». При изучении параграфа про функцию $y = x^2$ рассматриваются 3 свойства: точки касания осей, симметричность, монотонность. Далее изучается растяжение и сжатие графика функции $y = x^2$ от оси Ox вдоль оси Oy. Затем при изучении функции $y = ax^2 + bx + c$ производятся различные сдвиги графика вдоль осей, выводятся координаты вершины параболы. Также изучается тема «Решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции» [18]. В 9 классе во второй главе «Степенная функция» обучающиеся узнают, что такое область определения функции, возрастание и убывание функции, четность и нечетность функции, а также изучат функцию $y = \frac{k}{x}$. В первом параграфе этой главы вновь дается определение функции, но используется иной способ введения. В 7 классе происходило изучение описательного определения, в девятом же классе изучается более строгое, научное определение. В следующем параграфе представлено строгое определение возрастающей и убывающей функции (в 8 классе при изучении квадратичной функции не изучалось определение, а рассматривалась исключительно только монотонность квадратичной функции). Изучение функции $y = \frac{k}{x}$ начинается с примера, в котором необходимо построить график обратной пропорциональности. В этом же примере рассматриваются свойства функции. Также в этой главе изучаются неравенства и уравнения, которые содержат степень и решаются функционально-графическим методом [19].

Изучение алгебры в 10 классе Ю.М. Колягин начинает с рассмотрения степенной функции, её свойств и графика. Далее происходит рассмотрение понятия «взаимно обратные функции». После чего осуществляется переход к показательной функции, производится рассмотрение ее свойств и графика. Далее изучаются показательные уравнения и неравенства, после чего вводится понятие логарифма, который ложится в основу логарифмической функции со своими свойствами и графиком. На этом функциональная линия заканчивается в 10 классе. Дальше изучается тригонометрическая линия, но функции тригонометрические появляются лишь в начале 11 класса. До этого рассматриваются все тождества, формулы, уравнения и неравенства. На все тригонометрические функции (в том числе и обратные) в учебнике отводится всего 23 страницы, с учетом практических заданий. После изучается производная функции в следующем порядке: вводится определение производной, рассматривается производная степенной функции, правила дифференцирования, производные элементарных функций, геометрический смысл производной. Обратим внимание, что физический смысл производной не рассматривается [2].

В ходе дидактического анализа учебника С.М. Никольского, нами было выявлено, что понятие функции впервые рассматриваются лишь в восьмом классе, в седьмом классе нет упоминаний об этой линии [35]. Первая же глава учебника восьмого класса носит название «Простейшие функции. Квадратные корни». В первом параграфе происходит изучение декартовой системы координат на плоскости, ввод понятий «функция» и «график функции». Ввод понятия функции происходит на основании двух примеров. Также в учебнике данного автора определение понятия функции представлено не наглядно-интуитивным образом, как это было у предыдущих авторов. Здесь определение функции определяется на множестве. Сразу после примеров функциональной зависимости происходит введение понятия области значений функции, и рассматриваются различные способы задания функции. Отдельно выделен пункт для рассмотрения понятия графика функции. График функции рассматривается на примере работы прибора термографа. Стоит отметить, что в учебнике С.М. Никольского разъясняется, что такое приращение аргумента и приращение функции, а также непрерывность функции. Обратим внимание, что в учебнике используется научный язык изложения. После этого происходит рассмотрение графиков следующих функций $y = x, y = x^2, y = \frac{1}{x}$. На каждую функцию выделен отдельный пункт, в котором подробно рассматриваются и отмечаются особенности графиков данных функций, в частности, устанавливается область определения функции. Для функции $y = x^2$ формулируются и обосновываются некоторые свойства функции, например такие, как монотонность функции, четность, непрерывность и другие. Затем изучается график параболы, который строится с помощью таблицы значений. Упоминается ось симметрии и вершина параболы. Аналогичным образом рассматривается функция $y = \frac{1}{x}$.

Глава 3 полностью посвящена линейной функции. Первоочередно в ней происходит изучение прямой пропорциональности и график линейной функции. При изучении графика линейной функции происходит введение понятия углового коэффициента прямой. Далее рассматриваются различные случаи положения прямой в координатной плоскости. После этого функционально-графическую линию продолжает функция $y = |x|$ и ее график. Также как и в предыдущих пунктах рассматриваются ее свойства, а затем и график. Еще одна примечательная тема, затронутая в учебнике этого автора, это «Функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$». Данные функции изучаются не настолько подробно, как другие. После этого происходит изучение квадратичной функции, при этом рассмотрено два случая: $a > 0$ и $a \neq 0$. Затем изучается движение графика вдоль осей, но тема носит несколько иное название: «График функции $y = a(x - x_0)^2 + y_0$». И только после этих тем начинается изучение квадратичной функции и ее графика. Следующей изучается дробно-линейная функция. При изучении данной темы происходит введение понятия обратной пропорциональности, рассматривается функция $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0, k \neq 0)$. Для каждого случая освещаются свойства функции и график. А затем уже в общем виде изучается дробно-линейная функция и ее график. Для этого приведено 4 примера построения графика функции $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$. На этом в 8 классе изучение функциональной линии заканчивается [36].

В девятом классе только три темы затрагивают функционально-графическую линию. Это «Применение графиков к решению неравенств первой степени с одним неизвестным», «Функция $y = x^n$» и «Функция $y = \sqrt[n]{x}, x \geq 0$. При изучении второй темы рассматриваются свойства и графики функций $y = x^n, y = x^{2m}$и $y = x^{2m+1}$. Рассмотрение третьей темы происходит аналогично предыдущим: обосновываются свойства функции и изучается ее график [37].

В десятом классе первой новой темой из функционально-графической линии рассматривается «Корень степени *n*». Но прежде идет параграф, посвященный основным понятиям: снова вводятся понятия функции, аргумента функции. Изначально все понятия вводятся на ряде примеров, но после обращаются к определению функции через множества. Также рассматриваются основные свойства (области определения и значения, непрерывность функции), способы задания функции, определение графика функции. После этого идет параграф, посвященный степенной функции, в котором рассматриваются основные свойства, примеры. Далее вводится понятие корня степени n, рассматриваются корни четной и нечетной степени, арифметический корень, свойства корней степени n. Наконец, начинается пункт про функцию корня, но он отмечен как «пункт для углубленного изучения». То есть на базовом уровне этот параграф изучаться не будет. В параграфе отмечаются 7 свойств функции, каждое из которых подробно рассмотрено, для некоторых приведено доказательство. В следующем параграфе отдельно рассматривается функция $y = \sqrt[2m+1]{x}$ $(m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$, её график и 5 свойств. Следующей изучается показательная функция, ее свойства и график. Появляется термин экспоненциальной функции. Затем рассматривается логарифмическая функция, ее график и только два свойства функции. Далее идет параграф для углубленного изучения под названием «Степенные функции», в котором свойства степенных функций рассматриваются с позиции логарифма. Следующим обозревается большой блок – тригонометрические функции. Начинается он с введения понятия периода. Затем рассматриваются функции синуса, косинуса, тангенса и котангенса, а также их свойства и построение графиков [3].

В 11 классе первая глава полностью посвящена функциям. Начинается с освещения элементарных функций, повторения всех основным понятий. Затем идет несколько параграфов подробного разбора основных свойств функций: области определения и значения, четность и нечетность функции, периодичность, непрерывность, монотонность и нули функции. Далее рассматриваются способы преобразования графиков: симметрия относительно осей и начала координат, параллельный перенос, растяжение и сжатие вдоль осей, применение всех методов вместе, симметрия относительно прямой $y = x$. Затем снова параграф для углубленного изучения под названием «Графики функций, содержащих модули». Где отдельно рассматриваются преобразования графиков различных функций с модулем. Еще один параграф для углубленного изучения – «Построение графиков сложных функций». В нем, помимо построения сложных функций, также рассматривается построение суммы, произведения функций, кусочно-заданной функции. Следующей темой в этой главе является «Понятие предела функции», затем освещаются односторонние пределы, вводятся первый и второй замечательные пределы, свойства пределов функции. После, на основании изученных пределов, рассматривается непрерывность функции. Далее параграф для углубленного изучения – «Разрывные функции». В нем рассматриваются различные примеры разрывных функций, а также приведена классификация разрывов. Затем изучаются обратные функции. Определения обратной функции не вводится, это понятие объяснено интуитивно, на примерах. Сразу после идет параграф для углубленного изучения, в котором рассматриваются взаимно обратные функции. В данном параграфе рассказывается о свойстве графиков взаимно обратных функций и о достаточном условии существования у функции обратной ей функции. Отдельно выделен параграф про обратные тригонометрические функции, но этот параграф отмечен для углубленного изучения. В нем рассмотрены свойства обратных тригонометрических функций, их графики. Затем идет раздел о производной. Определение производной вводится после рассмотрения трех задач: нахождение мгновенной скорости, нахождение тангенса угла наклона касательной к графику функции и силы тока. Изначально производная определяется как предел приращения функции к приращению аргумента. Рассматриваются производные простейших функций (линейной и квадратичной), вводится физический и геометрический смыслы производной. Далее рассказывается о производной суммы и разности, после чего изучается непрерывность функции, имеющей производную. Вводится понятие дифференциала. Затем изучается производная суммы и частного, и рассматриваются производные элементарных функций. Далее рассматривается производная сложной функции. В параграфе для углубленного изучения освещается производная обратной функции. Все эти параграфы про производную нужны только для того, чтобы в дальнейшем исследовать функцию. И именно это и изучается следующим в учебнике Никольского. Сначала идет параграф о максимуме и минимуме функции, вводятся понятия локального минимума и максимума, причем эти понятия не просто вводятся, а обоснованно появляются [4].

2) Наглядность изложения материала

В учебнике Г.В. Дорофеева представлено достаточно скудное количество иллюстративного материала к определениям. Рассмотрение именно функционально-графической линии позволяет сделать вывод о том, можно сделать вывод о том, что в данном учебнике недостаточно наглядно представлен учебный материал [10–12].

В учебнике Ю.М. Колягина определения не сопровождаются иллюстрациями, но помимо определений всегда рассматривается несколько примеров. И именно эти примеры проиллюстрированы в полной мере. Также в этих примерах, а, следовательно, и на этих рисунках, рассматриваются различные вариации положения графика той или иной функции, что как нельзя лучше помогает в освоении материала [17–19].

В учебном пособии Ю.Н. Макарычева примеры достаточно проиллюстрированы. При изучении построения и преобразования графика функции представлены серии рисунков [28–30].

В учебнике С.М. Никольского также в достаточной мере представлены иллюстрации и рисунки к определениям и примерам. Но в отличие от учебника Ю.М. Колягина иллюстрации больше относятся не к примерам, а к текстовой части параграфа, в котором происходит объяснение материала при помощи рассмотрения частных случаев [35–37].

3) Задачи, рассматриваемые в учебнике

Рассмотрим типы заданий в учебниках разных авторов. Чтобы не повторяться, выделим типы заданий, представленные в большинстве учебников, а также представленные лишь у отдельных авторов.

Типы заданий в учебниках 7–11 классов по учебнику Г.В. Дорофеева:

– Текстовые задачи, отражающие определенную функциональную зависимость;
– Работа с аналитической записью функциональной зависимости, нахождение различных элементов зависимости;

– Составить таблицу значений функции по аналитическому заданию;
– Определение вида функциональной зависимости по словесному описанию и решение задач;
– Определение вида функциональной зависимости по аналитической записи;
– Построение графика функции по таблице;
– Задание функции аналитически по словесному описанию и построение ее графика;
– Построение графика функции на интервале;
– Построение кусочно-непрервной функции;
– Нахождение точек пересечения различных функциональных зависимостей друг с другом и с координатными прямыми;
– Нахождение углового коэффициента по аналитической записи;
– Определить взаимоположение прямых;
– Работа с графиком, ответы на вопросы по заданному графику;
– Найти значение функции в точке;
– Задания на доказательство расположения графика функции в определенном промежутке/ четверти/ относительно координатных прямых;
– Построение графика функции и чтение свойств функции по графику;
– Чтение свойств по заданному графику функции / аналитической записи;
– Указать асимптоты графика функции и построить его;
– Преобразования графиков функций [10–12].

В учебнике Ю.Н. Макарычева также присутствуют задачи на исследование. То есть до введения каких-либо свойств функции, необходимо определить характер поведения функции, расположение на координатной прямой. Также в учебнике для 8 класса данного автора встречаются задания типа:

- Постройте график функции и решите, используя его, уравнение;
- Решите уравнение графически;
- Используя графические представления, выяснить, сколько решений имеет уравнение;
- Решение и нахождение с помощью графика функции примерные корни уравнения;
- Решение неравенств с помощью графика функции;
- Решение неравенств методом интервалов;
- Составить уравнение с двумя переменными по графикам функций;
- Решение неравенств / системы неравенств с двумя переменными [28–30].

В учебнике Ю.М. Колягина присутствуют все типы заданий, как в учебнике Г.В. Дорофеева, но есть еще один тип:

- Задания на доказательство свойств четности и монотонности [17–19].

Стоит отметить, что учебники всех авторов содержат достаточное количество задач практического характера. В учебнике Ю.М. Колягина подобные задачи как встречаются в обязательных упражнениях, так и выделен отдельный блок таких заданий. Примерно половина заданий от общего количества заключено в фабулу, мотивирующую на выполнение, а также связанную с жизнью. Как видно из пункта 3 проведенного анализа в рассмотренных учебниках представлены примерно одинаковые типы заданий, но стоит отметить, что в учебнике Ю.Н. Макарычева также есть такой важный блок заданий, как задания на исследование функции. Можно заметить, что только в учебнике Г.В. Дорофеева недостаточное количество иллюстраций к определениям и примерам, в остальных же учебниках достаточно высокая наглядность материала. Стоит отметить, что схема изложения материала в первых трех учебниках, а именно Г.В. Дорофеева, Ю.Н. Макарычева и Ю.М. Колягина, примерно одинакова, рассматриваются одинаковые функции. Разумеется, некоторые темы в разных учебниках имеют несколько иное положение во всем курсе, но отличается это положение не разительно. А вот в учебнике С.М. Никольского абсолютно другая система изложения, схема и положение тем. Изучаются даже другие понятия, такие как приращение аргумента и функции, непрерывность функции, а также функции $y = [x]$, $y = \{x\}$, при изучении степенной функции рассматриваются случаи четного и нечетного показателя степени [35–37].

Выводы по главе 1

В результате рассмотрения теоретических аспектов заявленной темы можно сделать следующие выводы:

1. Политика Российской Федерации в области образования диктует его цифровизацию. Достижение данной цели возможно лишь в том случае, если прежде всего учителя научатся пользоваться современными технологиями. Это предполагает не просто заставить использовать информационные и цифровые технологии в процессе образования, а донести идею о пользе и рациональности их использования.

2. Рассмотренные возможности анимационной среды GeoGebra позволяют легче достичь тех образовательных результатов, которые представлены во ФГОС. При этом важно учитывать возрастные особенности обучающихся, а также тот факт, что современное поколение школьников относится к поколению «Z». А это означает, что для них типично клиповое мышление, гиперактивность, сложность формулирования своих мыслей [31].

3. Исследовательский подход в обучении совершенствует восприятие предметного материала и его понимание, позволяет формировать многие метапредметные учебные действия [39].

4. Анализ содержания учебников по алгебре и геометрии 7 – 9 классов, включенных в Федеральный перечень учебников, показал, что с одной стороны, структура построения учебников позволяет осуществлять работу в исследовательском стиле с использованием анимационной среды GeoGebra на разных этапах изучения учебного материала, а с другой стороны, недостаточное количество задачного материала, позволяющего реализовать исследовательский подход в обучении. Для устранения данного недостатка учебников необходимо дополнять их комплексом соответствующих задач по каждой теме.

5. Исследовательский подход с использованием анимационных возможностей среды GeoGebra эффективно преобразует уже пропедевтичекие задачи на функциональную зависимость [40].

Глава 2. Методическая система изучения функций в школьной математике с использованием анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra

2.1. Некоторые задачи исследовательского характера с применением анимационной среды GeoGebra

Под методической системой обучения, следуя [44], мы будем понимать педагогическую структуру, компонентами которой являются: цели, содержание, методы, формы и средства обучения.

В данном параграфе будут представлены некоторые задачи исследовательского характера.

Функциональная линия является одной из центральных линий в курсе алгебры 7 – 11 класса. Связано это в первую очередь с тем, что само понятие «функции» является метапредметным, ведь по своей сути функция – это зависимость двух величин. Во многих смежных (и не только) науках встречаются зависимости. Именно поэтому начинать изучение функций стоит с рассмотрения ситуаций, связанных с субъектным опытом обучающегося. И на протяжении всего процесса обучения необходимо использовать исследовательские задачи, чтобы знания по теме «Функции» обучающийся получал в процессе собственного эксперимента. В этом случае новые знания станут его жизненным опытом, а значит, будут максимально понятны и ясны.

В связи с этим нами были разработаны представленные ниже задания по теме «Функции», для выполнения которых использование динамической среды GeoGebra будет служить инструментом исследования и подкреплением визуального представления.

2.1.1. Введение понятия функции (7 класс).

Мы придерживаемся изложения учебного материала по теме «Функции» в учебнике «Алгебра» для 7 класса общеобразовательных учреждений авторов Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова, 2004 года издания.

Как и в учебнике Макарычева [Макарычев, 2013], начинаем с примера вычисления площади s квадрата через длину его стороны a по формуле $s = a^2$. Эта формула устанавливает соответствие между числами. При этом первое число означает длину отрезка, а второе число площадь квадрата, построенного на данном отрезке. Демонстрируется анимационный рисунок 6, на котором можно увидеть эту зависимость. Длина стороны изменяется перемещением точки A. Одновременно изменяются результаты измерения. Если длина стороны есть дробное число, то площадь компьютер вычисляет с заданной точностью.

Рисунок 6 Зависимость площади квадрата от стороны

С опорой на анимационный рисунок 6 вводятся понятие функции, независимой переменной, зависимой переменной, области определения и области значений функции.

Для наглядного представления зависимости с помощью графика (рисунок 7) заставим точку F оставлять след и включаем анимацию точки A. Наблюдаем, как точка F, оставляя след, вычерчивает график функции.

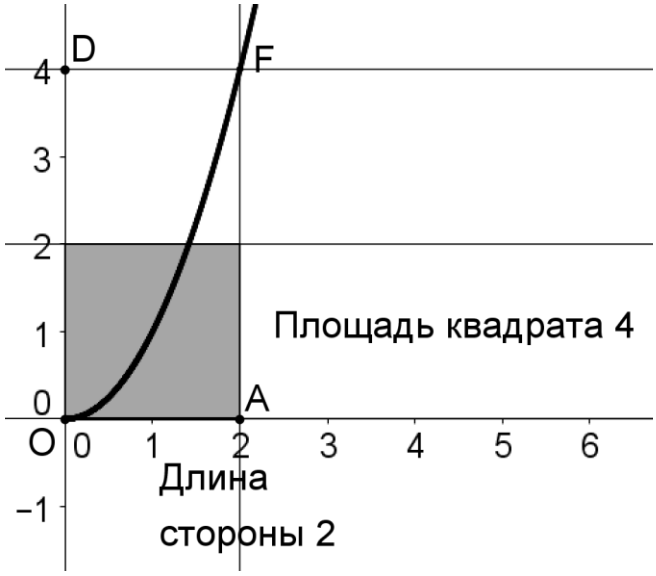


Рисунок 7 График зависимости площади квадрата от длины его стороны

Теперь отвлечемся от геометрической задачи и будем изучать зависимость квадрата произвольного числа от этого числа, то есть рассмотрим зависимость $x \to x^2$ для любого числа x. Получаем функцию $y = x^2$ с областью определения – множество всех (действительных) чисел и множеством значений – множество всех неотрицательных (действительных) чисел. Демонстрируем график этой зависимости анимационным рисунком.

Далее переходим к демонстрации зависимости геометрической фигуры «квадрат» от геометрической фигуры «отрезок», на котором построен квадрат. Это уже другая функция. Обозначим ее $y = g(x)$. Здесь x обозначает отрезок OA, y обозначает квадрат, построенный на этом отрезке, а функциональная зависимость g обозначает геометрическое построение квадрата по его стороне. Областью определения функции является множество всех различных отрезков, а областью определения – множество всех квадратов, построенных на этих отрезках. Это пример функции, для которой нет графика. Чтобы получить график зависимости, надо перейти к числовым характеристикам рассматриваемых геометрических объектов.

В предыдущих примерах была задана функция, и мы строили ее график. Но иногда функциональная зависимость задается в виде графика, который появляется путем снятия экспериментальных данных. Пример такого задания функции демонстрирует температурный график (рисунок 8).

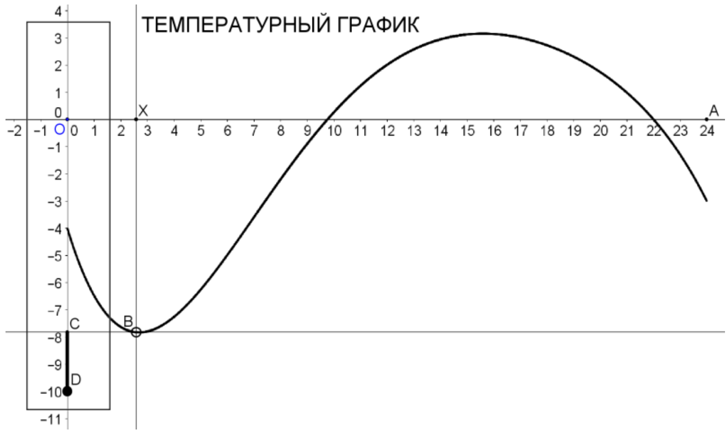


Рисунок 8 Температурный график

На нем переменная x (изображаемая точкой X) отмеряет время, а переменная y (изображаемая точкой C) указывает температуру.

Нами построены анимационные рисунки, демонстрирующие движения, задаваемые данными функциями. Подробно рассматривается линейная функция в сопровождении анимационных рисунков равномерных движений. Демонстрируется анимационное исследование зависимости графика линейной функции от коэффициентов [26].

2.1.2. Учебно-исследовательские задачи на отработку понятия графика функции

Задача 1. Пусть точка A координатной плоскости принадлежит графику некоторой функции. В каком направлении не может далее проходить график функции при возрастании аргумента? При убывании аргумента? Ответ выберите из следующих вариантов: вертикально вверх, вправо вверх, горизонтально вправо, вправо вниз, вертикально вниз, влево вниз, горизонтально влево, влево вверх.

Ответ: 1) При возрастании аргумента график не может продолжаться вертикально вверх, влево вверх, горизонтально влево, влево вниз и вертикально вниз.

2) При убывании аргумента график функции не может продолжаться: вертикально вверх, вправо вверх, горизонтально вправо, вправо вниз и вертикально вниз.

Задача 2. Может ли график функции оказаться замкнутой линией?

Ответ: нет. Ученику предлагается обосновать свой ответ.

Задача 3. Какая часть окружности может оказаться графиком функции?

Ответ: дуга верхней части окружности или нижней части.

Задача 4. Даны графики трех функций. С помощью условий видимости и команды оставлять след точки создайте из них график одной функции.

Один из вариантов ответа – на рисунке (рисунок 9).

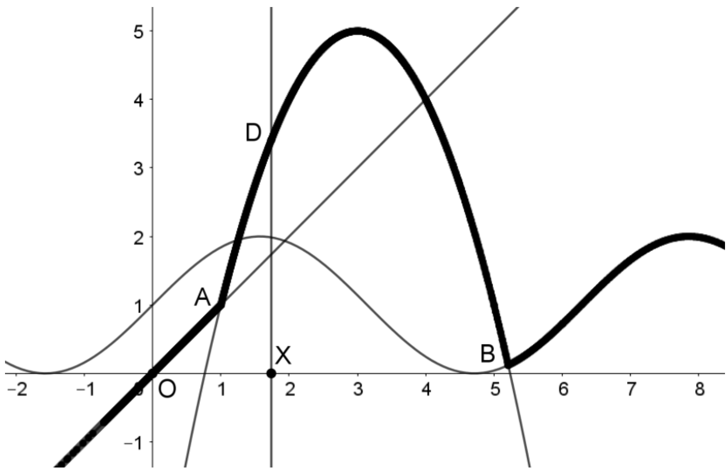


Рисунок 9 Один из вариантов решения задачи

Задача 5. С помощью «строки ввода» построен график функции $y = x^2$. Полученная кривая называется параболой. Будем непрерывно поворачивать эту параболу вокруг начала координат, скажем, по часовой стрелке. В какой момент кривая уже не будет графиком никакой функции?

Для ответа на вопрос учитель заготавливает для демонстрации на уроке анимационный рисунок (рисунок 10), на котором данную параболу можно поворачивать, ухватившись курсором за точку F. На Панели объектов видим, что при любом положении точки X на оси абсцисс вертикаль, через нее проходящая, пересекает параболу в точках B и C, причем одна из них не существует тогда и только тогда, когда ось параболы лежит на оси ординат. Только в этих случаях парабола является графиком функции.

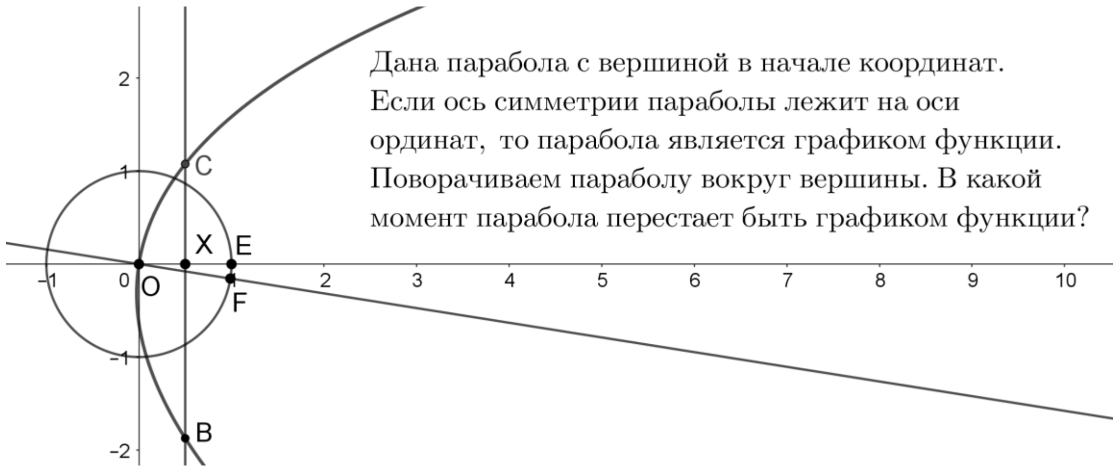


Рисунок 10 График параболы с осью симметрии

Для аналитического решения этой задачи надо знать уравнение повернутой параболы, что не соответствует знаниям учащегося. Одновременно анимационный рисунок легко убеждает нас, что вертикальная прямая $x = a$ тогда и только тогда пересекает поворачивающуюся параболу в одной точке при любом a, когда ось симметрии параболы принадлежит оси ординат.

Здесь мы видим пример, когда компьютерные технологии позволяют заменить строгое аналитическое обоснование ответа, неприемлемое для понимания ученика данного возраста, компьютерным наглядным экспериментом.

2.1.3. Анимационно – геометрическое вычерчивание графиков функций

В школе рассматривается построение графика функции по точкам с использованием таблицы значений функции, а также с помощью исследования функции с использованием производной. В дополнение предлагается новый анимационно-геометрический способ вычерчивания графика функции на основе геометрического моделирования операций. Поддерживая исследовательский стиль обучения, предлагается ряд тем для организации учебно-исследовательской деятельности учащихся.

Рассмотрим пример и построим график функции на основе геометрического моделирования операций над числами. Отличие от школьных заданий состоит в том, что вместо конкретных коэффициентов мы рассматриваем параметры, значения которых можно изменять перемещением соответствующих точек. В качестве инструментария используем программу GeoGebra [2]. Подробно о геометрическом моделировании операций над числами рассказывается в [1].

Пример 1. Постройте график функции $y = \dfrac{c}{x^2 + ax + b}$ ([1], задача 45.1).

Построение (рисунок 11).

1) На оси ординат отмечаем данные величины a, b, c, отмечаем начало координат O и единичную точку $E(1,0)$.
2) Строим знаменатель с помощью геометрического моделирования операций.
3) Выполняем геометрическое деление числителя на знаменатель.

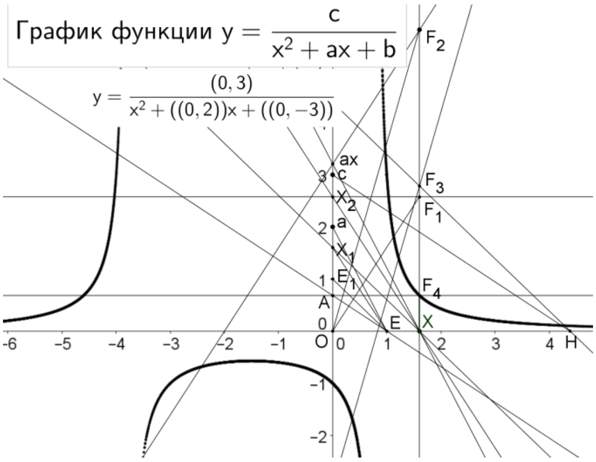


Рисунок 11 График функции

Заставляем точку F_3 оставлять след и задаем анимацию точки X. Параметры a, b, c можно изменять.

Пример 2. Постройте график функции $y = a\sqrt{x} + bx + c$.

Построение (рисунок 12). Для построения $\sqrt{x}$ находим середину D отрезка E_1X, проводим окружность с центром в точке D, проходящую через точку X, и отмечаем точку пересечения F окружности с осью ординат. Получаем точку $F(0, \sqrt{x})$.

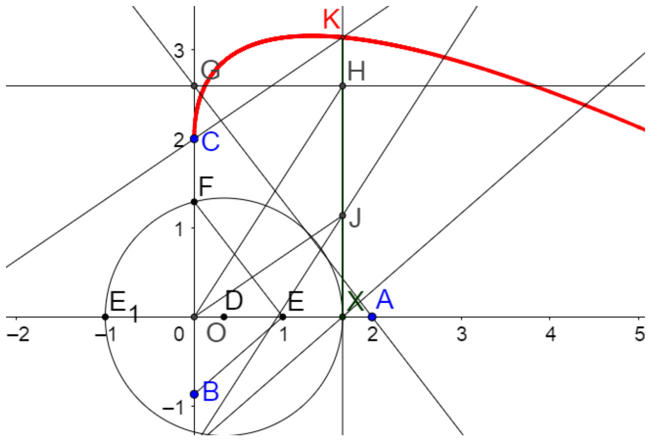


Рисунок 12 График функции $a\sqrt{x} + bx + c$

Заметим, что рассмотренный пример построения графика функции на основе геометрического моделирования операций над числами можно рассматривать как частный случай так называемого алгебраического метода решения геометрических задач. Он заключается в том, что искомый отрезок строят по формуле, выражающей его через данный набор длин данных отрезков.

Отталкиваясь от геометрического моделирования операций над числами, определим соответствующие операции над функциями. Пусть даны функции $y = f(x)$ и $y = h(x)$. Определим функции $y = f(x) \pm h(x)$, $y = f(x) \cdot h(x)$, $y = \sqrt{f(x)}$. Каждую из этих новых функций назовем сложной. Рассмотрим построение графиков сложных функций. В качестве примера возьмем $f(x) = \frac{c}{x^2+ax+b}$, $h(x) = a\sqrt{x} + bx + c$ [22].

На оси абсцисс строим точки a, b, c, изображающие коэффициенты (рисунок 13). Строим графики данных функций $f(x)$ и $h(x)$. На оси абсцисс строим точку X, изображающую переменную x, и проводим через нее вертикаль. Отмечаем точки A и B пересечения вертикали с графиками соответственно $f(x)$ и $h(x)$. Затем выполняем геометрическое сложение с помощью вертикальной прямой для сложения.

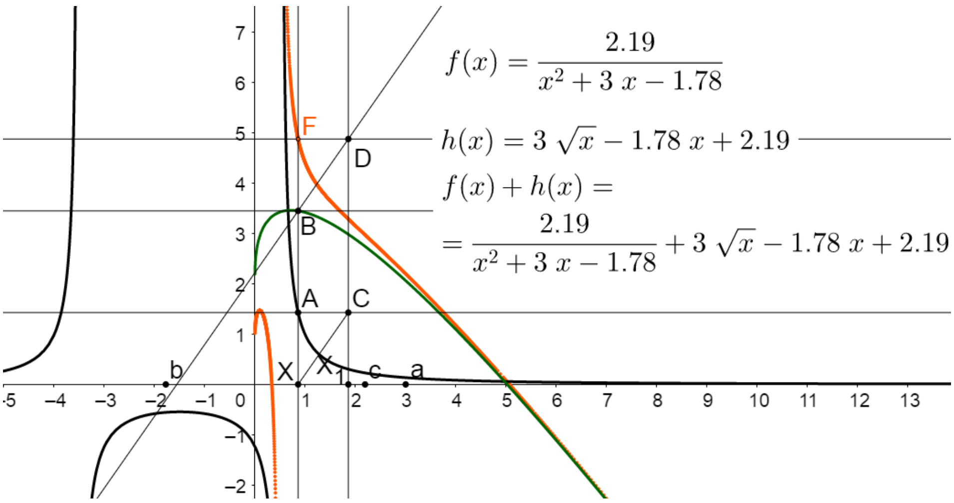


Рисунок 13 График суммы функций

Заставляем точку F оставлять след и включаем анимацию точки X. Наблюдаем вычерчивание графика функции $y = f(x) + h(x)$.

В качестве самостоятельных учебно-исследовательских работ учащимся предлагается построить произведение и частное двух прямых, результат деления параболы на прямую, построить параболу на основе геометрического моделирования операций и исследовать ее график в зависимости от коэффициентов.

Рассмотрим подход к изучению темы «Обратные функции» с использованием динамической среды GeoGebra. В рамках подхода наглядно иллюстрируется определение обратной функции, дополняя тем самым школьное изложение. Построен «графический калькулятор» умножения действительных чисел, который является аналогом логарифмической линейки [47].

2.1.4. Тригонометрические функции

Рисунок 14 демонстрирует непрерывное вычерчивание графика функции $y = \sin x$. Сначала мы моделируем наматывание числовой прямой (оси абсцисс) на единичную окружность, что превращает окружность в числовую окружность. Благодаря этому всякую точку x единичной окружности можно рассматривать как действительное число. Синус числа x определяется как ордината точки x, расположенной на единичной окружности. На основе этого определения строим анимационный рисунок, на котором вычерчивается график функции $y = \sin x$ (рисунок 14). Глядя на график функции, ученик формулирует ее свойства. И лишь потом эти свойства доказываются. Это совсем другая методика, отличная от школьной, где сначала (вслепую) рассматриваются свойства функции, а уж потом на базе свойств и частных значений вычерчивается график.

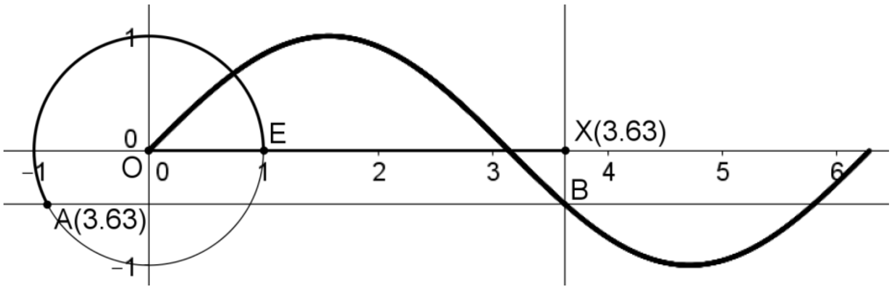


Рисунок 14 Вычерчивание графика $y = \sin x$

Анимационные рисунки сопровождают все изложение темы «функции», в том числе и решение задач с параметрами, что делает решения очевидными в буквальном смысле этого слова. В качестве компьютерной поддержки изучаемого материала предполагается создание анимационных рисунков к каждому школьному учебнику по алгебре [25].

2.1.5. Обратные функции

Представленный материал рассматривается в 10 классе [1].

При определении понятия функции ключевым является термин «соответствие», который не формализуется (хотя это возможно), а понимается интуитивно. Функцией с областью определения X и множеством значений Y называется соответствие f, при котором всякому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. При этом пишут: $y = f(x)$ и переменную x называют аргументом, а y значением функции. При таком определении функцию называют также отображением множества X на множество Y. Такая терминология весьма эффективна при рассмотрении важного и трудного понятия обратной функции.

Если всякому элементу $y \in Y$ соответствует единственный элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$, то соответствие h, сопоставляющее элементу y элемент x, является функцией $x = h(y)$, которая называется обратной для данной функции $y = f(x)$. В этом случае отображение f называется взаимно однозначным. В записи $x = h(y)$ переменная y выступает в роли независимой переменной, а переменная x в роли зависимой переменной. Однако, по традиции независимую переменную принято обозначать x, а зависимую y. Отдавая дань этой традиции, в записи обратной функции меняют местами названия переменных и пишут $y = h(x)$. Таким образом, для функции $y = f(x)$ обратной будет функция $y = h(x)$. При этом область определения X и множество значений Y данной функции для обратной функции меняются местами и обозначениями.

Анимационный рисунок 15 помогает усвоить определение обратной функции. Он содержит «методический ползунок» со значениями $n = 1{,}2$. При $n = 1$ открывается изображение 15*а*, на котором соответствия $x \to y$ и $y \to x$ указаны стрелками.

Рисунок 15а Построение графика обратной функции ($n = 1$)

При $n = 2$ появляется рисунок 15*б*. На нем дано обоснование построения графика обратной функции. При обратном отображении h точка (x, y), лежащая на графике функции $y = f(x)$, переходит в точку (y, x), которая симметрична точке (x, y) относительно биссектрисы 1-3 координатных углов. При замене x на y' и y на x' получаем точку $(y, x) = (x', y')$, которая лежит на графике обратной функции $y = h(x)$. Следовательно, графики функций $y = f(x)$ и $y = h(x)$ симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов.

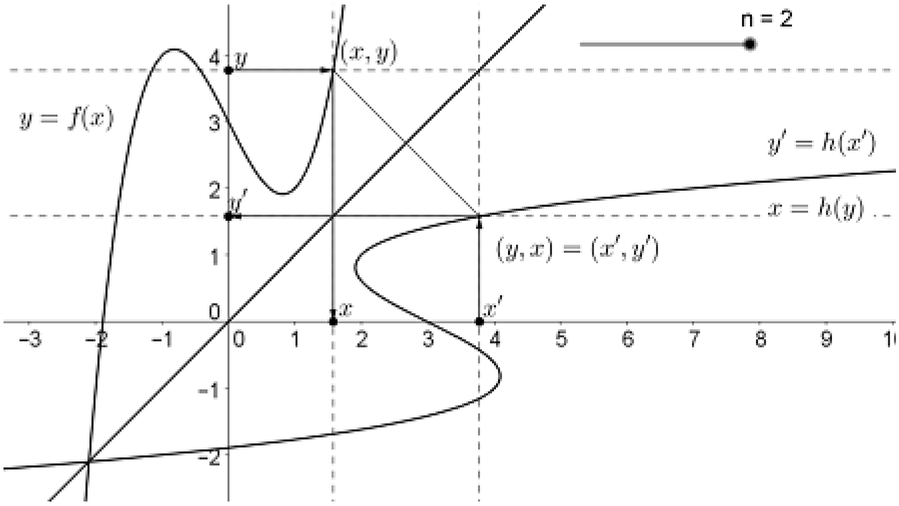


Рисунок 15б Построение графика обратной функции ($n = 2$)

Если для функции $y = f(x)$ существует обратная, то есть f является взаимно однозначным отображением, то функция называется обратимой.

Для числа 2 обратным является $\frac{1}{2}$. Обратная функция названа так потому, что обозначает отображение в обратном направлении. Нет ли связи между понятиями взаимно обратных чисел и взаимно обратных функций? Оказывается, такая связь существует. Школьная математика замалчивает этот вопрос. В то же время любознательным школьникам можно рассказать об этой аналогии. Обратным для числа a называется такое число b, что произведение $a \cdot b = 1$. Следовательно, чтобы осмыслить обратную функцию в аналогичном смысле, нужно определить умножение обратимых функций (взаимно однозначных отображений) и найти аналог единицы для них.

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются взаимно однозначными отображениями, то определим произведение отображения f на отображение g как последовательное выполнение сначала отображения f, а потом отображения g. В результате получим взаимно однозначное отображение, которое удобно записывать в виде $g \cdot f$ и читать справа налево. Тогда определение произведения можно записать в виде $(g \cdot f)(x) = g(f(x))$.

Число 1 «пропадает» при умножении на него: $a \cdot 1 = a$. Аналогом единицы для обратимых функций (взаимно однозначных отображений) является тождественное отображение $e(x) = x$, поскольку $(e \cdot f)(x) = e(f(x)) = f(x)$ и $(f \cdot e)(x) = f(e(x)) = f(x)$. Если теперь для обратимой функции $f(x)$ обратной является функция $h(x)$, действующая в обратном направлении, то их произведение как последовательное выполнение отображений, очевидно, дает тождественное отображение. Таким образом, $f \cdot h = h \cdot f = e$ – полная аналогия с числами. Следовательно, обратная функция в этом алгебраическом смысле является аналогом обратного числа.

Исходя из определения обратной функции для данной функции $y = f(x)$, для ее нахождения нужно выразить x через y, получить запись вида $x = h(y)$ и переставить местами переменные. Получим обратную функцию $y = h(x)$. Но часто невозможно явно выразить x через y без дополнительных манипуляций. Приведем два примера.

Пример 1. Для функции $y = kx + b$ при $k \neq 0$ найти обратную функцию.

Решение. Выражаем x через y, получаем $x = \frac{1}{k}y - \frac{b}{k}$, меняем местами x и y и получаем обратную функцию $y = \frac{1}{k}x - \frac{b}{k}$.

Пример 2. Для функции $y = x^3$ найти обратную функцию.

Решение. В этом случае поступают следующим образом: просто вводят обозначение $\sqrt[3]{y}$ для переменной обратной функции и говорят, что это обозначает такое число, куб которого равен y. Используют существование и единственность этого числа. Обратная функция для данной теперь запишется в виде $y = \sqrt[3]{x}$.

Аналогично получаются обозначения $\arcsin x$, $\log_a b$, и другие.

Перейдем к логарифмической функции как обратной для показательной функции.

График показательной функции мы мыслим непрерывным, то есть полученным путем непрерывного вычерчивания, «не отрывая карандаша от бумаги». Следовательно, показательная функция устанавливает взаимно однозначное отображение своей области определения (множества R) на множество значений (множество положительных действительных чисел R^+). Отсюда следует, что эта функция обратима. Обратная для показательной функции $y = a^x$ называется логарифмической функцией и обозначается $x = \log_a y$. Таким образом, запись $\log_a y$ обозначает показатель степени, в которую надо возвысить основание a, чтобы получить число y. Как обычно в таких случаях, при записи обратной функции буквы x и y меняют местами, так что логарифмическая функция записывается в виде $y = \log_a x$.

Анимационный рисунок 16 демонстрирует построение графика логарифмической функции из графика показательной функции.

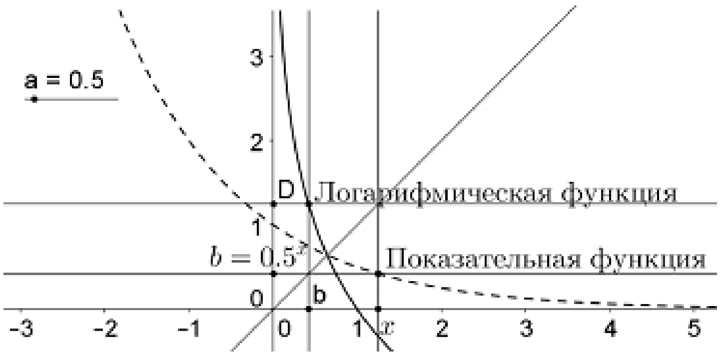


Рисунок 16 От показательной к логарифмической функции

Построение. На анимационном рисунке 16 сначала строкой ввода построен график показательной функции, а затем построена биссектриса 1 – 3 координатных углов и отражаем график показательной функции (штриховая линия) от биссектрисы получен график логарифмической функции. На оси абсцисс строим точку x и для нее соответствующую точку $b = a^x$ (на рисунке

$b = 0{,}5^x$ поскольку выбрано основание $a = 0{,}5$). Построенную точку b на оси ординат отражаем от биссектрисы и получаем число b на оси абсцисс. Строим для этого числа соответствующее число относительно логарифмической кривой и получаем точку D на оси ординат. Эта точка изображает число $\log_a b$, которое по построению равно x (точка D симметрична точке x относительно биссектрисы).

Изменяя основание a на ползунке, можно продемонстрировать все виды графика логарифмической функции. Глядя на анимационный рисунок 16, ученик сам сформулирует основные свойства логарифмической функции.

Имея логарифмическую кривую, можно геометрически перемножить действительные числа b и c следующим образом.

1. С помощью логарифмической кривой находим $b_1 = \log_a b$ и $c_1 = \log_a c$.
2. Геометрически находим сумму $d_1 = b_1 + c_1$, суммируя соответствующие отрезки.
3. С помощью логарифмической кривой находим число d такое, что $d_1 = \log_a d$. Тогда $d = a^{d_1} = a^{b_1+c_1} = a^{b_1} \cdot a^{c_1} = b \cdot c$.

Эти вычисления реализованы на анимационном рисунке 17, который таким образом представляет собой прибор для умножения действительных чисел.

Построение. Сначала строим логарифмическую кривую для основания $a = 10$ и вводим числа, например, $b = 2.24$, $c = 3.73$. Строим точки $B = (b,0)$, $C = (c,0)$. Прячем обозначения точек, а взамен к каждой точке прикрепляем надпись: $b = b$, $c = c$, где вторую букву в равенствах берем в Объектах.

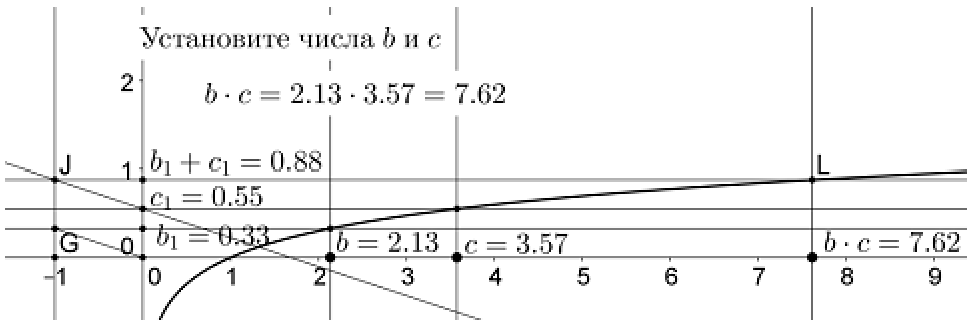


Рисунок 17 Умножение действительных чисел с помощью логарифмической кривой

Используя логарифмическую кривую, строим точки $b_1 = \log_a b$ и $c_1 = \log_a c$. На оси абсцисс произвольно строим точку G и проводим через нее вертикаль. Это будет вспомогательная прямая для сложения. На ней выполняем сложение отрезков, соответствующих числам b_1, c_1, и получаем точку J, которая изображает сумму $d_1 = b_1 + c_1$. Переносим параллельным проектированием параллельно оси абсцисс точку J на ось ординат и получаем изображение суммы на оси ординат.

Отмечаем точку L пересечения горизонтали через точку J с логарифмической кривой и проектируем ее на ось абсцисс. Полученная проекция P изображает число d такое, что $d_1 = \log_a d$. Следовательно, $d = b \cdot c$. Создаем соответствующую надпись. Построение закончено.

Теперь для умножения двух произвольно взятых чисел b и c достаточно ввести их (строкой ввода) и в точке d получить ответ. Можно вообще спрятать все линии построения, изображающие промежуточные вычисления, и на экран вывести только вводимые числа и результат умножения.

Понятно, что построенный виртуальный прибор для умножения действительных чисел сегодня не актуален и представляет лишь теоретический интерес. Вместе с тем, в недавней истории вычислений механический прибор, называемый логарифмической линейкой, основанный на том же принципе сведения умножения чисел к сложению их логарифмов, был чрезвычайно популярен при инженерных расчетах, и логарифмическую линейку изучали в школе [24].

2.1.6. Обратные тригонометрические функции

Прежде, чем приступить к изучению обратной функции для $y = \sin x$, целесообразно воспользоваться анимационным рисунком 18 и показать на нем независимую переменную – дугу x и зависимую переменную – отрезок y. Показать, как построена эта зависимость: на единичной окружности строим точку A и дугу $x = EA$, через точку A проводим вертикаль и отмечаем отрезок $y = AB$ – синус дуги. Затем продемонстрировать анимационный рисунок 14, на котором построена обратная зависимость. На оси абсцисс на отрезке $UV = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ строим точку X, изображающую переменную x, строим $OA = x$, проводим через точку A горизонталь и отмечаем точку B пересечения горизонтали с окружностью, строим искомую дугу $y = EB$. Построенная зависимость y от x записывается в виде $y = \arcsin x$, и надо добиться от учеников правильного чтения того, что здесь написано: y есть дуга (arc), синус которой равен x. Закрепляя эту формулировку с пониманием, нужно попросить ученика показать соответствующие переменные на анимационном рисунке 19, и рассказать как построена дуга y по данному отрезку x.

Итак, функция $y = \arcsin x$ является обратной для функции $y = \sin x$. Обратная функция определяется в школе как обратное отображение, отображение в обратную сторону, отображение множества значений функции на область ее определения. При этом переменные x и y меняются местами. Если точка (x, y) принадлежит графику данной функции, то точка (y, x) принадлежит графику обратной функции. Отсюда следует, что график данной функции и график обратной функции симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

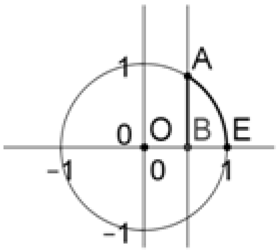


Рисунок 18 Построение синуса по дуге

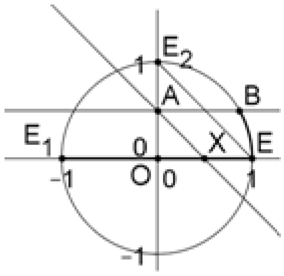


Рисунок 19 Построение дуги по синусу

Анимационный рисунок 20 реализует эту идею построения графика функции $y = \text{arcsin}x$ как обратной для функции $y = \sin x$.

При этом важно отметить, что построение обратной функции начинается с выделения ее области обратимости, где функция имеет обратную, где она представляет собой взаимно однозначное отображение.

На анимационном рисунке 20 дорисуем дугу, синус которой равен x (рисунок 21).

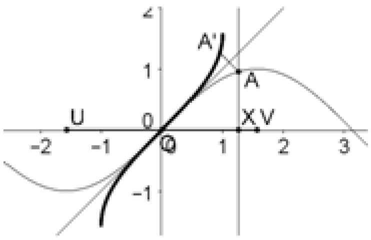


Рисунок 20 Построение графика функции $y = \arcsin x$ отражением

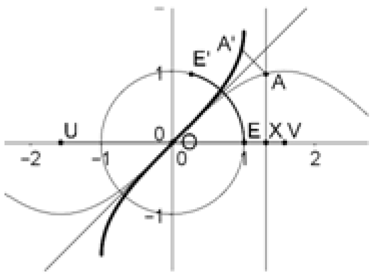


Рисунок 21 Построение графика функции $y = \arcsin x$ отражением

Встает вопрос: а нельзя ли сразу построить дугу $y = \text{arcsin}x$ как функцию от $\sin x$? Просим ученика показать на рисунке 21 эти величины. Осуществим нашу задумку.

Построение (рисунок 22).

1) Строим начало координат $O(0{,}0)$, единичную точку $E(1{,}0)$ и единичную окружность.

2) Строим точки $E_1(-1,0)$ и $E_2(0,1)$, отрезок E_1E и отмечаем на нем «текущую» точку X. Проводим через нее вертикаль.

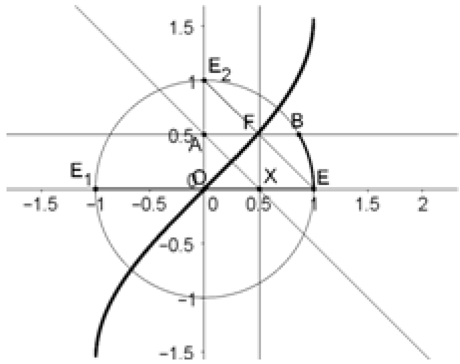


Рисунок 22 График функции $y = \arcsin x$

3) «Переносим» X на ось ординат. Для этого строим отрезок E_2E, проводим прямую через точку X параллельно построенному отрезку и отмечаем искомую точку A пересечения построенной прямой с осью ординат.

4) Через точку A проводим горизонталь и отмечаем точку B пересечения горизонтали с окружностью. Строим дугу EB и на панели объектов обнаруживаем ее длину h.

5) Строим точки $F(x(X), h)$ и $H(x(X), 2\pi - h)$ и заставляем их оставлять следы (запись $x(X)$ компьютер воспринимает как абсциссу точки X). Устанавливаем видимость этих точек условиями соответственно $x(X) \geq 0$ и $x(X) < 0$. Включаем анимацию точки X и наблюдаем как точки F и H, оставляя следы, вычерчивают график функции $y = \arcsin x$ на отрезке $[-1; 1]$.

Построение вместе с учащимися этого рисунка (или подробный рассказ с объяснением шагов построения) позволит им глубоко усвоить как само понятие $\arcsin x$ так и построение функции $y = \arcsin x$ на основе определения этого понятия.

Изучение остальных обратных тригонометрических функций проходит по такой же схеме. Чтобы анимационный рисунок 22 преобразовать для вычерчивания графика функции обратной к $y = \cos x$, вместо $f(x) = \sin x$ вводим $f(x) = \cos x$, передвигаем точки U и V, ограничивающие область обратимости новой функции, включаем анимацию и получаем график искомой функции $y = \arccos x$. Аналогично строятся анимационные рисунки по вычерчиванию обратных функций для $y = \mathrm{tg} x$ и $y = \mathrm{ctg} x$ с возможностью преобразования одного рисунка в другой [23].

2.1.7. Построение графика функции с использованием производной

Изложенный ниже материал направлен на более осмысленное усвоение «Алгоритма исследования непрерывной функции $f(x)$ на монотонность и экстремумы» [1] с последующим схематичным построением графика функции.

Пусть дана функция $f(x) = 3x^5 - 5x^3$. В среде GeoGebra строим график этой функции (рисунок 23). На оси абсцисс отмечаем точку X. Проводим через нее прямую параллельно оси ординат и отмечаем точку M пересечения прямой с графиком данной функции. Через точку M проводим касательную к графику функции. Точка X является проекцией точки M на ось абсцисс. Через точку X проведем прямую параллельную касательной. Построенную прямую будем называть прямой наклона касательной. Задаем анимацию точке X и наблюдаем, как при ее перемещении по оси абсцисс слева направо точка M перемещается по графику функции, увлекая за собой касательную, а прямая наклона касательной показывает угол наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс.

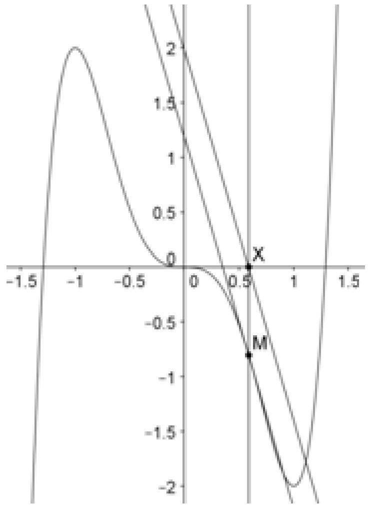


Рисунок 23 Касательная к графику функции

Теперь уберем (спрячем) график функции и касательную, оставив лишь прямую наклона касательной. При анимации точки X мы увидим, как изменяется угол наклона касательной. Поставим задачу: восстановить график данной функции, наблюдая изменения угла наклона касательной.

Составим упрощенную схему изменения угла наклона касательной. Сначала выделим точки оси абсцисс, соответствующие касательным параллельным этой оси. Это будут точки –1, 0 и 1. Затем над остальными областями оси абсцисс отметим схематично углы наклона касательной (рисунок 24).

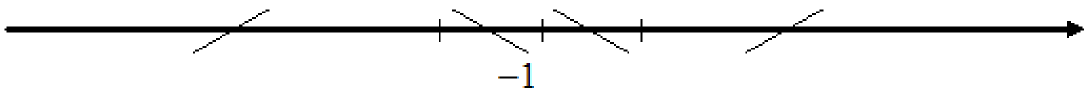


Рисунок 24 Схема углов наклона касательной

Приведем схему, показывающую изменения наклона касательной.

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$-1<x<1$	1	$1<x$
Наклон касательной	/	—	\	—	\	—	/

Рисунок 25 Схема изменения наклона касательной

По этой схеме мы можем сказать, что на промежутке $(-\infty, -1)$ функция $f(x)$ возрастает, на промежутке $(-1, 0)$ она убывает, а значит в точке $x = -1$ имеем максимум функции. Далее, на промежутке $(0,1)$ функция убывает, а значит $x = 0$ является точкой перегиба. Наконец, на промежутке $(1, +\infty)$ функция возрастает, а значит при $x = 1$ имеем минимум функции.

На основании проведенных исследований составим схему поведения графика функции, которая отражена в таблице 1. Точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс, называются стационарными точками. Для схематичного изображения частей графика функции вблизи стационарных точек предлагается использовать наглядные значки.

Таблица 1

Схема поведения графика функции

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x$
График $f(x)$	↗	∩	↘		↘	∪	↗

Для уточнения графика функции вычисляем значения функции в стационарных точках: $f(-1) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1) = -2$. Наконец, решая уравнение $3x^5 - 5x^3 = 0$, находим точки пересечения графика функции с осью абсцисс: $x_0 = 0$, $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$. В результате мы можем схематично представить график функции. Сначала отмечаем ключевые точки $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, 0)$, $(-1, 2)$, $(0,0)$, $(1, -2)$, $(\sqrt{\frac{5}{3}}, 0)$. Затем в окрестности точки $(-1, 2)$ рисуем подобие части параболы ветвями вниз и вершиной в данной точке, в окрестности начала координат рисуем перегиб, а в окрестности точки $(1, -2)$

рисуем подобие параболы ветвями вверх и вершиной в точке $(1,-2)$. Соединяя построенные части графика, получаем схематичный график данной функции (рисунок 26).

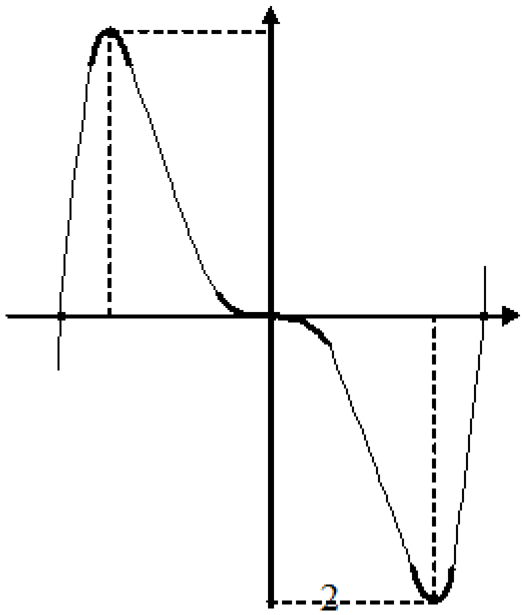


Рисунок 26 Схематичный график функции

Упражнение. Дана таблица изменения угла наклона касательной непрерывной функции $f(x)$ (таблица 2).

Таблица 2

Изменение угла наклона касательной непрерывной функции

x	$x<a$	a	$a<x<b$	b	$b<x<c$	c	$c<x$
Наклон касательной	/	—	/	—	\	—	/

Придумайте приемлемые значения для a, b, c, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, составьте таблицу изменения значений функции и нарисуйте схематично график функции.

Если в некоторой точке графика непрерывной функции касательная не существует, то в таблице изменения угла наклона касательной в соответствующей клетке будем ставить один из наглядных знаков. Точки, в которых касательная не существует, называются критическими точками.

Приведем пример такой таблицы (таблица 3).

Таблица 3

Таблица наклона касательной

x	$x<a$	a	$a<x<b$	b	$b<x<c$	c	$c<x$
Наклон касательной	/		/	$\wedge$	\	$\vee$	/

Приведите пример графика непрерывной функции, который соответствовал бы данной таблице.

Опираясь на геометрический смысл производной, приведем пример использования производной для схематичного вычерчивания графика функции.

Пример. Построить схематично график функции $f(x)=x^3-3x^2+4$, используя ее производную.

Решение.

1) Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел.

2) Найдем производную данной функции: $f'(x)=3x^2-6x$.

3) Решая уравнение $3x^2-6x=0$, находим стационарные и критические точки. В нашем случае корни уравнения $x_1=0$, $x_2=2$ являются стационарными точками.

4) Составляем таблицу изменения знаков производной, соответственно угла наклона касательной и поведения графика функции (таблица 4).

Таблица 4

Изменение знаков производной, угла наклона касательной и поведения графика функции

x	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Наклон касательной	$/$	$-$	$\backslash$	$-$	$/$
График	$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$

5) Находим значения функции в стационарных точках: $f(0)=4$, $f(2)=0$, находим корни многочлена: $x_1=-1$, $x_{2,3}=2$ и строим схематично график данной функции.

Для проверки постройте график в GeoGebra.

2.2. Педагогический эксперимент: основные этапы и результаты

Настоящий параграф посвящен описанию и анализу экспериментальной работы по реализации методики обучения по теме «Функции» с использованием исследовательского подхода с применением динамической среды GeoGebra. Эксперимент проводился в три этапа: констатирующий, поисковый и формирующий.

Первый этап – констатирующий эксперимент (2018 – 2019 гг.). Целью данного этапа было: поиск эффективных механизмов для обучения теме «Функции», рассмотрение возможностей для организации учебного процесса обучающихся 7 – 11 классов. На этом этапе на основе анализа научно-методической и математической литературы по теме исследования была определена актуальность данной темы, степень разработанности в педагогической теории и практике; определены цель, объект, предмет и задачи исследования, сформулирована рабочая гипотеза, была выбрана динамическая среда GeoGebra, в рамках которой будет реализовываться математическая подготовка обучающихся.

Второй этап – формирующий эксперимент (2018 – 2019 гг.). На данном этапе целью была разработка методики обучения теме «Функции» с использованием исследовательского подхода и использованием среды GeoGebra. Была описана представленная методика, определены цифровые ресурсы, создан Альбом анимационных рисунков (совместно с С.В. Лариным), был подобран и создан диагностический инструментарий, а также спланирован и проведен эксперимент; накапливались и обрабатывались данные экспериментальной работы.

Третий этап – формирующий эксперимент (2019 – 2020 гг.). В рамках данного этапа завершалась экспериментальная работа по внедрению в процесс обучения исследовательского подхода при изучении темы «Функции» в 7 – 11 классов. Также была осуществлена проверка выдвинутой гипотезы, обобщены и систематизированы результаты, сформированы выводы, оформлен текст научной работы.

Для проведения педагогического эксперимента были взяты два девятых и один десятый классы МБОУ СШ №45. Десятый класс состоит из 24 человек, в классе 2 подгруппы по математике, которые занимаются отдельно друг от друга, что обеспечивает идеальные условия для проведения эксперимента. Первая группа – экспериментальная, вторая – контрольная. В обеих группах по 12 человек. В двух девятых классах в сумме 52 человек. Классы занимаются отдельно друг от друга у одного учителя.

Представим результаты экспериментальной работы по реализации разработанной методики.

1 этап. На первом этапе экспериментальной работы был проведен констатирующий эксперимент. При реализации данного этапа использовались такие методы, как анализ, обобщение и систематизация, наблюдение в естественных педагогических условиях процесса обучения математике.

В ходе осуществления первого этапа был проведен анализ научно-методических исследований, посвященных вопросу настоящего исследования. В результате было выявлено, что по данному вопросу активно работает всего несколько ученых. Имеющиеся исследования не в полной мере отражают вопрос обучения теме «Функции» с использованием исследовательского подхода [45]. В имеющихся исследованиях не затронута тема «Функций», а также мало работ, учитывающих современные требования к образованию, а конкретно цифровизация образования.

Проведенные мероприятия во всех классах в рамках экспериментальной работы отражены в таблице 5.

Таблица 5

Мероприятия, проведенные в рамках эксперимента

Название мероприятий	Класс	Группа (ЭГ или КГ)	Сроки
Диагностическая контрольная работа по теме «Функции и их свойства»	9	ЭГ и КГ	Конец октября
Опрос обучающихся о внедрении исследовательского подхода в обучении с применением анимационной среды GeoGebra	9	ЭГ	Сентябрь
Опрос обучающихся о внедрении исследовательского подхода в обучении с применением анимационной среды GeoGebra	9	ЭГ	Декабрь
Итоговая диагностическая работа по теме «Функции, их свойства и график»	9	ЭГ и КГ	Конец второй четверти
Диагностическая контрольная работа по	10	ЭГ и КГ	Конец октября

теме «Функции и их свойства»			
Опрос обучающихся о внедрении исследовательского подхода в обучении с применением анимационной среды GeoGebra	10	ЭГ	Сентябрь
Опрос обучающихся о внедрении исследовательского подхода в обучении с применением анимационной среды GeoGebra	10	ЭГ	Декабрь
Итоговая диагностическая работа по теме «Функции, их свойства и график»	10	ЭГ и КГ	Конец второй четверти

Рассмотрим подробнее результаты экспериментальной работы в каждой параллели в следующем параграфе.

2.3. Реализация экспериментальной работы, ее результаты и анализ

Рассмотрим этапы и результаты экспериментальной работы в 10 классе.

В ходе проведения констатирующего эксперимента нами была проведена диагностическая работа (контрольная работа по теме «Функции, их свойства и графики» приложение А) на проверку остаточных знаний о свойствах и графиках функций курса алгебры 7 – 9 классов. При первоначальной диагностике необходимо было установить уровень знаний по указанной теме, а также уровень владения навыками построения графиков функций по таблице значений, а также при помощи параллельного переноса, сжатия и растяжения вдоль координатных осей, чтения графиков функций. Данная работа проводилась в обеих группах для установки первоначального уровня знаний по указанной теме.

Результаты работы представлены на рисунке 27. Рассмотрим подробнее каждое задание.

В задании 1 проверялись знания о том, как влияет сложение и вычитание коэффициентов при аргументе функции, а также влияние при умножении коэффициента на всю функцию. На рисунке 1 видно, что с этим заданием лучше справились обучающиеся первой группы.

В задании 2 проверялись знания о кусочно-заданных функциях, а также знание свойств функций и умение читать свойства по графику. На диаграмме видим, что снова первая группа справилась с заданием лучше, но не значительно.

Задание 3 отражает полностью задание 11 из ОГЭ, поэтому обучающиеся обеих групп успешно с ним справились. Это может быть связано еще и с тем, что одним из способов решения такого задания является построение графика каждой функции по точкам, а затем уже соотнесение своих рисунков с имеющимися в задании.

Как мы можем наблюдать, задание 4 наименее успешно выполненное задание. Связано это с тем, что в задании требовалось объяснить, как без построений выполнить третье задание. Можем видеть, что лишь 20,8% класса знают о свойствах коэффициентов и могут применить данный способ решения.

Заключительное задание 5 проверяло умение по свойствам построить схематичный график функции. В данном случае были использованы только 3 свойства: монотонность, наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывность функции. Данное задание вторая группа выполнила лучше.

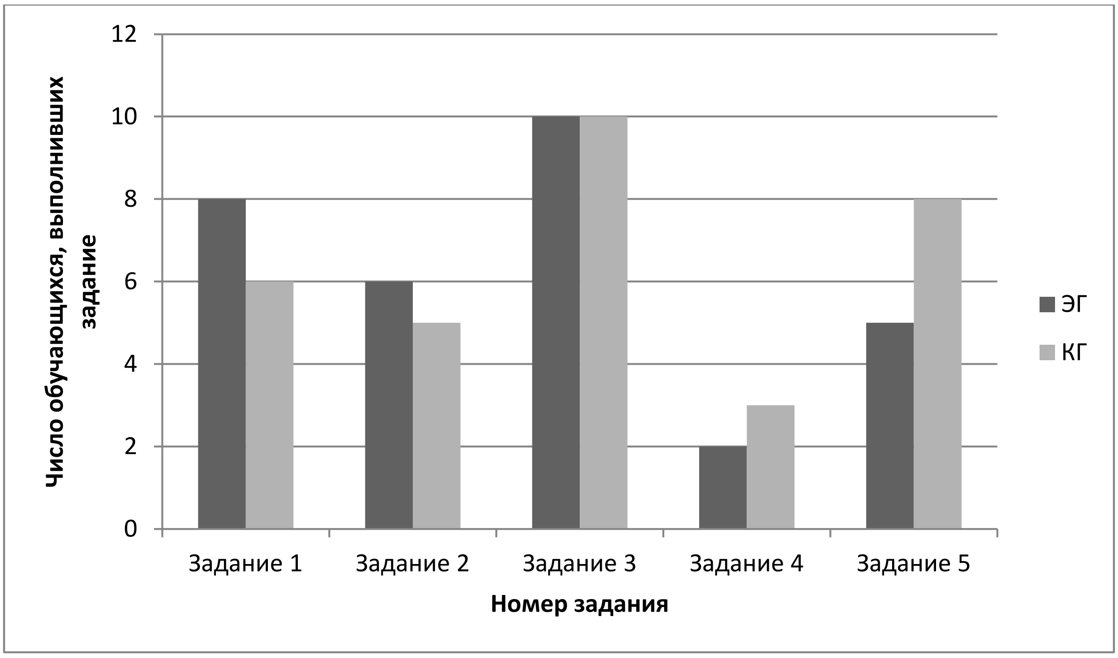


Рисунок 27 Результаты контрольной диагностической работы по теме «Функции, их свойства и графики» за курс алгебры 7 – 9 классов

Исходя из данных, представленных на рисунке 27, можно сделать вывод о том, что обе группы имеют одинаковый уровень знаний по теме «Функции, их свойства и графики» при переходе в старшую школу.

До начала экспериментальной работы и после внедрения нашей методики экспериментальная группа прошла опрос о том, как они относятся к исследовательскому подходу обучения и использованию цифровых технологий на уроках математики. Результаты опроса представлены в таблице 6.

Таблица 6

Результаты опроса обучающихся «Использование цифровых технологий на уроках математики»

Вопросы для обучающихся	ДО		ПОСЛЕ	
	положительно	отрицательно	положительно	отрицательно
1	2	3	4	5
Как Вы относитесь к использованию цифровых технологий на уроках математики?	68%	32%	97%	3%

1	2	3	4	5
Хотели бы Вы использовать цифровые технологии при решении домашних заданий?	54%	46%	86%	14%
Хотели бы Вы использовать цифровые технологии при решении контрольных работ?	58%	42%	89%	11%
Хотели бы Вы заниматься исследовательскими задачами на уроках алгебры?	32%	68%	78%	22%

Как видно из таблицы, до начала экспериментальной работы обучающиеся имели пониженный интерес к использованию цифровых технологий на уроках, для самостоятельных занятий с программами они также не имели желания. Особо низкие показатели по последнему вопросу – обучающиеся боялись исследовательских задач. После работы по нашей методике мы видим повышение интереса как к работе с цифровыми технологиями, так и к исследовательским задачам. Безусловно, сложности в работе у некоторых обучающихся отмечаются, в связи с этим и остаточный пониженный интерес. Однако, созданная для них ситуация успеха с помощью программы GeoGebra, которая позволяет исправить свою ошибку, наглядно увидеть, в чем она заключалась, позволила мотивировать обучающихся.

После четырех месяцев изучения темы «Тригонометрические функции, их свойства и графики» обе группы писали итоговую диагностическую работу (итоговая диагностическая контрольная работа по теме «Тригонометрические функции, их свойства и графики» Приложение Б). Результаты данной работы представлены на рисунке 28.

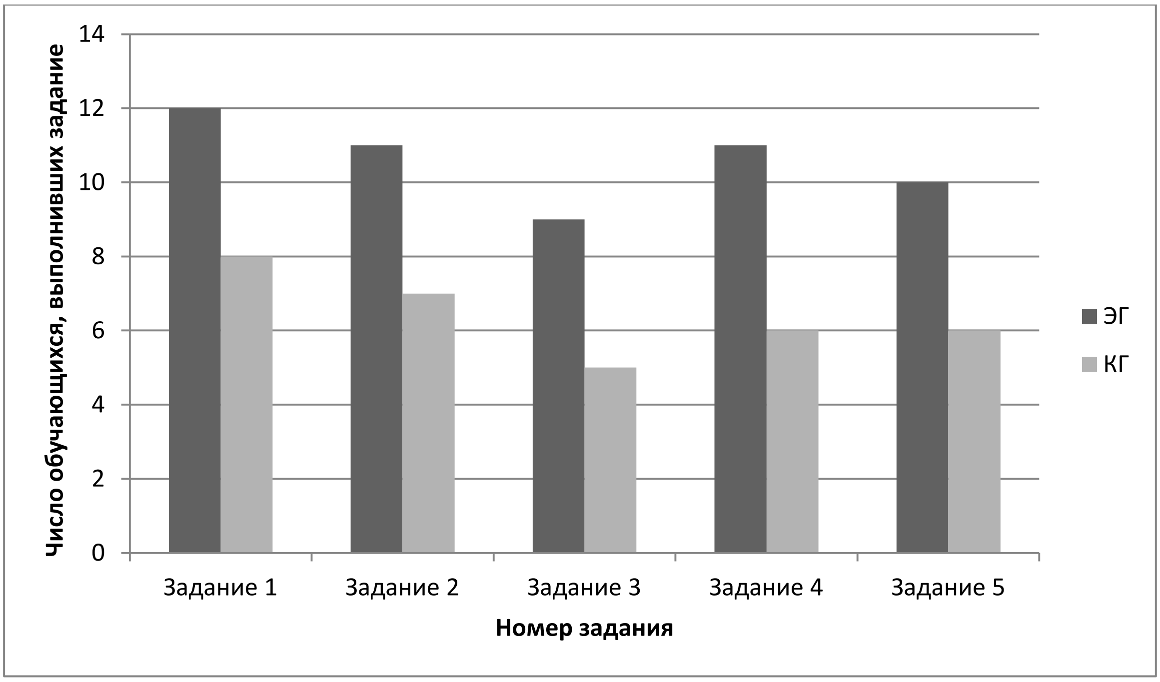


Рисунок 28 Результаты итоговой диагностической работы по теме «Тригонометрические функции, их свойства и графики»

Обработку данных проведем с помощью математической статистики с целью проверки фактического соответствия реальных результатов эксперимента предполагаемой гипотезе.

Исходя из имеющихся результатов эксперимента, предлагается применить для статистической обработки критерий Вилкоксона-Манна-Уитни. Выбор критерия обусловлен тем, что полученные результаты измерений приведены в шкале отношений и имеется сравнительно малый объем выборки (в контрольной и экспериментальной группах менее 30 человек).

Пусть имеются две выборки объемами M и N, где M – количество участников экспериментальной группы, N – количество участников контрольной группы. Вычислим эмпирическое значение критерия Манна-Уитни по формуле (1).

$$U = \sum_{i=1}^{N} a_i \qquad (1)$$

Введем обозначения: a_i - элементы второй выборки, определенные для каждого элемента первой выборки, которые превосходят его по своему значению. Далее необходимо вычислить $W_{\text{эмп}}$ - эмпирическое значение критерие Вилкоксона по формуле (2).

$$W_{\text{эмп}} = \frac{\left|\frac{N \cdot M}{2} - U\right|}{\sqrt{\frac{N \cdot M \cdot (N + M + 1)}{12}}} \qquad (2)$$

Затем необходимо сравнить это значение с критическим значением $W_{0,05} = 1{,}96$: если $W_{\text{эмп}} \leq 1{,}96$, то сделать вывод: «характеристики сравниваемых выборок совпадают с уровнем значимости 0,05»; если $W_{\text{эмп}} > 1{,}96$, то сделать вывод: «достоверность различий характеристик сравниваемых выборок составляет 95%».

Вычислим для сравниваемых выборок $W_{\text{эмп}}$ - эмпирическое значение критерие Вилкоксона по формуле (2). Параметрами для вычисления являются данные, представленные в таблице 7.

Таблица 7

Статистические данные результатов итоговой диагностической работы

	M	N	U
1	10	10	0
2	10	10	0
3	10	8	0
4	10	8	0
5	10	8	0
6	10	7	0
7	10	7	0
8	9	7	2
9	9	6	2
10	8	6	2
11	8	5	2
12	8	5	2

Из таблицы видим, что $M = 12, N = 12, U = 10$. Подставим значения в формулу (2). Получаем $W_{эмп} = 3$. Сравним полученное эмпирическое значение критерия с критическим значением: $W_{эмп} > 1,96$. Таким образом, на основании критерия Вилкоксона-Манна-Уитни, можно сделать вывод, что достоверность сравниваемых выборок составляет 95%.

Рассмотрим этапы реализации экспериментальной работы в девятых классах.

В ходе проведения констатирующего эксперимента нами была проведена диагностическая работа (контрольная работа по теме «Функции, их свойства и графики» приложение В) на проверку остаточных знаний о свойствах и графиках функций курса алгебры 7 – 8 классов. При первоначальной диагностике необходимо было установить уровень знаний по указанной теме, а также уровень владения навыками построения графиков функций по таблице значений, а также при помощи параллельного переноса, сжатия и растяжения вдоль координатных осей, чтения графиков функций. Данная работа проводилась в обоих классах для установки первоначального уровня знаний по указанной теме.

Результаты работы представлены на рисунке 4. Задания были составлены по такому же принципу, как и задания для 10 класса. Только функции были выбраны те, которые обучающиеся 9 класса в начале года уже знают.

Как и обучающиеся десятого класса, у девятиклассников вызвало затруднения задание 4.

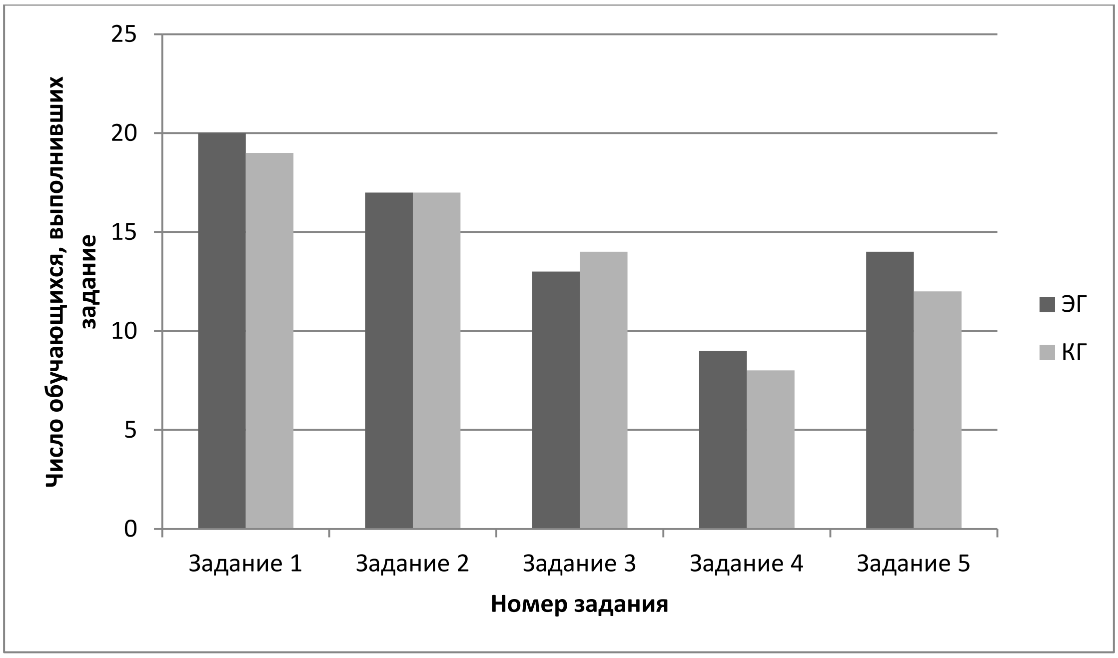


Рисунок 29 Результаты контрольной диагностической работы по теме «Функции, их свойства и графики» за курс алгебры 7 – 8 классов

Исходя из данных, представленных на рисунке 29, можно сделать вывод о том, что обе группы имеют одинаковый уровень знаний по теме «Функции, их свойства и графики» при переходе в старшую школу.

До начала экспериментальной работы и после внедрения нашей методики экспериментальная группа прошла опрос о том, как они относятся к исследовательскому подходу обучения и использованию цифровых технологий на уроках математики. Результаты опроса представлены в таблице 8.

Таблица 8

Результаты опроса обучающихся «Использование цифровых технологий на уроках математики»

Вопросы для обучающихся	ДО		ПОСЛЕ	
	положительно	отрицательно	положительно	отрицательно
1	2	3	4	5
Как Вы относитесь к использованию цифровых технологий на уроках математики?	57%	43%	98%	2%

1	2	3	4	5
Хотели бы Вы использовать цифровые технологии при решении домашних заданий?	32%	68%	85%	15%
Хотели бы Вы использовать цифровые технологии при решении контрольных работ?	41%	59%	91%	9%
Хотели бы Вы заниматься исследовательскими задачами на уроках алгебры?	24%	76%	79%	21%

Как видно из таблицы, до начала экспериментальной работы обучающиеся имели пониженный интерес к использованию цифровых технологий на уроках, для самостоятельных занятий с программами они также не имели желания. Особо низкие показатели по последнему вопросу – обучающиеся боялись исследовательских задач. После работы по нашей методике мы видим повышение интереса как к работе с цифровыми технологиями, так и к исследовательским задачам. Безусловно, сложности в работе у некоторых обучающихся отмечаются, в связи с этим и остаточный пониженный интерес. Однако, созданная для них ситуация успеха с помощью программы GeoGebra, которая позволяет исправить свою ошибку, наглядно увидеть, в чем она заключалась, позволила мотивировать обучающихся.

Возможности программы GeoGebra в полной мере позволяют реализовать исследовательский подход в обучении. Обучающиеся отмечали, что решать задания исследовательского характера проще в анимационной среде, потому что за короткое время можно наглядно увидеть множество решений, задания становятся интуитивно понятными и интересными. Также было отмечено, что впоследствии стало проще решать задания даже без подкрепления анимационной средой, так как на примере предыдущих заданий, решенных в GeoGebra, сложился опыт и понимание структуры заданий.

После четырех месяцев изучения темы «Функция $y = \sqrt[n]{x}$, ее свойства и график» обе группы писали итоговую диагностическую работу (итоговая диагностическая контрольная работа по теме «Функция $y = \sqrt[n]{x}$, ее свойства и график» Приложение Г). Результаты данной работы представлены на рисунке 30.

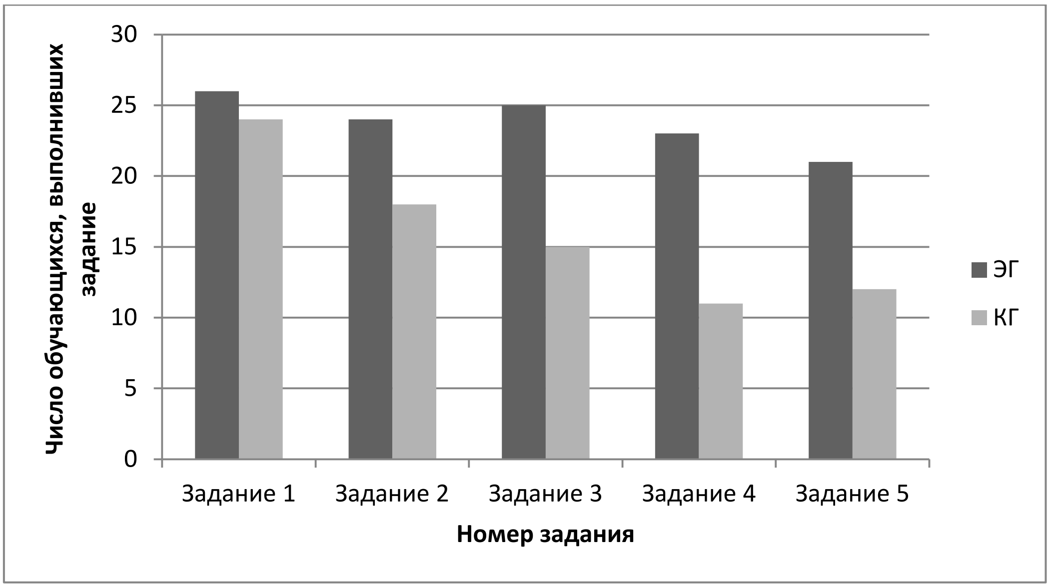


Рисунок 30 Результаты итоговой диагностической работы по теме «Функция $y = \sqrt[n]{x}$, ее свойства и график»

Обработку данных проведем с помощью математической статистики с целью проверки фактического соответствия реальных результатов эксперимента предполагаемой гипотезе.

Исходя из имеющихся результатов эксперимента предлагается применить для статистической обработки критерий Вилкоксона-Манна-Уитни. Выбор критерия обусловлен тем, что полученные результаты измерений приведены в шкале отношений и имеется сравнительно малый объем выборки (в контрольной и экспериментальной группах менее 30 человек).

Пусть имеются две выборки объемами M и N, где M – количество участников экспериментальной группы, N – количество участников контрольной группы. Вычислим эмпирическое значение критерия Манна-

Уитни по формуле (1). Далее необходимо вычислить $W_{эмп}$ - эмпирическое значение критерие Вилкоксона по формуле (2).

Затем необходимо сравнить это значение с критическим значением $W_{0,05} = 1{,}96$: если $W_{эмп} \leq 1{,}96$, то сделать вывод: «характеристики сравниваемых выборок совпадают с уровнем значимости 0,05»; если $W_{эмп} > 1{,}96$, то сделать вывод: «достоверность различий характеристик сравниваемых выборок составляет 95%».

Вычислим для сравниваемых выборок $W_{эмп}$ - эмпирическое значение критерие Вилкоксона по формуле (2). Параметрами для вычисления являются данные, представленные в таблице 9.

Таблица 9

Статистические данные результатов итоговой диагностической работы

	M	N	U
1	10	10	0
2	10	10	0
3	10	10	0
4	10	10	0
5	10	9	0
6	10	9	0
7	10	9	0
8	10	9	0
9	10	8	0
10	10	8	0
11	10	8	0
12	9	8	4
13	9	8	4
14	9	7	4
15	9	7	4
16	9	7	4
17	9	7	4
18	8	7	8
19	8	7	8
20	8	7	8
21	8	7	8
22	8	7	8
23	8	6	8
24	7	6	13
25	7	6	13
26	7	5	13

Из таблицы видим, что $M = 26, N = 26, U = 111$. Подставим значения в формулу (2). Получаем $W_{\text{эмп}} = 4$. Сравним полученное эмпирическое значение критерия с критическим значением: $W_{\text{эмп}} > 1{,}96$. Таким образом, на основании критерия Вилкоксона-Манна-Уитни, можно сделать вывод, что достоверность сравниваемых выборок составляет 95%. Следовательно, мы видим, что применение исследовательских заданий с использованием анимационной среды GeoGebra повышают уровень знаний по теме «Функции».

Выводы по главе 2

Разработка методики обучения теме «Функции» с использованием исследовательских задач с применением анимационной среды GeoGebra позволила сделать ряд выводов:

1. Созданный «Альбом анимационных рисунков» для 7 – 11 классов по теме «Функции» существенно расширяет арсенал средств обучения для учителя математики, позволяя добиваться понимания и осознанного усвоения учащимися необходимых знаний.

2. Определено содержание обучения математике в 7 – 11 классах. Сформулированы общие подходы к составлению заданий по теме «Функции» (контекстуальный, клиповый формат, ориентация на конкретное умение, ИКТ-поддержка, наличие критериев оценивания).

3. Перечислены и описаны основные этапы организации образовательного процесса обучения теме «Функции» с учетом исследовательского подхода с использованием анимационной среды GeoGebra.

4. Результативность разработанной методики обучения теме «Функции» с учетом исследовательского подхода с использованием анимационной среды GeoGebra осуществляется посредством использования диагностического инструментария.

5. Достигнутые результаты, положительная динамика изучения темы «Функции» подтвердили результативность разработанной методики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования проблемы процесса обучения теме «Функции» с точки зрения исследовательского подхода и применением программы GeoGebra в соответствии с поставленными задачами и выдвинутой гипотезой получены следующие результаты:

1. Уточнено содержание и структура изложения материала функциональной линии в школьных учебниках алгебры. Сделаны выводы об общей схеме изложения материала, выделен ряд общих задач, представленных в различных учебных пособиях.
2. Обоснован и выявлен дидактический потенциал использования анимационной среды GeoGebra на уроках алгебры при изучении функциональной линии: визуализация, анимационное сопровождение движения графиков, возможность решения исследовательских задач, возможность интеграции в различные виды уроков и виды деятельности обучающихся.
3. Разработана методическая модель обучения теме «Функции» с использованием исследовательских задач и применением анимационной среды GeoGebra. Модель разработана на основе принципов ингерентности, простоты, адекватности, нормативности, последовательности, включающая в себя совокупность взаимосвязанных компонентов: целевой, концептуальный, содержательный, технологический, контрольно-диагностический.
4. Разработан комплекс исследовательских задач с поддержкой в среде GeoGebra. На основе этих задач собран Альбом анимационных рисунков.
5. Экспериментально подтверждена результативность разработанной методики обучения теме «Функции» с

использованием исследовательсого метода с применением анимационной среды GeoGebra. и высказанная во введении гипотеза о том, что если в процессе изучения функций использовать исследовательский подход и анимационные возможности компьютерной системы GeoGebra, то это будет способствовать повышению уровня сформированности у обучаемых основных компетенций по этой теме.

Таким образом, все поставленные задачи решены, цель исследования достигнута, гипотеза исследования экспериментально подтверждена.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / Мордкович, А.Г., Денищева Л.О., Звавич Л.И., Корешкова Т.А., Мишустина Т.Н., Рязановский А.Р., Семенов, П.В. // – 5 изд., доп. – М: Мнемозина, 2008. – 343 с. : ил.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый уровень / Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. [и др.]. / М. : Просвещение, 2012. 467 с.
3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. М. : Просвещение. 2009. 430 с.
4. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. М. : Просвещение. 2009. 464 с.
5. Алышова Н.С. Использование программы Geogebra на уроках математики // Альманах современной науки и образования. 2013. №1. С.19-21.
6. Беркалиев Т.Н. Развитие образования: опыт реформ и оценки прогресса школы. СПб., 2007.
7. Вербицкий А.А. «Цифровое поколение»: проблемы образования // Профессиональное образование. Столица. 2016. № 7. URL: http://m-profobr.com/files/---------_40l6l4ix.pdf (дата обращения: 14.01.2019).

8. Гончарова Н.В., Абрамян Г.С. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. М.: Просвещение, 2018.
9. Джиоев Н.Д. Нахождение графическим способом числа решений уравнений с параметром. // Математика в школе. 1996. №2. С.75-78.
10. Дорофеев Г.В. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. – 6е изд. – М.: Просвещение, 2010.
11. Дорофеев Г.В. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. – 3е изд. М.: Просвещение, 2016.
12. Дорофеев Г.В. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. – 5е изд. М.: Просвещение, 2010.
13. Епифанова Т.Н. Графические методы решения задач с параметрами. // Математика в школе. 2003. №7. С.86–89.
14. Иванова Е.О., Осмоловская И.М. Теория обучения в информационном обществе. М.: Просвещение, 2011.
15. Капустин Е.И. О компьютерном сопровождении преподавания математики/ Е.И. Капустин // Невинномысский химический колледж. 2008. №2. С.5-8.
16. Колышницына М.С. Графические приемы решения задач с параметрами // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. URL: http://e-koncept.ru/2015/65344.htm (дата обращения: 15.03.2019).

17. Колягин Ю.М. Алгебра, 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. М.: Просвещение, 2012.
18. Колягин Ю.М. Алгебра, 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. М.: Просвещение, 2013.
19. Колягин Ю.М. Алгебра, 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. М.: Просвещение, 2014.
20. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. URL: https://rg.ru/2013/12/27/matematikasite-dok.html (дата обращения: 10.06.2020).
21. Крамор В.С. Задачи с параметрами и методы их решения. М: Оникс, 2007.
22. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. – Ростов-на-Дону: «Легион», 2015.
23. Ларин С.В. Особенности создания и использования компьютерных анимационных рисунков в обучении математике // Вестник КГПУ им. В.П Астафьева. 2020. №1. С.6–14.
24. Ларин С.В., Сивухина Е.А. Использование анимационных возможностей среды geogebra при изучении обратных функций // Материалы VIII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании» (г. Красноярск, 13–14 ноября 2019 г.). Красноярск, Красноя. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева, 2019. С.112–118.
25. Ларин С.В., Сивухина Е.А. Использование компьютерной анимации при изучении обратных тригонометрических функций //

Материалы IV Международной научной конференции «Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании» (г. Красноярск, 6–9 октября 2020 г.). Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2020. С.74–78.

26. Ларин С.В., Сивухина Е.А., Казакова Е.В., Чилбак-оол С.В., Бурнакова М.В. О создании мультимедийного дидактического материала по алгебре 7 класса. Международный сборник научных трудов «Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе». Вып. 26. Посвящается 145-летию МПГУ. – М.: ФБОУ ВО МПГУ, изд-во «Политоп», 2017, с. 99-103.
27. Майер Р.А. Задачи по формированию функциональных понятий. Пособие для учителей 5-8 классов. – М. Просвещение, 1965. – 112.
28. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского. М.: Просвещение, 2013.
29. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных организаций с приложением на электронном носителе / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. М.: Просвещение, 2013.
30. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. 21-е изд. М.: Просвещение, 2014.
31. Малова И.Е. Теория и методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие для студентов вузов. М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2009. 445 с.

32. Мордашева Т.Ю. Использование приложения GeoGebra на уроках математики // Педагогический опыт: теория, методика, практика. 2016. №4(9). С.170-173.
33. Мугаллимова С.Р., Абакарова З.С. Роль и место систем динамической математики для формирования математических понятий у учащихся на уроках геометрии // Материалы «Актуальные вопросы математического образования: состояние, проблемы и перспективы развития» (г. Сургут, 27 февраля–2 марта 2019 г.). Сургут: ХМАО-Югры «Сургутский государственный педагогический университет», 2019.
34. Мугаллимова С.Р. Методические особенности организации компьютерного эксперимента с использованием системы динамической математики GeoGebra при работе с математическими утверждениями // Мир науки. Педагогика и психология, 2020. № 2. URL: https://mir-nauki.com/PDF/12PDMN220.pdf (дата обращения: 25.09.2020).
35. Никольский С.М. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2013.
36. Никольский С.М. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2014.
37. Никольский С.М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М.: Просвещение, 2014.
38. Осмоловская И.М. Изменение процесса обучения: от общества индустриального – к информационному. М.: Народное образование, 2009.

39. Ошергина Н. В., Горев П. М. Исследовательская деятельность при обучении математике учащихся средней школы // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. Т. 9. С. 96–100. URL: http://e-koncept.ru/2016/46167.htm (дата обращения: 28.08.2019).
40. Павлова М.А. Исследовательское обучение математике учащихся основной школы во внеурочное время с использованием системы динамической геометрии: дис. к-та пед. наук. Елецк, 2018. 207 с.
41. Паршина Т.Ю. Исследовательские задачи в обучении алгебре в общеобразовательной школе // Наука и перспективы. 2018. №3. С.85-88.
42. Постановление правительства РФ. Федеральная целевая программа развития образования [Электронный ресурс]. URL: http://base.garant.ru/71044750/ (дата обращения 29.03.2020).
43. Поташник М.М. Требования к современному уроку: методическое пособие. Центр педагогического образования. М.: Центр педагогического образования, 2008.
44. Сафонов В. И., Бакаева О. А., Тагаева Е. А. Потенциальные возможности интерактивной среды Geogebra в реализации преемственности математического образования «школа-вуз» // Перспективы науки и образования. 2019. № 1 (37). С. 431-444. URL: http://pnojournal.wordpress.com/archive19/19-01/ (дата обращения: 21.05.2019).
45. Седакова В.И. Формирование исследовательских качеств у школьников в процессе решения математических задач // Вестник Сургутского государственного педагогического университета. 2010. №1. С. 64-69.

46. Селевко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий: учебнометодическое пособие: в 2 т. М.: НИИ школьных технологий. Т. 1. 2006.
47. Сивухина Е.А. Анимационно-геометрическое вычерчивание графиков функций // Материалы V Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников «Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы» (г. Красноярск, 28 апреля 2020 г.). Красноярск: Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева, 2020. С.181–183.
48. Сивухина Е.А. Функционально-графический метод решения уравнений и неравенств в курсе математики 7–9 классов: ВКР бак. пед. наук. Красноярск, 2018. 87 с.
49. Стифорова А.А., Евелина Л.Н. Исследовательские задачи на уроке математики как форма организации исследовательской деятельности школьников // Материалы Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования» (г. Самара, 2–3 декабря 2016 г.). Самара: СГСПУ, 2016. С.311-317.
50. Третьяк Т.М. Информационные технологии на уроках математики // Математика. 1998. №24. С.16-19.
51. Троякова Г.А. Применение динамической среды GeoGebra на примере проверки индивидуальных заданий по математике в 11 классе // Материалы II Всероссийской научно-методической конференции: «Информационные технологии в математике и математическом образовании» (г. Красноярск, 14–15 ноября 2013 г.). Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2013. URL: http://www.kspu.ru/upload/documents/2018/06/22/096b12a0f60aa8ebf

d3d1ca2f7b5ce64/konferentsiya-itvmimo-2013.pdf (дата обращения: 16.05.2019).

52. Тумашева О.В., Берсенева О.В. Обучение математике с позиции системно-деятельностного подхода: монография; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноясрк, 2016.
53. Тумашева О.В., Рукосуева Е.Г. Какие задачи решать на уроках математики в аспекте требований ФГОС // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2016. №1 (35).
54. Ушакова М.А., Неустроева А.В. Использование возможностей сервиса GeoGebra.org при обучении математике // Наука и перспективы. 2015. №3. С.25-28.
55. Ушакова М.А. Применение графических пакетов на уроках математики в средней школе // Наука и перспективы. 2019. №1. С.74-76.
56. Чернышева Д.А., Кравченко Г.В. Возможности применения интерактивной среды GeoGebra в обучении студентов математическим дисциплинам // Материалы «МАК-2015: “Математики – Алтайскому краю”» (г. Барнаул, 1-5 июля 2015 г.). г. Барнаул: АлтГУ, 2015. С.225–229.
57. Шашкина М.Б., Табинова О.А. Диагностика готовности выпускников школ к продолжению математического образования // Стандарты и мониторинг в образовании. 2016. Т. 4. № 3. С. 8–13.
58. GeoGebra Free Math Apps – used by over 100 Million Students & Teachers Worldwide. Available at: http:// geogebra.org.(accessed 26 September 2018)
59. GeoGebra – free mathematical program. Available at: https://vellisa.ru/ (accessed 26 September 2018).
60. Kllogjeri Qamil, Kllogjeri Pellumb. GeoGebra: calculation of centroid. European researcher, 2012, no. 9-3(30), pp. 1527–1537. Available at:

https://elibrary.ru/item.asp?id=18429926 (accessed 26 September 2018).

61. Binterová H., Šulista M. GeoGebra software use within a content and language integrated learning environment. European Journal of Contemporary Education, 2013, no. 2(4), pp. 100–116. Available at: https://elibrary.ru/item. asp?id=19406235 (accessed 26 September 2018).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Контрольная работа по теме «Функции, их свойства и графики»

1. Постройте график функции $y = 3(x-1)^2 + 2$ при помощи параллельного переноса.
2. Постройте и прочтите график кусочной функции:
$$\begin{cases} x-1, x \le -2 \\ x^2+3x+2, -2 < x < 1. \\ \sqrt{x-4}, x \ge 1 \end{cases}$$
3. Установите соответствие между функциями и их графиками.

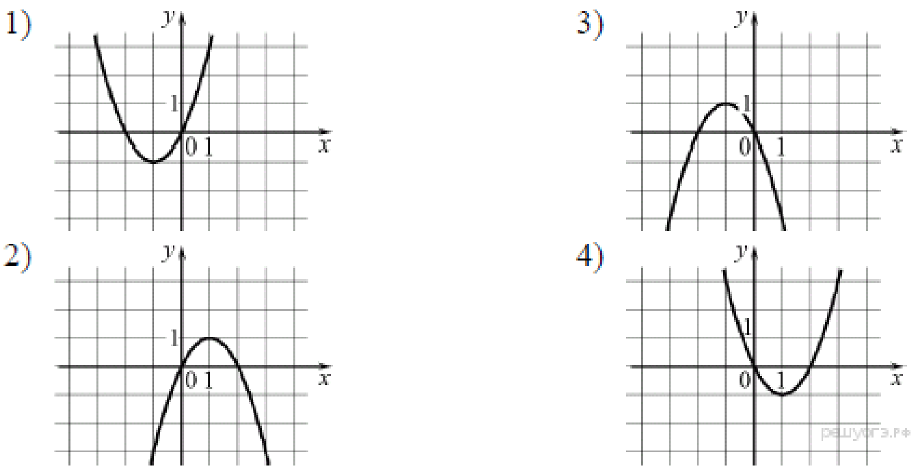
ФУНКЦИИ

А) $y = x^2 - 2x$

Б) $y = x^2 + 2x$

В) $y = -x^2 - 2x$

ГРАФИКИ



Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

4. Поясните, как выполнить без построения графиков функций задание 3.
5. Постройте схематически график функции по ее свойствам:
   a. возрастает на интервале $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$
   b. убывает на интервале $(-2; 1) \cup (3; +\infty)$
   c. $y_{\text{наиб}} = 6$; $y_{\text{наим}} = -4$
   d. имеет точку разрыва при $x = -3$.

Приложение Б

Контрольная работа по теме «Тригонометрические функции, их свойства и графики»

1. Постройте график функции: $y = 3\sin 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.
2. Опишите шаги смещения графика из задания 1.
3. Прочтите график из задания 1.
4. О функции известно, что:
   a. $x_{min} = -5\pi;\ \pi;\ x_{max} = -2\pi; 4\pi$.
   b. функция возрастает $x \in (\pi; 4\pi)$; функция убывает $x \in (-2\pi; \pi)$.
   c. $E(y) = [-1; 1{,}5]$.

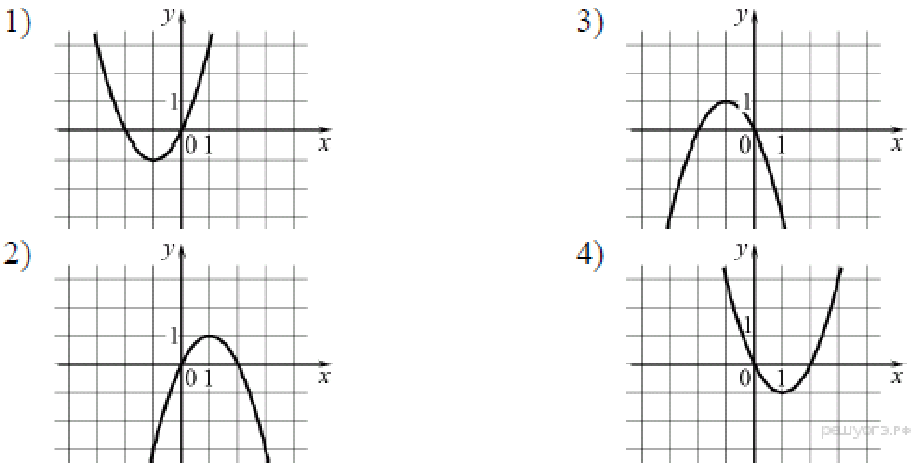
   Составьте аналитическую запись данной функции.
5. Постройте график функции из задания 4.

Контрольная работа по теме «Функции, их свойства и графики»

1. Постройте график функции $y = 3(x-1)^2 + 2$ при помощи параллельного переноса.
2. Постройте и прочтите график кусочной функции:
$$\begin{cases} x-4, x \leq -2 \\ x^2+3x+2, -2 < x < 1 \\ \frac{5}{x}, x \geq 1 \end{cases}.$$
3. Установите соответствие между функциями и их графиками.

ФУНКЦИИ
А) $y = x^2 - 2x$
Б) $y = x^2 + 2x$
В) $y = -x^2 - 2x$

ГРАФИКИ



Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

4. Поясните, как выполнить без построения графиков функций задание 3.
5. Постройте схематически график функции по ее свойствам:
   a. возрастает на интервале $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$
   b. убывает на интервале $(-2; 1) \cup (3; +\infty)$
   c. $y_{наиб} = 6$; $y_{наим} = -4$
   d. имеет точку разрыва при $x = -3$.

Приложение Г

Контрольная работа по теме «Функция $y = \sqrt[n]{x}$, ее свойства и график»

1. Постройте график функции $y = 3\sqrt{x-2} - 4$ при помощи параллельного переноса.
2. Постройте схематически график функции по ее свойствам:
   a. возрастает на интервале $(-\infty; -2) \cup (1; 3)$
   b. убывает на интервале $(-2; 1) \cup (3; +\infty)$
   c. $y_{\text{наиб}} = 6$; $y_{\text{наим}} = -4$
   d. имеет точку разрыва при $x = -3$.
3. При каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = |2(x+3)^2 - 4|$ четыре точки пересечения? [16, 21]
4. Постройте и прочтите график функции $y = \sqrt[3]{x+3} - 5$.
5. Опишите свойства функции $y = \sqrt[2m+1]{x}$.