

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.П. АСТАФЬЕВА»

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

**Материалы IX Всероссийской с международным участием
научно-методической конференции**

Красноярск, 12–13 ноября 2020 г.

Электронное издание

КРАСНОЯРСК
2020

ББК 22.1
И 471

Редакционная коллегия:

В.Р. Майер (отв. ред.)

С.В. Ларин

В.В. Абдулкин

Е.А. Аёшина

И 471 Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IX Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 12–13 ноября 2020 г. [Электронный ресурс] / отв. ред. В.Р. Майер; ред. кол. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2020. – Систем. требования: PC не ниже класса Pentium I ADM, Intel от 600 MHz, 100 Мб HDD, 128 Мб RAM; Windows, Linux; Adobe Acrobat Reader. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-00102-423-1

Представлены статьи секций «Применение систем компьютерной алгебры и графики, суперкомпьютерных вычислений для доказательства математических результатов», «Системы динамической математики, компьютерной алгебры и графики в математической подготовке школьников и студентов», «Информационные технологии в занимательной, школьной и неэлементарной математике».

Предназначены специалистам в области математики и математического образования, а также всем интересующимся данными проблемами.

ББК 22.1

ISBN 978-5-00102-423-1

© Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Применение систем компьютерной алгебры и графики, суперкомпьютерных вычислений для доказательства математических результатов

| | |
|---|----|
| Бузурный М.И. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ЛОРАНА ДЛЯ ПОЛИНОМА ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ | 7 |
| Дураков Б.Е., Созутов А.И. О ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ ФРОБЕНИУСА | 12 |
| Дураков Е.Б. О ТОЧНО КРАТНО ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУППАХ | 17 |
| Дураков М.Е. О НЕСТАНДАРТНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИЯХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ | 22 |
| Мельникова И.В., Созутов А.И. ТЕОРЕМА БЕРНСАЙДА О БАЗИСЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФИНИТНО-АППРОКСИМИРУЕМЫХ p -ГРУПП | 26 |
| Мирзаохмедов М.М. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ | 30 |
| Оконешникова Е.А. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛИЗМА В JULIA НА ПРИМЕРЕ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА | 34 |
| Рожков А.В. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ – ПРОБЛЕМА КОЛЛАТЦА | 39 |
| Рыбакова Н.Н., Созутов А.И. О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ФИНИТНО-АППРОКСИМИРУЕМЫХ p -ГРУПП | 43 |
| Сенашов В.И. АПЕРИОДИЧЕСКИЕ СЛОВА НАД КОНЕЧНЫМ АЛФАВИТОМ | 48 |
| Сенашов В.И. M_p -ГРУППЫ | 51 |
| Сидоров К.А. ЧТО ТАКОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ВЕКТОР? | 55 |
| Умбетов А.У. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ ИСТОЧНИКОВ СВЕТА В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ | 60 |
| Системы динамической математики, компьютерной алгебры и графики в математической подготовке студентов и школьников | |
| Алексашов А.А. О ЦИФРОВОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ В 9 КЛАССЕ | 67 |
| Артемьев И.В. РЕПЕТИТОР ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ЯЗЫКА PYTHON | 70 |
| Багачук С.А., Чихачёв А.Е., Шактар О.О. КОМПЬЮТЕРИЗИРОВАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ | 73 |

| | |
|---|-----|
| Безумова О.Л., Зацепина Е.В. СПОСОБЫ СОЗДАНИЯ AR-МОДЕЛЕЙ В ПРОГРАММЕ GEOGEBRA | 78 |
| Беличенко О.М., Сомова М.Н. ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ КАК АКТУАЛЬНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБРАЗОВАНИИ | 84 |
| Бочкарёва Д.В. СОСТАВЛЕНИЕ ПОЛИНОМА ЖЕГАЛКИНА МЕТОДОМ ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ В СРЕДЕ GEOGEBRA..... | 87 |
| Воробьева Н.В. ЦИФРОВАЯ КУЛЬТУРА КАК СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СОВРЕМЕННОГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ | 92 |
| Вохтомина Е.Д., Троицкая О.Н. ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ | 96 |
| Гедзя Е.А. ИЗУЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНИМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA..... | 99 |
| Дерова О.В., Бояркина Ю.А. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНИМАЦИИ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ» В 9 КЛАССЕ | 104 |
| Дудник М.С., Черкасова А.Д. О ДИДАКТИЧЕСКИХ ПРЕИМУЩЕСТВАХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СРЕДЫ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ | 107 |
| Занько Н.В., Лариончикова А.А. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО АЛГЕБРЕ В 7 КЛАССЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ В КАЧЕСТВЕ ИНСТРУМЕНТАРИЯ АНИМАЦИОННЫХ РИСУНКОВ | 111 |
| Киркина Е.Г., Ширикова Т.С. РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КРАЕВЕДЧЕСКИХ ЗАДАЧ: ОПЫТ ПРОВЕДЕНИЯ | 117 |
| Ларин С.В. ИССЛЕДОВАНИЯ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ | 121 |
| Ларин С.В., Елисова А.П. РОЛЬ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ | 127 |
| Майер В.Р. МОЖНО ЛИ ОБУЧАТЬ МАТЕМАТИКЕ ДИСТАНЦИОННО?..... | 131 |
| Малыхин В.А. ПОСТРОЕНИЕ АНИМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ | 137 |
| Мартынов В.В., Вебер А.В., Майер В.Р. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ..... | 142 |
| Некрасова Е.О., Кейв М.А. АНИМАЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA В ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ | 147 |

| | |
|---|-----|
| Нигматулин Р.М., Мартынова Е.В. РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНЫХ ЗАДАНИЙ В СИСТЕМАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА..... | 151 |
| Пашковская О.В. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ «ПЕРЕВЕРНУТЫЙ КЛАСС» ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ LMS MOODLE..... | 156 |
| Потапова Н.В. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ НА КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ВЫСШЕМ УЧЕБНОМ ЗАВЕДЕНИИ | 161 |
| Саая С.К. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СРЕДЫ GEOGEBRA ДЛЯ РАЗВИТИЯ НАВЫКОВ САМОСТОЯТЕЛЬНОСТИ У УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ | 165 |
| Сарсембаева Р.Ж., Байгурова А.Р. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИКТ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ..... | 170 |
| Сивухина Е.А. АНИМАЦИОННО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРОПЕДЕВТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ФУНКЦИОНАЛЬНУЮ ЗАВИСИМОСТЬ | 173 |
| Танзы М.В. ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ СРЕДЫ MOODLE ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ | 178 |
| Троякова Г.А. РАЗВИТИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ СРЕДСТВАМИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA..... | 181 |
| Туктамышева Е.Р. ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОЕКТНОМ МЕТОДЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ..... | 185 |
| Чупин В.О. АНИМАЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ..... | 188 |
| Ширикова Т.С., Никитин М.М. О ПОДГОТОВКЕ УЧАЩИХСЯ АРХАНГЕЛЬСКОЙ ОБЛАСТИ К ОЛИМПИАДАМ И КОНКУРСАМ ПО МАТЕМАТИКЕ | 194 |
| Информационные технологии в занимательной, школьной и неэлементарной математике | |
| Лукина В.С. ОБУЧАЮЩИЙ ВИДЕОРОЛИК «ЛЕНТА МЁБИУСА»..... | 200 |
| Маслов И.А., Павлова М.А. ИНВЕРСОР..... | 206 |
| Маслова О.В. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК И ИХ ИЛЛЮСТРАЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA..... | 212 |
| СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ..... | 216 |

**ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ
КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ,
СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ
ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА
МАТЕМАТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ**

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ЛОРАНА ДЛЯ ПОЛИНОМА ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ¹

LAURENT DETERMINANT FOR UNIVARIETY POLYNOMIAL OF ONE VARIABLE IN GENERAL POSITION

М.И. Бузурный

M.I. Buzurnyy

Ряд Лорана, детерминант Лорана, дискриминант полинома, определитель Вандермонда. Понятие детерминанта Лорана для полинома m переменных было введено в статье Форсберга–Пассаре–Циха. В ней этот детерминант был исследован для полинома, представленного в виде произведения линейно-аффинных многочленов общего положения. В настоящей статье получено новое независимое обоснование формулы детерминанта при $m=1$. Также показано, что детерминант Лорана полинома $P(z)$ кодирует особый факт независимости степенных разложений функции $\frac{1}{P(z)}$, а также конструкцию двойственных базисов гомологий и когомологий дополнения алгебраического множества.

Laurent series, Laurent determinant, Polynomial discriminant, Vandermonde determinant. The notion of the Laurent determinant for the polynomial m was introduced in the article by Forsberg-Passare-Tsikh. In it, this determinant was investigated for a polynomial represented in the form of products of linear affine polynomials in general position. In this article, a new independent substantiation of the determinant formula for $m = 1$. It is also shown that the Laurent determinant of the polynomial $P(z)$ encodes the special fact of independence of power expansions of the function $\frac{1}{P(z)}$, as well as the construction of dual homology and cohomology bases of the complement of the algebraic sets.

ВВЕДЕНИЕ

В статье М. Форсберга, М. Пассаре и А. Циха [3] было введено понятие детерминанта Лорана. Оно связано с полиномом m переменных. Дадим определение этого детерминанта в случае полинома одного переменного ($m = 1$):

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0. \quad (1)$$

Если $z_1, z_2, z_3 \dots z_n$ – корни полинома $P(z)$, то мы можем представить его в виде

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n). \quad (1')$$

Упорядочим корни по возрастанию модулей:

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|.$$

¹ Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Таким образом, корни полинома разбивают комплексную плоскость \mathbb{C} на семейство концентрических колец $\{E_k\}$, граничные окружности которых содержат корни, а внутренние части не содержат (первое кольцо является проколотым кругом, а последнее кольцо – внешностью круга).

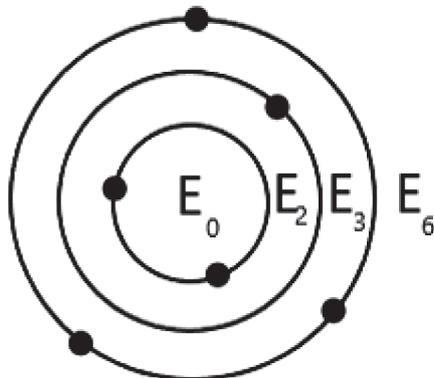


Рис. 1

Кольцо E_k идентифицируется своим порядком k – целым числом, равным числу корней (с учетом кратностей) в замыкании объединения всех предыдущих колец. В каждом кольце E_k выбираем окружность Γ_k с центром в нуле.

Определение. Детерминантом Лорана для полинома $P(z)$ называется определитель $\zeta(P) = \det(\lambda_{kj})$ матрицы из интегралов

$$\lambda_{kj} = \oint_{\Gamma_k} \omega_j,$$

где ω_j – дифференциальная форма

$$\omega_j = \frac{z^j dz}{P(z) z},$$

причем j пробегает все возможные порядки.

Заметим, что функция $\frac{1}{P(z)}$ допускает разложения в ряды Лорана в каждом кольце E_k .

Следствие 1. Ряды Лорана в кольцах E_k линейно независимы.

Следствие 2. Циклы $\{\Gamma_k\}$, $k=0, 1, \dots, n$ образуют базис группы гомологий $H_1(\mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2, \dots, z_n\})$.

Гипотеза о независимости циклов $\{\Gamma_k\}$, $k=0, 1, \dots, n$ для полинома m переменных была впервые высказана в статье Н. Бушуевой и А. Циха [1]. Для частного случая при $m=2$ доказана в статье А. Лушина и Д. Почкутова [2].

В докладе решается задача вычисления детерминанта $\zeta(P)$ в случае общего положения: модули всех корней полинома попарно различны и положительны, поэтому $a_0 \neq 0$. Доказывается

Теорема. Если P – полином общего положения, то его детерминант Лорана вычисляется через дискриминант $D = D(P)$ полинома P по формуле

$$\zeta(P) = \frac{1}{a_0 \sqrt{D}}. \tag{2}$$

Напомним, что через корни $z_1, z_2, z_3 \dots z_n$ полинома вида (1) (или (1')) дискриминант D выражается по формуле [4]

$$D = \prod_{1 \leq p < r \leq n} (z_p - z_r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Вычислим детерминант Лорана для полинома $P(z)$ общего положения. Заметим, что в этом случае число колец равно $n+1$, и их порядки принимают все значения $0, 1, \dots, n$. Поэтому $\zeta(P)$ – определитель порядка $n+1$. Вычислим элементы нулевой строки определителя, т.е. значения λ_{k0} , $k=0,1,\dots,n$. Число λ_{00} определяется вычетом в нуле $z=0$ формы $\frac{z^j dz}{P(z) z}$. Этот вычет вычисляется по формуле Коши:

$$\lambda_{00} = \oint_{\Gamma_0} \frac{1 dz}{P(z) z} = \frac{1}{P(0)} = \frac{1}{a_0}.$$

При $j>0$ получаем, что $z=0$ не является полюсом, следовательно, по теореме Коши:

$$\lambda_{0j} = \oint_{\Gamma_0} \frac{z^j dz}{P(z) z} = 0.$$

Это означает, что нулевая строка детерминанта состоит из нулей, кроме первого элемента λ_{00} , равного $\frac{1}{a_0}$.

Теперь рассмотрим строки определителя с номерами $k=1,\dots,n-1$. Элементы таких строк выражаются суммами вычетов

$$\lambda_{kj} = \oint_{\Gamma_k} \omega_j = \sum_{i=1}^k \text{res}_{z_i} \omega_j.$$

В случае $k=1$ вычет один, поэтому:

$$\lambda_{1j} = \frac{z_1^{j-1}}{\prod_{r \neq 1} (z_1 - z_r)}; 0 \leq j \leq n.$$

В случае $k=2$ вычетов два, и их сумма равна

$$\lambda_{2j} = \frac{z_1^{j-1}}{\prod_{r \neq 1} (z_1 - z_r)} + \frac{z_2^{j-1}}{\prod_{r \neq 2} (z_2 - z_r)}; 0 \leq j \leq n.$$

Продолжая так далее, получим, что общая формула j -го элемента k -ой строки детерминанта равна

$$\lambda_{kj} = \sum_{i=0}^k \frac{z_i^{j-1}}{\prod_{r \neq i} (z_i - z_r)}, 0 \leq j \leq n;$$

Применяя метод Гаусса преобразования матриц, умножим первую строку определителя на (-1) и сложим с остальными. При таком действии слагаемое $\lambda_{1j} = \frac{z_1^{j-1}}{\prod_{r \neq 1} (z_1 - z_r)}$ уйдет из всех λ_{kj} , и останется

$$\lambda_{ij} = \sum_{i=2}^n \frac{z_i^{j-1}}{\prod_{r \neq i} (z_i - z_r)}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Аналогичным образом, домножив вторую строку на (-1) и прибавив к остальным строкам, получим:

$$\lambda_{ij} = \sum_{i=3}^n \frac{z_i^{j-1}}{\prod_{r \neq i} (z_i - z_r)}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Повторив данную процедуру еще n-2 раза, получим, что общая формула элемента i-ой строки определителя равна

$$\lambda_{ij} = \frac{z_i^{j-1}}{\prod_{r \neq i} (z_i - z_r)}, \quad 0 \leq j \leq n;$$

Заметим, однако, что элементы последней строки детерминанта Лорана мы вычисляем по контуру Γ_n , а интеграл по этому контуру равен вычету дифференциальной формы $\omega_j = \frac{z^j}{p(z)} \frac{dz}{z}$ в бесконечности со знаком «минус». Совершая замену $z = \frac{1}{w}$ и подставляя в выражение для ω_j , получим:

$$\omega_j = -\frac{\frac{1}{w^j}}{p\left(\frac{1}{w}\right)} \frac{dw}{w^2} w = -\frac{dw}{w^{j+1} p\left(\frac{1}{w}\right)}.$$

При $j \leq (n - 1)$ мы получим, что в выражении

$$\omega_j = -\frac{dw}{w^{j+1-n} + a_{n-1} w^{j+1-n+1} + \dots + a_0 w^{j+1}}$$

точка $w = 0$ не является полюсом, а, следовательно, вычет от ω_j в этой точке будет равен 0.

При $j=n$ мы получим следующее выражение:

$$\omega_j = -\frac{dw}{w + a_{n-1} w^2 + \dots + a_0 w^{n+1}}$$

Видно, что точка $w=0$ является полюсом первого порядка. Посчитаем вычет $-res \omega_n$ в точке $w=0$:

$$-res \omega_n = \frac{-1}{(w + a_{n-1} w^2 + \dots + a_0 w^{n+1})'} \Big|_{w=0} = \frac{1}{1 + 2a_{n-1} w + \dots + (n+1)a_0 w^n} \Big|_{w=0} = 1;$$

Таким образом, получаем, что (n+1)-я строчка детерминанта Лорана состоит из нулей, кроме последнего элемента, который равен 1.

Итак, для детерминанта Лорана получаем выражение:

$$\zeta(P) = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\prod_{p < r \neq (n-1)} (z_p - z_r) \times \prod_{1 \leq p < r \leq n} (z_p - z_r)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_0} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & z_{n-1} & \dots & z_{n-1}^{n-1} \\ 1 & 1 & z_n & \dots & z_n^{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по нулевой, затем по n-ой строке, получим:

$$\zeta(P) = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{a_0 \times \prod_{p < r \neq (n-1)} (z_p - z_r) \times \prod_{1 \leq p < r \leq n} (z_p - z_r)} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-2} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_{n-1} & \dots & z_{n-1}^{n-2} \\ 1 & z_n & \dots & z_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Также заметим, что получившийся определитель является определителем Вандермонда и по определению равен $\prod_{p < r \neq (n-1)} (z_p - z_r)$, где p и r удовлетворяют условиям $0 \leq p < r \leq n$, причем $p \neq n - 1$ и $r \neq n - 1$.

Таким образом, окончательно получаем:

$$\zeta(P) = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \prod_{p < r \neq (n-1)} (z_p - z_r)}{a_0 \prod_{p < r \neq (n-1)} (z_p - z_r) \cdot \prod_{1 \leq p < r \leq n} (z_p - z_r)} = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\prod_{1 \leq p < r \leq n} (z_p - z_r)} = \frac{\pm 1}{a_0 \sqrt{D}}.$$

Формула (2), а также теорема доказаны.

Утверждение Следствия 1 вытекает из Теоремы, поскольку по теореме Лорана коэффициенты разложения ряда функции $\frac{1}{P(z)}$ в кольце E_k равны λ_{ij} .

Следствие 2 получается также из того факта, что циклы Γ_k и формы ω_j образуют взаимно-двойственные базисы гомологий и когомологий.

Выводы. Получено новое доказательство формулы детерминанта Лорана для полиномов одного переменного. Сформулированы важные следствия о линейной независимости рядов Лорана в различных кольцах и о базисе гомологий дополнения алгебраического множества в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Библиографический список

1. Bushueva N.A., Tsikh A.K. On amoebas of algebraic sets of higher codimension // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012. Vol. 279. С. 52–63.
2. Lushin A.K., Pochekutov D.Y. Toric cycles in the complement to a complex curve in $(\mathbb{C}^x)^2$ // Mathematische Nachrichten. 2019.
3. Forsberg M., Passare M., Tsikh A.K. Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas // Advances in Mathematics. 2000. Vol. 151. С. 45–70.
4. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.

О ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ ФРОБЕНИУСА¹

ABOUT GROUPS

SATURATED WITH FINITE FROBENIUS GROUPS

Б.Е. Дураков, А.И. Созутов

B.E. Durakov, A.I. Sozutov

Насыщенность, группа Фробениуса, конечный элемент, энгелевый элемент, группа Шункова. Найдены условия, при которых периодическая группа, насыщенная группами Фробениуса, сама является группой Фробениуса, а группа Шункова с теми же условиями обладает периодической частью.

Saturation, Frobenius group, finite element, Engel element, Shunkov group.

Conditions for a saturated with finite Frobenius groups periodic group to be a Frobenius group and for a Shunkov group with the same conditions to have a periodic part are found.

Группа G насыщена группами из множества групп X , если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G , изоморфной подходящей группе из X .

Группу G называем группой Фробениуса с дополнением H и ядром F , если:

1. $G = F \rtimes H$, где F и H – собственные подгруппы группы G ;
2. (G, H) – пара Фробениуса, т.е. $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$;
3. $G \setminus F^\# = \cup H^g$.

Элемент a группы G называется энгелевым, если для любого элемента $b \in G$ существует такое натуральное число $n = n(b)$, что выполняется равенство $[\dots [b, a], a], \dots, a] = [b, {}_n a] = 1$, и конечным, если все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$ ($g \in G$) конечны.

В работе [19] доказана следующая

Теорема 1. Пусть периодическая группа G с нетривиальным локально конечным радикалом R насыщена конечными группами Фробениуса и содержит конечный не энгелевый элемент a простого порядка. Если $a \in R$, то $G = F \rtimes H$ – группа Фробениуса с ядром $F < R$ и дополнением H , где $a \in H$, и либо $H = N_G(\langle a \rangle)$ либо $H = N_G(\langle a \rangle)$, либо подгруппа $\langle a^H \rangle$ изоморфна $SL_2(3)$, или $SL_2(5)SL_2(5)$. Если $a \notin R$, то $G = F \rtimes H$, где (G, H) – пара Фробениуса, $H = N_G(\langle a \rangle)$ и $F \rtimes \langle a \rangle$ – группа Фробениуса с ядром $F > R$ и дополнением $\langle a \rangle$.

Группы, насыщенные различными множествами X конечных групп, интенсивно изучаются более 25 лет; таким исследованиям посвящены десятки статей, в том числе в центральной печати. В них доказываются либо локальная конечность исследуемой группы, либо существование локально конечной периодической части в группе Шункова.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10017).

Особо отметим, что группы из теоремы 1 не обязаны быть локально конечными. Примеры не локально конечных периодических групп, удовлетворяющих условиям теоремы 1, можно найти в [5; 18; 22; 23]. Приведем только теорему-пример 5.1 из [18].

Пример 1. Пусть m, n, q – натуральные числа, $m \geq 2$, q – простое, $(q, n) = 1$, $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ – каноническое разложение n , $\alpha_0 \geq 0$ и $p_1^{\alpha_1-1} \dots p_s^{\alpha_s-1} \geq 665$. При этих условиях существует m -порожденная бесконечная группа Фробениуса $G = F \rtimes H$ с элементарным абелевым ядром F периода q и не локально конечным дополнением H периода n , и все элементы простых порядков из H порождают конечную циклическую подгруппу $\Omega_1(H)$. В частности, каждый неединичный элемент a из $\Omega_1(H)$ является конечным, не энгелевым и принадлежит локально конечному радикалу R группы G .

Группы Фробениуса $G = F \rtimes H$ из данного примера удовлетворяют первому утверждению теоремы 1. Для достаточно большого $n > 10^{10}$ методами из [16], видимо, можно доказать существование континуального множества таких групп Фробениуса. Авторам неизвестно, существуют ли группы, удовлетворяющие второму утверждению теоремы 1, когда конечный не энгелевый элемент a не принадлежит локально конечному радикалу R группы G . Существование таких групп равносильно отрицательному решению вопроса 6.56 б) В.П. Шункова из Коуровской тетради [6]:

6.56 б). Пусть $G = F \rtimes \langle a \rangle$ – группа Фробениуса, причем дополнение $\langle a \rangle$ имеет простой порядок. Если группы $\langle a, a^g \rangle$ конечны для всех $g \in G$, то будет ли ядро F локально конечной группой?

В комбинаторной теории групп существуют многочисленные примеры не локально конечных периодических групп без инволюций, которые насыщены различными множествами конечных групп. Группы $B(m, n)$ достаточно большого нечетного периода, периодические произведения С.И. Адяна и многие группы А.Ю. Ольшанского, С.В. Иванова и др. расщепляемы, и каждая конечная подгруппа в них содержится в максимальной компоненте расщепления. Значит, они насыщены подходящими множествами X конечных групп, однако их изучение не доступно нашим методам исследований. Есть одна общая черта указанных объектов комбинаторной теории групп: насыщающее множество X всегда содержит циклическую группу достаточно большого порядка. В связи с этим приведем вопрос А.Ю. Ольшанского 14 из [2]:

Вопрос А.Ю. Ольшанского. Пусть p – простое число. Существует ли бесконечная периодическая группа G , в которой любая максимальная подгруппа является элементарной абелевой группой порядка p^2 ?

В наших исследованиях постоянно возникают вопросы о существовании групп бернсайдова типа с различными экстремальными свойствами. Приведем ряд из них, которые определяют границу между познаваемыми и непознаваемыми нашими методами группами.

Вопрос 1. Существует ли простая периодическая группа, в которой любая максимальная подгруппа является конечной группой Фробениуса?

Подгруппа B группы G называется дополнением к подгруппе A , если $G = AB$ и $A \cap B = 1$ (здесь A и B собственные подгруппы в G). Подгруппа F группы G называется сильно изолированной, если она содержит централизатор любого своего неединичного элемента. В конечной группе G сильно изолированная нормальная подгруппа F всегда обладает дополнением H и является группой Фробениуса $G = F \rtimes H$ с ядром F [4]. Поэтому любая периодическая группа с сильно изолированной локально конечной нормальной подгруппой будет насыщена конечными группами Фробениуса.

В связи с этим возникают также следующие вопросы.

Вопрос 2. Существует ли периодическая группа с недополняемой нормальной сильно изолированной абелевой подгруппой?

Вопрос 3. Существуют ли периодические группы Фробениуса $G = F \rtimes H$ с абелевым ядром и простым неабелевым дополнением H ?

Вопросы 1–3 обосновывают необходимость в теореме 1 условия существования в группе конечного не энгелева элемента.

Для того чтобы условие насыщенности работало эффективно, необходима достаточно «густая сеть» (локально) конечных подгрупп с нетривиальными пересечениями, по которой могла бы распространяться «кристаллизация по насыщенности» до вполне определенного строения всей группы. Такая сеть конечных подгрупп в наших исследованиях обеспечивается дополнительными условиями конечности.

Группа, в которой каждый элемент простого порядка конечен, называется слабо сопряженно бипрimitивно конечной.

Теорема 2. Периодическая слабо сопряженно бипрimitивно конечная группа G с нетривиальным локально конечным радикалом R , насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса $G = F \rtimes H$, а подгруппа $(F \cap R) \rtimes \Omega_1(H)$ – локально конечной группой Фробениуса.

Как следует из примера 1, группа G из теоремы 2 не обязана быть локально конечной.

Группа, все сечения которой по конечным подгруппам (включая единичную) слабо сопряженно бипрimitивно конечны, называется сопряженно бипрimitивно конечной, или группой Шункова. Говорят, что смешанная группа G обладает периодической частью $T(G)$, если все элементы конечных порядков в G составляют подгруппу $T(G)$.

Теорема 3. Группа Шункова с нетривиальным локально конечным радикалом, насыщенная конечными группами Фробениуса, обладает периодической частью, являющейся группой Фробениуса с локально конечным дополнением.

В теоремах 1–3 изучены группы с нетривиальным локально конечным радикалом. Существование локально конечного радикала – достаточно сильное условие. В настоящее время ведется работа по доказательству аналогичных результатов без этого условия.

Теорема 4. *Периодическая слабо сопряженно бипрimitивно конечная группа, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса.*

Теорема 5. *Группа Шункова, насыщенная конечными группами Фробениуса, обладает периодической частью.*

Библиографический список

1. Amberg V., Fransman A., Kazarin L. Products of locally dihedral subgroups // Journal of Algebra. 2013. 350. P. 308–317.
2. Белоусов И.Н., Кондратьев А.С., Рожков А.В. XII школа-конференция по теории групп, посвященная 65-летию со дня рождения А.А. Махнева // Труды ИММ УРО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 286–295.
3. Блудов В.В. О группах Фробениуса // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1219–1221.
4. Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М. Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
5. Журтов А.Х., Лыткина Д.В., Мазуров В.Д., Созутов А.И. О периодических группах, свободно действующих на абелевых группах // Труды института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 136–143.
6. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск: ИМ СО РАН. 2018.
7. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
8. Ли Б. Дж., Лыткина Д.В. О силовских 2 -подгруппах периодических групп, насыщенных конечными простыми группами // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1313–1319.
9. Лыткина Д.В., Мазуров В.Д. О группах, содержащих сильно вложенную подгруппу // Алгебра и логика. 2009. 48, № 2. С. 190–202.
10. Лыткина Д.В., Мазуров В.Д. Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2007. 46, № 5. С. 606–626.
11. Лыткина Д.В. О группах, насыщенных конечными простыми группами // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 5. С. 628–653.
12. Лыткина Д.В., Созутов А.И., Шлепкин А. А. Периодические группы 2 -ранга два, насыщенные конечными простыми группами // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 786–796.
13. Лыткина Д.В., Шлепкин А.А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами типа L_3, U_3 // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 4. С. 441–448.
14. Лыткина Д.В., Шлепкин А.А. Периодические группы, насыщенные линейными группами степени 2 и унитарными группами степени 3 // Математические труды. 2018. 57, № 1. С. 55–72.
15. Максименко А.А., Мамонтов Ф.С. Локальная конечность некоторых групп, порожденных классом сопряженных элементов порядка 3 // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48. № 3, май–июнь. С. 631–644.
16. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
17. О существовании в группе бесконечных подгрупп с нетривиальным локально конечным радикалом // Препринт ВЦ СО АН СССР в г. Красноярске, 1980. С. 11–19.
18. Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П. Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004, 211 с.
19. Созутов А.И. О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса // Мат. заметки (статья принята к печати).
20. Созутов А.И. О группах с конечным энгелевым элементом // Алгебра и логика. 2019. Т. 58. № 1. С. 96–115.
21. Созутов А.И. О группах с фробениусовыми парами сопряженных элементов // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 2. С. 204–212.

22. Созутов А.И., О группах Шункова действующих свободно на абелевых группах // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54. № 1, январь–февраль. С. 188–198.
23. Созутов А.И. О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 4. С. 893–901.
24. Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г. Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Сибирский федеральный университет. 2011. 149 с.
25. Созутов А.И., Шлепкин А.К. О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 3. С. 433–447.
26. Созутов А.И., Шунков В.П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Матем. сб. 1976. Т. 100, № 4. С. 495–506.
27. Старостин А.И. О группах Фробениуса // Укр. матем. журн. 1971. Т. 23, № 5. С. 629–639.
28. Шлепкин А.К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Труды института математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 129–138.
29. Шлепкин А.К. О периодической части некоторых групп Шункова // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 1. С. 96–125.
30. Шлепкин А.К. О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами $U_3(2^n)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 5. С. 606–615.
31. Шлепкин А.К., Рубашкин А.Г. Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1.
32. Шлепкин А.К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Третья международная конференция по алгебре. 23–28 августа 1993: сб. тезисов. Красноярск. 1993. С. 369.

ТОЧНО КРАТНО ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ¹

AN EXACT MULTIPLE OF TRANSITIVE GROUPS

Е.Б. Дураков

E.B. Durakov

Группа, точно k -транзитивная группа, локально конечная группа, почти-область, почти-поле.

В работе рассматриваются бесконечные точно дважды и трижды транзитивные группы, связь этих групп с такими алгебраическими структурами, как почти-поля, почти-области, КТ-поля (поля Керби–Титса) в свете известной проблемы о истинности теоремы Жордана в общем случае.

Group, sharply k -transitive group, locally finite group, near-domain, near-field.

In this paper, we consider infinite exactly twice and thrice transitive groups, the relation of these groups to such algebraic structures as almost-fields, almost-domains, and KT-fields (Kirby-Tits fields) in light of the well-known problem of the truth of Jordan's theorem in the General case.

Группа G перестановок множества F ($|F| \geq k$) называется *точно k -транзитивной* на F , если для любых двух упорядоченных множеств $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ элементов из F таких, что $\alpha_i \neq \alpha_j$ и $\beta_i \neq \beta_j$ для $i \neq j$, существует точно один элемент группы G , переводящий α_i в β_i ($i = 1, \dots, k$). Точно k -транзитивны симметрические группы S_k, S_{k+1} и знакопеременная группа A_{k+2} , а также группы Матье M_{11} ($k = 4$) и M_{12} ($k = 5$). В 1872 г. К. Жордан доказал, что при $k \geq 4$ каждая конечная точно k -транзитивная группа изоморфна одной из перечисленных выше групп ([1][с. 215]). Ж. Титс и М. Холл установили, что для $k \geq 4$ бесконечных точно k -транзитивных групп нет ([1][с. 215], [2][с. 86–87]). В отличие от случаев $k \geq 4$, множества конечных точно 2- и 3-транзитивных групп счетны, а множества локально конечных – континуальны. Так, группа $T_2(F)$ аффинных преобразований $t_{a,b}: x \rightarrow a + bx$ ($a, b \in F, b \neq 0$) произвольного поля F действует на F точно 2-транзитивно, а группа дробно-линейных преобразований $x \rightarrow \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$ ($a, b, c, d \in F, a \cdot d \neq b \cdot c$) действует точно 3-транзитивно на множестве $X = F \cup \{\infty\}$ точек проективной прямой. В общем случае с точно 2- и 3-транзитивными группами связаны такие алгебраические структуры, как почти-поля, почти-области, КТ-поля (поля Керби–Титса) и др. (см. [1] [гл. V], [2] [гл. 20]).

Напомним определение почти-области (см., например, [1] [гл. V, с. 216]). Алгебраическая структура $F = (F, +, \cdot)$ называется *почти-областью*, если

Fb1: $F(+)$ – лупа с нейтральным элементом 0 ,

Fb2: (F^*, \cdot) – группа с нейтральным элементом 1 (здесь $F^* = F \setminus \{0\}$),

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, проект № 19-01-00566 А.

$$\text{Fb3: } a + b = 0 \rightarrow b + a = 0 \quad (a, b \in F),$$

$$\text{Fb4: } 0 \cdot a = 0 \text{ для каждого } a \in F,$$

$$\text{Fb5: } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ для всех } a, b, c \in F,$$

Fb6: Для каждой пары элементов $a, b \in F$ существует элемент $d_{a,b} \in F^*$ такой, что $a + (b + x) = (a + b) + d_{a,b} \cdot x$ для всех $x \in F$.

Почти-поля были введены Л.Е. Диксоном в 1905 г. Это алгебраические системы $(F, +, \cdot)$ с двумя бинарными операциями, причем:

1. $(F, +)$ – абелева группа с нейтральным элементом 0 ,

2. (F^*, \cdot) – группа с нейтральным элементом 1 ($F^* = F \setminus \{0\}$),

3. для всех $a, b, c \in F$ выполняется один из законов дистрибутивности $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Почти-поле $(F, +, \cdot)$ называется *планарным*, если для любых $a, b \in F$ и $b \neq 1$ уравнение $a + bx = x$ разрешимо в F .

Следующие результаты доказывали Г. Карцель, Г. Гретцер, Г. Вефельшайд, Ж. Титс, В. Керби, М. Холл, Ж. Титс, В.Д. Мазуров и др. (см. [1] [с. 216–229], [5; 6]).

Предложение 1.

1. Если F – почти-область, то $T_2(F)$ – точно дважды транзитивная группа подстановок множества F .

2. Если T точно дважды транзитивная группа подстановок множества F , то можно ввести на F такие две операции $+$, \cdot , согласованные с действием группы T , что $(F, +, \cdot)$ будет почти-областью, а T – ее группой $T_2(F)$ аффинных преобразований.

3. Почти-область F тогда и только тогда является почти-полем, когда $d_{a,b} = 1$ для всех $a, b \in F$.

4. Почти-область F тогда и только тогда является почти-полем, когда группа F^* обладает нетривиальной абелевой нормальной подгруппой.

5. Группа $T_2(F)$ почти-поля F тогда и только тогда является группой Фробениуса, когда F – планарное почти-поле.

6. Если F – почти-область и F^* – группа с конечными классами сопряженных элементов, то F либо поле, либо конечное почти-поле.

В силу известной теоремы Жордана каждая (локально) конечная точно 2-транзитивная T группа обладает регулярной на F абелевой нормальной подгруппой. Это позволяет ввести на F две операции $+$ и \cdot , согласованные с действием группы T , относительно которых F становится почти-полем, а T – его группой аффинных преобразований. Конечные точно 2- и 3-транзитивные группы и почти-поля были классифицированы Г. Цассенхаузом [1] [гл. IV и теорема V.5.2]. Исчерпывающее описание локально конечных точно 3-транзитивных групп получил О. Кегель [3].

Исследования бесконечных точно 2- и 3-транзитивных групп продолжаются.

В.Д. Мазуров в [5] полностью описал точно трижды транзитивные группы с абелевыми стабилизаторами двух точек. В [6] получен ряд обобщений теоремы Жордана и установлены отличительные свойства точно 2-транзитивных групп

характеристики 0. В статье [7] доказана локальная конечность бинарно конечных точно 2-транзитивных групп; в [8] более общий результат получен для групп Шункова.

Совместно с А.И. Созутовым были доказаны и опубликованы следующие результаты:

1. в классе точно дважды транзитивных групп:

Теорема 1. Если почти-область $F(+, \cdot)$ характеристики, отличной от 2 содержит почти-поле $P(+, \cdot)$, в мультипликативной группе $P(\cdot)$ которого есть нормальная в $F(\cdot)$ подгруппа порядка > 2 , то почти-область $F(+, \cdot)$ является почти-полем.

Теорема 2. Если точно дважды транзитивная группа T характеристики, отличной от 2, содержит группу Фробениуса V с инволюцией и дополнением $H = V \cap T_\alpha$, где T_α – стабилизатор точки α , и в H есть нормальная в T_α подгруппа порядка > 2 , то группа T обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой.

Теорема 3. Пусть T – точно дважды транзитивная группа нечетной характеристики p , T_α – ее стабилизатор точки, R – локально нильпотентный радикал группы T_α , $n = |T_\alpha : R| < \infty$ и $d = (n, p - 1)$. Если $(p-1)/d \equiv 0 \pmod{8}$, то G обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой F ;

2. в классе точно трижды транзитивных групп была доказана локальная конечность точно трижды транзитивных групп подстановок с периодическим стабилизатором двух точек и, как следствие, – локальная конечность периодических точно 3-транзитивных групп [11].

До недавнего времени был открытым вопрос, верна ли теорема Жордана в общем случае, неизвестно (см. вопросы 11.52, 12.48 В.Д. Мазурова из Коуровской тетради [4]). «Всякая ли точно дважды транзитивная группа обладает нетривиальной абелевой нормальной подгруппой?» и «Каждая ли почти-область является почти-полем?» (см. проблему на с. 219 [1]) – это одна и та же проблема.

В июне 2014 г. группой авторов Eliyhu Rips, Yoav Segev, Katrin Tent была опубликована статья «A sharply 2-transitive group without a non-trivial abelian normal subgroup», в которой построены примеры точно дважды транзитивных групп, не содержащих нетривиальную нормальную абелеву подгруппу. В этой статье были доказаны следующие теоремы:

Теорема 4. Пусть G группа содержит подгруппу A такую, что

1. $A \cup g^{-1}Ag = 1$ для всех $g \in G \setminus A$ обособленная подгруппа;

2. A не содержит инволюций.

Пусть G содержит инволюцию $t \in G \setminus A$. Тогда для любых элементов $u, v \in G$ $u, v \in G$ таких, что $Au \neq Av$ существуют:

1. расширение $G \leq G_1$;

2. подгруппа $A_1 \leq G_1$ такая, что A_1 – обособленная, которая не содержит инволюций и $A_1 \cup G = A$

3. элемент $f \in G_1$ такой, что $A_1 f = A_1$ и $A_1 t f = A_1 v$.

Если $G_1 \neq G$, тогда при условии $vu^{-1} \notin A(uv^{-1})A$ (соответственно, $vu^{-1} \in A(uv^{-1})A$) мы имеем $G_1 = G * \langle f \rangle$ является свободным произведением группы G на бесконечную циклическую группу (соответственно, $G_1 = \langle G, f | f^{-1}tf = s \rangle$ является HNN расширением с инволюцией $s \in G$ такой, что $s \notin AtA$).

И как следствие из этой теоремы

Теорема 5. Пусть G , A , и t удовлетворяют условиям Теоремы 1. Предположим далее, что G не действует точно дважды транзитивно на множестве правых смежных классов G/A . Тогда G содержится в группе G' , в которой существует обособленная подгруппа A' . Для группы G' выполняются следующие условия:

1. $A \leq A'$.

2. G' – действует точно дважды транзитивно на множестве правых смежных классов $X := G'/A'$.

3. любая инволюция не фиксирует точки в X (т.е. G' группа характеристики 2).

4. G' не содержит нетривиальных абелевых нормальных подгрупп.

В продолжении исследований данной работы и используя методику вышеуказанной статьи, в августе 2015 г. опубликован результат Katrin Tent, в котором следствием из основной теоремы вытекает следующая

Теорема 6. Существуют группы G , действующие 3-транзитивно на некотором множестве X такие, что для $x \in X$ стабилизатор G_x не содержит нетривиальной нормальной абелевой подгруппы.

Работа по изучению точно трижды транзитивных групп продолжается.

Анонсируемая теорема:

Теорема 7. Точно трижды транзитивная группа подстановок, содержащая конечный элемент, локально конечна.

Инволюция j называется совершенной в G , если любые две неперестановочные инволюции из jG сопряжены при помощи инволюции из этого же класса [12].

В классе точно трижды транзитивных групп идет работа в направлении поиска ответов на следующие вопросы:

Вопрос 1. Верно ли, что в точно трижды транзитивной группе подстановок с совершенной инволюцией стабилизатор двух точек содержит нормальную абелеву подгруппу индекса 2?

Вопрос 2. Верна ли теорема: Точно трижды транзитивная группа подстановок с совершенной инволюцией изоморфна группе $PGL_2(F)$ над подходящим полем F ?

Выводы. В работе рассмотрены бесконечные точно дважды и трижды транзитивные группы. Описаны некоторые классы указанных групп в свете переноса теоремы Жордана на случай бесконечных групп.

Библиографический список

1. Wähling H. Theorie der Fastkörper. Essen: Thalen Verlag, 1987.
2. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.
3. Kegel O.H. Zur Structur lokal endlicher Zassenhausgruppen. Arch. Math. 1967. V. 18. S. 337–348.

4. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 17-е изд. Новосибирск, 2012.
5. Мазуров В.Д. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.
6. Мазуров В.Д. О точно дважды транзитивных группах // Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН // Вопросы алгебры и логики. 1996. С. 233–236.
7. Grundhöfer T., Jabara E. Fixed-point-free 2-finite automorphism groups, Arch. Math. 2011. V. 97. July 7. P. 219–223.
8. Созутов А.И. О группах Шункова, действующих свободно на абелевых группах // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 188–198.
9. Созутов А.И., Дураков Е.Б., Кравцова О.В. О некоторых точно трижды транзитивных группах // Алгебра, логика и приложения: тез. докл. Междунар. конф. Красноярск, 19–25 июля 2010 г. С. 86–89.
10. Шунков В.П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–494.
11. Созутов А.И., Дураков Е.Б. О локальной конечности периодических точно трижды транзитивных групп // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 1. С. 70–84.
12. Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г. Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. 149 с.
13. Беляев В.В. Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 5. С. 531–535.

О НЕСТАНДАРТНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИЯХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ¹

ABOUT A NON-STANDARD INTERPOLATIONS OF FUNCTIONS OF MANY VARIABLES

М.Е. Дураков

M.E. Durakov

Интерполяция, квазирегулярная последовательность, нетеровский оператор, вычет Гро-тендика, росток, вычетный поток, идеал.

Рассмотрены нестандартные интерполяции, которые ввели Алпай и Ижер в своей недавней статье. Разобран нетривиальный пример нестандартной интерполяции для конкретной квазирегулярной последовательности в трехмерном комплексном пространстве.

Interpolation, quasi-regular sequence, Noetherian operators, Grothendieck residue, germ, residue current, ideal.

Non-standard interpolations introduced by Alpay and Yger in their recent paper are considered. We also analyze a non-trivial example of non-standard interpolation for a particular quasi-regular sequence in a three-dimensional complex space.

К числу базисных, классических (стандартных) интерполяций относятся интерполяции Лагранжа, Эрмита, Ньютона и др.

Лагранж: По заданным точкам $\{w_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{C}$ и значениям $c_j \in \mathbb{C}$ найти многочлен $f(z)$ степени $m - 1$ со свойством

$$f(w_j) = c_j, \forall j = 1, \dots, m.$$

Заметим, что интерполяционный многочлен определяется в терминах многочлена $p(z) = (z - w_1) \cdot \dots \cdot (z - w_m)$ по формуле:

$$f(z) = p(z) \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{z - w_j} \operatorname{res} \left(\frac{1}{p} \right).$$

Таким образом, задание узлов интерполяции в виде нулевого множества идеала $\langle p \rangle$ дает инструментарий для построения интерполяционного многочлена.

Эрмит: По заданным точкам $\{w_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{C}$ и значениям $c_{j,k} \in \mathbb{C}$, где $j = 1, \dots, m, k = 0, \dots, \mu_j - 1$ найти многочлен $f(z)$, имеющий в заданных точках заданные значения производных до порядков $\mu_j - 1$, то есть

$$f^{(k)}(w_j) = c_{j,k}, \forall j = 1, \dots, m, \forall k = 0, \dots, \mu_j - 1.$$

Задача 1. Пусть заданы комплексные числа $a_{j,k}$ ($j = 1, \dots, m; k = 0, \dots, \mu_j - 1$) и c . Необходимо описать множество всех функций f , аналитических в окрестности Ω точек w_1, \dots, w_m и удовлетворяющих уравнению:

$$\sum \sum a_{j,k} f^{(k)}(w_j) = c. \quad (1)$$

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20117).

(D. Alpay, etc, Complex Var. Elliptic Equ. 2016) [1]. Заметим, что если f является решением (1), то $f + ph$ также является решением, где

$$p(z) = \prod_{j=1}^n (z_j - w_j)^{\mu_j}, h \in H(\Omega).$$

Другими словами, мы можем работать в фактор-кольце $H(\Omega)/(p)$ по идеалу, порожденному полиномом p .

Определение. Пусть $I \subset C[s_1, \dots, s_n]$ – примарный идеал. Семейство линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами $\partial_\ell(s, D), \ell = 1, \dots, t$ называется нетеровскими операторами для I , если условий

$$\partial_\ell(s, D)\varphi(s)|_N = 0, \forall \ell = 1, \dots, t$$

необходимо и достаточно для того, чтобы функция $\varphi(s)$ принадлежала идеалу I .

Для произвольного $n \geq 1$ примарные компоненты p_j нульмерного полиномиального идеала $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ приписываются корням w_j . Нетеровскими операторами для p_j являются наборы дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами

$$L_{w_j, \ell}(\partial/\partial s)|_{w_j}, \ell \in A_{w_j}.$$

Здесь A_{w_j} – конечные подмножества в \mathbb{N}^n .

Задача 2. Пусть $p^{-1}(0) = \{w_1, \dots, w_m\}$, U – открытое подмножество \mathbb{C}^n , содержащее $p^{-1}(0)$. Пусть $a_{j, \ell} (j = 1, \dots, m, \ell \in A_{w_j})$ вместе с числом c – заданные комплексные числа. Необходимо описать пространство голоморфных функций $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ со свойством:

$$\sum \sum a_{j, \ell} L_{w_j, \ell} [f](w_j) = c.$$

Эта задача была рассмотрена в совместной статье Alpay, Yger [2].

Одним из ингредиентов для решения интерполяционной задачи является мономиальный базис $B = \{s_k^\beta; k = 0, \dots, N(p) - 1\}$ в факторпространстве $C[s]/(p)$. Он строится с использованием базиса Гребнера, более подробно см. [3-4]. Также нам понадобится следующее предложение о координатах голоморфных функций в указанном факторпространстве.

Предложение 1. Пусть $p = (p_1, \dots, p_n)$ – нульмерный полиномиальный идеал и B – мономиальный базис факторпространства $C[s]/(p)$. Пусть U – открытое подмножество в \mathbb{C}^n , содержащее $p^{-1}(0)$, и $f \in H(U)$. Тогда существует единственная система координат $(\alpha_0[f], \dots, \alpha_{N(p)-1}[f]) \in \mathbb{C}^N$ такая, что голоморфная функция $U \ni s \mapsto f(s) - \sum \alpha_k [f] s^{\beta_k}$ принадлежит идеалу $\sum H(U)p_j$.

Следующая теорема решает задачу 2:

Теорема. Пусть $\{w_1, \dots, w_m\} = p^{-1}(0), U$ – открытое подмножество в \mathbb{C}^n , содержащее $p^{-1}(0)$. Пусть заданы последовательность $a = \{a_{j, \ell}, j = 1, \dots, m, \ell \in A_{w_j}\}$ и комплексное число c . Определим ростки в $O_{\mathbb{C}^n, w_i}$: $h_{w_i}^a(s) = \sum_{\lambda \in A_j} a_{j, \lambda} (s - w_j)^\lambda / \lambda!$, составляющих набор $h_w^a = [h_{w_1}^a, \dots, h_{w_m}^a]$. Тогда:

– если координатная система $(\alpha_0[h_w^a], \dots, \alpha_{N(p)-1}[h_w^a])$ является нулевой, то задача не имеет решений в случае $c \neq 0$, и любая функция $f \in H(U)$ является решением в случае $c = 0$;

– если координатная система $(\alpha_0[h_w^a], \dots, \alpha_{N(p)-1}[h_w^a])$ является ненулевой, то $f \in H(U)$ удовлетворяет условию (2) тогда и только тогда, когда

$$[\alpha_0[f], \dots, \alpha_{N(p)-1}[f]] \cdot Q_p[B] \begin{bmatrix} \alpha_0([h_w^a]) \\ \vdots \\ \alpha_{N(p)-1}([h_w^a]) \end{bmatrix} = c,$$

где $Q_p[B] = \text{Res} \left[\begin{matrix} s^{\beta_{k_1} + \beta_{k_2}} ds_1 \wedge \dots \wedge ds_n \\ p_1(s), \dots, p_n(s) \end{matrix} \right]_{0 \leq k_1, k_2 \leq N(p)-1}$.

Пример. Рассмотрим пространство \mathbb{C}^3 . В качестве квазирегулярной последовательности в нем возьмем следующую:

$$\begin{aligned} f_1 &= z_1^3 - z_2 z_3 \\ f_2 &= z_2^3 - z_1 z_3 \\ f_3 &= z_3^3 - z_1 z_2 \end{aligned}$$

У этого отображения $f(z): \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ нулевое множество является дискретным и состоит из 17 изолированных нулей. Интерполяцию будем рассматривать в окрестности нуля $(0,0,0)$. Размерность факторпространства O_0/I_0 равна кратности нуля 0 отображения f , которая вычисляется через вычет, более подробно см. [5]:

$$\mu_0(f) = \text{res}_f \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 11.$$

Мономиальный базис этого факторпространства имеет вид:

$$B = \{1, z_1, z_2, z_3, z_1^2, z_2^2, z_3^2, z_1 z_2, z_1 z_3, z_2 z_3, z_1 z_2 z_3\}$$

Матрица квадратичной формы $Q_f[B]$ на базисных элементах факторпространства в этом примере принимает вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим следующий набор дифференциальных операторов:

$$\left\{ L_{0,j} \right\}_{j=1}^{11} = \left\{ g|_0, \frac{\partial g}{\partial z_1}|_0, \frac{\partial g}{\partial z_2}|_0, \frac{\partial g}{\partial z_3}|_0, \frac{\partial^2 g}{\partial z_1^2}|_0, \frac{\partial^2 g}{\partial z_2^2}|_0, \frac{\partial^2 g}{\partial z_3^2}|_0, \frac{\partial^3 g}{\partial z_1^3}|_0, \frac{\partial^3 g}{\partial z_2^3}|_0, \frac{\partial^3 g}{\partial z_3^3}|_0, \frac{\partial^3 g}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_3}|_0 \right\}$$

Каждый из этих операторов зануляет любую комбинацию вида: $(z_1^3 - z_2 z_3)h_1 + (z_2^3 - z_1 z_3)h_2 + (z_3^3 - z_1 z_2)h_3$, для произвольных функций $h_1, h_2, h_3 \in O_0$. Также каждый из этих операторов не зануляет только один базисный элемент факторпространства $O_0/I_0(f)$, поэтому сразу все операторы будут занулять только элементы, равные нулевому элементу факторпространства, то есть элементы из идеала $I_0(f)$. Таким образом эти дифференциальные операторы являются нетеровскими для идеала $I_0(f)$.

Теперь, зная нетеровские операторы, мы можем поставить условие задачи:

Пусть заданы комплексные числа $\{a_j\}_{j=1}^{11}$ и c . Пусть U_0 – открытое подмножество \mathbb{C}^3 , содержащее точку $0 = (0,0,0)$ – ноль отображения $p = (p_1, p_2, p_3) = (z_1^3 - z_2 z_3, z_2^3 - z_1 z_3, z_3^3 - z_1 z_2)$. Необходимо описать пространство голоморфных функций $f: U_0 \rightarrow \mathbb{C}$, со свойством: $\sum a_{j,i} L_{0,i}[f](0) = c$.

Таким образом, теорема утверждает, что если координаты ростка $h_0^a(s)$ не все равны нулю, то голоморфная функция $f(s)$ удовлетворяет задаче 2 тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие на коэффициенты этой функции в факторпространстве $O_0/I_0(f)$:

$$\left(a_1 + \frac{27}{24}a_{11}\right)\alpha_1[f] + \frac{7a_8}{6}\alpha_2[f] + \frac{7a_9}{6}\alpha_3[f] + \frac{7a_{10}}{6}\alpha_4[f] + \frac{a_5}{2}\alpha_5[f] + \frac{a_6}{2}\alpha_6[f] + \frac{+a_7}{2}\alpha_7[f] + a_4\alpha_8[f] + a_3\alpha_9[f] + a_2\alpha_{10}[f] + a_1\alpha_{11}[f] = -c.$$

То есть вектор координат функции f в факторпространстве лежит в заданной аффинной гиперплоскости $\Pi^a \in \mathbb{C}^{11}$.

Выводы. Работа посвящена изучению нестандартных многомерных интерполяций. Рассмотрен конкретный нетривиальный пример в трехмерном комплексном пространстве.

Библиографический список

1. Alpay D., Jorgensen P., Lewkowicz I. and D. Volok. A new realization of rational functions, with applications to linear combination interpolation, the Cuntz relations and kernel decompositions // Complex Var. Elliptic Equ. 2016. № 61 (1). P. 42–54.
2. Alpay D., Yger A., About a Non-Standard Interpolation Problem // Comput. Methods Funct. Theory. 2019. V. 19. P. 97–115.
3. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 623 с.
4. Кокс Д., Литтл Дж., О’Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры: пер. с англ. М.: Мир, 2000. 687 с.
5. Цих А.К. Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, 1988. 241 с.

ТЕОРЕМА БЕРНСАЙДА О БАЗИСЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФИНИТНО-АППРОКСИМИРУЕМЫХ p -ГРУПП¹

ON BURNSIDE AND FRATTINI THEOREMS FOR SOME RESIDUALLY FINITE p -GROUPS

И.В. Мельникова, А.И. Созутов

I.V. Melnikova, A.I. Sozutov

Конечно порожденные финитно-аппроксимлируемые p -группы, максимальные подгруппы, подгруппа Фраттини, теорема Бернсайд о базисе.

Получены аналоги теорем Бернсайд о базисе и Фраттини для конечно порожденных финитно-аппроксимлируемых p -групп без максимальных подгрупп бесконечного индекса.

Finitely generated residually finite p -groups, maximum subgroups, Frattini subgroup, Burnside's basis theorem.

Analogues of Burnside's basis and Frattini theorems are obtained for finitely generated residually finite p -groups without maximal subgroups of infinite index.

Если в некоторой группе G задана система нормальных делителей, пересечение которых равно единичной подгруппе, то говорят, что группа G аппроксимируется фактор-группами по этим нормальным делителям [9; 10]. Если в G такая система состоит из нормальных делителей конечных индексов, то группа G называется *финитно-аппроксимлируемой*. Так, всякая свободная группа финитно-аппроксимлируема, и даже аппроксимлируема конечными p -группами для любого простого p [9, с. 465].

Пусть p – простое число. Группа называется *p -группой*, если порядок каждого ее элемента есть степень числа p . В работе рассматриваются конечно порожденные бесконечные финитно-аппроксимлируемые p -группы. Первые примеры таких групп были указаны (построены) Е.С. Голодом [4] как подгруппы присоединенных групп конечно порожденных бесконечномерных ассоциативных нильалгебр [5] характеристики p . Позднее были построены группы С.В. Алешина [3], Р.И. Григорчука [6], В.И. Суцанского [14], Н. Гупты и С. Сидки [1], объединенные в [12] общей конструктивной идеей их представлений под названием *AT-групп* – групп автоморфизмов бесконечных однородных деревьев [13]. Несмотря на усилия многих исследователей, не локально конечные финитно-аппроксимлируемые p -группы трудно поддаются изучению. Так, например, пока нет ответа на естественный вопрос 13.55 А.В. Тимофеев из Коуровской тетради [8]: *существует ли группа Голода, изоморфная AT-группе?*

Ввиду конечной порожденности рассматриваемые в работе группы обладают максимальными подгруппами и не совпадают со своей *подгруппой Фраттини* –

¹ Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, проект № 19-01-00566 А.

пересечением всех максимальных группы [9]. Напомним, что элемент x группы G называется *непорождающим (необразующим) элементом* для G , если его можно удалить из любого порождающего множества группы G , в которое он входит:

$$x \in X \subseteq G = \langle X \rangle \Rightarrow G = \langle X \setminus \{x\} \rangle.$$

По известной теореме Б. Неймана и Г. Цассенхауза [7, теорема 2.6.1] множество S всех непорождающих элементов группы G совпадает с ее подгруппой Фраттини $\Phi(G)$. Согласно классической теореме Бернсайда о базисе [15, теорема 12.2.1], строение конечной p -группы и строение ее группы автоморфизмов тесно связано с ее подгруппой Фраттини. В настоящей работе доказано обобщение этой теоремы для конечно порожденных финитно-аппроксимируемых p -групп, в которых нет максимальных подгрупп бесконечного индекса. Среди групп с данным условием есть и AT -группы [11], и группы Голода [2] (см. также комментарии к вопросам 17.17 и 18.107 из Коуровской тетради [8]).

Минимальное число порождающих конечно порожденной группы назовем ее *рангом*.

Теорема 1. *В финитно-аппроксимируемой p -группе P ранга r каждая максимальная подгруппа конечного индекса нормальна в P и имеет индекс p , их общее пересечение D является характеристической подгруппой группы P , фактор-группа P/D – элементарная абелева группа порядка p^r , и число различных максимальных подгрупп конечных индексов в P равно $1 + p + \dots + p^{r-1}$.*

Теорема 2. *Пусть P – финитно-аппроксимируемая p -группа ранга r , $G = \text{Aut}(P)$ и H – периодическая подгруппа из G . Тогда G и H финитно-аппроксимируемы, фактор-группа $H/O_p(H)$ конечна и ее порядок делит число $(p^r - 1)(p^r - p) \dots (p^r - p^{r-1})$.*

Доказательства теорем 1, 2 элементарны, мы их не приводим. Когда в группе P из теоремы 1 нет максимальных подгрупп бесконечного индекса, ее подгруппа Фраттини $\Phi(P)$ совпадает с D . Аналог теоремы Бернсайда о базисе для конечных p -групп:

Теорема 3. *Пусть P – финитно-аппроксимируемая p -группа ранга r без максимальных подгрупп бесконечного индекса и $A = P/\Phi(P)$. Тогда любое множество порождающих элементов z_1, \dots, z_s группы P содержит подмножество из r элементов x_1, \dots, x_r , порождающих группу P . При отображении $P \rightarrow A$ элементы x_1, \dots, x_r отображаются в базис a_1, \dots, a_r группы A . Обратно, любое множество r элементов группы P , отображаемое при $P \rightarrow A$ на базис группы A , является системой порождающих группы P .*

Доказательство теоремы 3

Рассуждения будем вести максимально приближенно к тексту доказательства теоремы Бернсайда 12.2.1 из [15] о базисе для конечных p -групп, дополняя или изменяя его в тех местах, где требуется учитывать бесконечность группы P .

Если M – максимальная подгруппа конечного индекса группы P , то множество $\{M^g\} (g \in G)$ конечно, по теореме Пуанкаре [9, с. 53] нормальная в P подгруппа

$T = \bigcap_{x \in P} M^x$ имеет конечный индекс в P и подгруппа M/T максимальна в конечной p -группе P/T . Согласно [15, теоремы 2.3.4, 4.3.2] M нормальна в P и $[P:M] = p$. Поэтому фактор-группа P/M – циклическая группа порядка p . Следовательно, p -е степени любого элемента из P и все коммутаторы содержатся в подгруппе M . Таким образом, пересечение D всех максимальных подгрупп конечных индексов содержит любую p -ю степень и любой коммутатор. Поэтому фактор-группа $P/D = A$ является элементарной абелевой группой. Поскольку P конечно порождена, то и A конечно порождена и является конечной p -группой. Если ее порядок равен p^r , то любой ее базис состоит из r элементов a_1, \dots, a_r . Если b_1, \dots, b_s – элементы, порождающие группу A , то мы можем найти базис этой группы, удаляя из множества b_1, \dots, b_s элементы, равные 1, а также элементы b_i , принадлежащие подгруппе, порождаемой элементами b_1, \dots, b_{i-1} . Итак, $s \geq r$, и множество b_1, \dots, b_s содержит подмножество, являющееся базисом группы A .

Предположим теперь, что элементы z_1, \dots, z_s порождают группу P . Пусть при отображении $P \rightarrow P/D = A$ образами элементов z_i являются элементы b_i ($i = 1, \dots, s$). Тогда множество элементов b_1, \dots, b_s порождает группу A и поэтому содержит подмножество a_1, \dots, a_r , являющееся базисом группы A . Пусть тогда x_1, \dots, x_r – те из элементов z_1, \dots, z_s , которые отображаются в элементы a_1, \dots, a_r . Теорема будет доказана, если мы покажем, что элементы x_1, \dots, x_r порождают группу P . Пусть $H = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ и $H \neq P$.

Докажем, что H содержится в некоторой максимальной подгруппе группы P . Рассмотрим множество X всех собственных подгрупп группы P , содержащих подгруппу H . Оно частично упорядочено по включению, и если X конечно, или каждая возрастающая цепь в X конечна, то X очевидно обладает максимальным элементом. Если же X содержит бесконечную возрастающую цепь $H < K_1 < K_2 < \dots$, то ее объединение $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ не может совпадать с P в силу условия конечной порожденности группы P . Следовательно, $K < P$, $K \in X$ и по лемме Цорна в X есть максимальные элементы. Каждый максимальный в X очевидно является максимальной подгруппой группы P , следовательно, H содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы P .

Ввиду условий теоремы и доказанного выше индекс M в P равен p и $M > D$. Но тогда при отображении $P \rightarrow P/D = A$ мы имеем $H \rightarrow HD/D \subseteq M/D = B$, где B – подгруппа порядка p^{r-1} группы A . Однако это противоречит тому, что $H = \langle x_1, \dots, x_r \rangle \rightarrow \langle a_1, \dots, a_r \rangle = A$. Следовательно, $H = P$, т.е. элементы x_1, \dots, x_r порождают группу P . Теорема доказана.

Библиографический список

1. Gupta N., Sidki S. Some infinite p -groups // Алгебра и логика. 1983. 22. С. 584–589.
2. Ershov M., Jaikin-Zapirain A. Groups of positive weighted deficiency and their applications // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 2013. 677. С. 71–134.
3. Алешин С.В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 3. С. 319–328.

4. Голод Е.С. О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых группах // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1964. Т. 28, № 2. С. 273–276.
5. Голод Е.С., Шафаревич И.Р. О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1964. Т. 28. С. 261–272.
6. Григорчук Р.И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и его приложения. 1980. Т. 14, № 1. С. 53–54.
7. Кондратьев А.Н. Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 310 с.
8. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 18-е издание, Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2014.
9. Курош А. Г., Теория групп. М.: Наука, 1967, 648 с.
10. Мальцев А.И. Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб. 1949. Т. 25.– С. 347–366.
11. Первова Е. Л. Всюду плотные подгруппы одной группы автоморфизмов дерева // Труды МИАН. 2000. Т. 231. С. 356–367.
12. Рожков А.В. К теории групп алешинского типа // Мат. заметки. 1986. 40. С. 572–589.
13. Рожков А.В. *AT*-группы: учеб. пособие. Челябинск: Челяб. гос. ун-т. 1998. 84 с.
14. Суцанский В.И. Периодические *p*-группы и неограниченная проблема Бернсайда // ДАН СССР. 1979. 247. С. 561–565.
15. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962, 468 с.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

APPLICATION OF THE COMPUTER ALGEBRA TO SOLVE THE EQUATIONS WITH PRIVATE DERIVATIVES

М.М. Мирзаохмедов

M.M. Mirzaokhmedov

Уравнения с частными производными, преобразование Эйлера–Дарбу, вронскиан, программное средство Maple.

В работе рассматриваются преобразования Эйлера–Дарбу и их приложения к уравнениям с частными производными. С помощью системы Maple найдены общие решения некоторых линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Partial differential equations, Euler–Darboux transform, wronskian, the software Maple.

The paper considers the Euler–Darboux transformations and their applications to partial differential equations. With the help of the Maple system, general solutions of some linear differential equations with variable coefficients are found.

Л - Эйлер [3] первым нашел дифференциальные подстановки, связывающие пары линейных уравнений с частными производными.

Преобразование. Решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + G(x)u_x, \quad (1)$$

преобразованием Эйлера–Дарбу

$$v = \frac{1}{r} \left(u_x - \frac{h}{h} u \right), \quad (2)$$

переводятся в решения уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} + G_1(x)v_x. \quad (3)$$

Здесь функция h – решение уравнения

$$h' + Gh' + ch = 0, \quad c \in \mathbb{R} \quad (4)$$

а функция G_1 задается формулой

$$G_1 = G + 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln h'}{h} \right). \quad (5)$$

r удовлетворяет уравнению

$$r'' + Gr' + (G' + 2(\ln h)'')r = 0. \quad (6)$$

Следуя [2], рассмотрим линейное уравнение с частными производными

$$Bu = u_{xx} + G(x)u_x, \quad (7)$$

где B – дифференциальный оператор по переменной t_1, \dots, t_n вида

$B = \sum_{|\alpha| \geq 0} b_\alpha(t) \partial_t^\alpha$, $t = (t_1, \dots, t_n)$, $\partial_t^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – целочисленный мультииндекс. Функция $b_\alpha(t)$ считается гладкой в соответствующих областях.

Введем линейный оператор

$$\mathcal{L}_h = -\frac{h}{\hbar} \partial_x + 1.$$

Предположим, что известны решения h_1, \dots, h_N уравнения (4) при некоторых значениях c_1, \dots, c_N . Определим рекуррентным способом функции и операторы:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{W_1}{W_0}, \quad p_2 = \frac{W_2}{W_1}, \quad \dots, \\ \mathcal{M}_1 &= \frac{W_1}{W_0} D \frac{W_0}{W_1}, \quad \mathcal{M}_2 = \frac{W_2}{W_1} D \frac{W_1^2}{W_2 W_0} D \frac{W_0}{W_1}, \quad \dots, \\ \mathcal{M}_N &= \frac{W_N}{W_{N-1}} D \frac{W_{N-1}^2}{W_N W_{N-2}} \dots D \frac{W_2^2}{W_3 W_1} D \frac{W_1^2}{W_2 W_0} D \frac{W_0}{W_1}. \end{aligned} \tag{8}$$

где $D = \frac{d}{dx}$, $W_0 = 1$, $W_k = W(h_1, \dots, h_k)$. Отсюда видно, что произведение функции

$$p_1 \dots p_k = \frac{W_1}{W_0} \cdot \frac{W_2}{W_1} \dots \frac{W_k}{W_{k-1}} = W_k.$$

Аналогичным образом получаем для функции

$$\tilde{p}_1 \dots \tilde{p}_k = \frac{\tilde{W}_1}{\tilde{W}_0} \cdot \frac{\tilde{W}_2}{\tilde{W}_1} \dots \frac{\tilde{W}_k}{\tilde{W}_{k-1}} = \tilde{W}_k, \tag{9}$$

где $\tilde{W}_0 = 1$, $\tilde{W}_k = W(h'_1, \dots, h'_k)$. При этом имеет место соотношение

$$p_{i+1} = \mathcal{M}_i h_{i+1} = \frac{W_{i+1}}{W_i}.$$

Каждый оператор \mathcal{M}_k имеет вид

$$\mathcal{M}_k = a_k \partial_x^k + a_{k-1} \partial_x^{k-1} + \dots + 1,$$

где a_i – функции от x .

Если h_1, \dots, h_N – линейно независимы, то при любом $k \leq N$ они составляют фундаментальную систему решений уравнения

$$\mathcal{M}_k u = 0. \tag{10}$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$W(u, h_1, \dots, h_k) = 0.$$

Поскольку коэффициент при u в (10) равен единице, то разлагая вронскиан по первому столбцу и разделив его на (9), получаем равенство

$$z = \mathcal{M}_k u = \frac{W(u, h_1, \dots, h_k)}{W(h'_1, \dots, h'_k)}.$$

Теорема. Пусть h_1, \dots, h_k – решения уравнений (4), соответствующие различным константам c_1, \dots, c_k . Тогда преобразование (2) переводит решения уравнения (7) в решения уравнения

$$Bz = z_{xx} + G_k z_x, \tag{11}$$

если G_k задается формулой

$$G_k = G + 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln W(h'_1, \dots, h'_k)}{W(h_1, \dots, h_k)} \right). \tag{12}$$

Доказательство. Выражение для G_k получается применением формулы (6) при $r = -\frac{h}{h}$. Используя (7) и конструкцию (8), получаем, что функции h_1, \dots, h_k удовлетворяют дифференциальному уравнению порядка k :

$$\mathcal{M}_k h = 0. \tag{13}$$

Значит, они образуют базис решений уравнения (13). Следовательно, действие оператора \mathcal{M}_k на произвольную функцию представляется в виде [2]:

$$\mathcal{M}_k u = a_k \partial_x^k u + a_{k-1} \partial_x^{k-1} u + \dots + u = \frac{W(u, h_1, \dots, h_k)}{W(h_1, \dots, h_k)}, \tag{14}$$

По построению коэффициентов G_k справедливо представление

$$G_k = G + 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(h'_1)}{h_1} \right) + \dots + 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(h'_k)}{h_k} \right).$$

тогда

$$G_k = G + 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(h'_1 \dots h'_k)}{h_1 \dots h_k} \right). \tag{15}$$

Необходимо найти произведение $\frac{h'_1 \dots h'_k}{h_1 \dots h_k}$. Согласно (8) и (14) оно приводится к выражению

$$M = \frac{h'_1 \dots h'_k}{h_1 \dots h_k} = \frac{W(h'_1, \dots, h'_k)}{W(h_1, \dots, h_k)}.$$

Подставляя последнее выражение в (15), получим формулу (12).

Замечание. Можно заметить, что по построению оператора \mathcal{M}_k имеем:

$$\mathcal{M}_k u = \left(-\frac{h_k}{h_k} \partial_x + 1 \right) \dots \left(-\frac{h_1}{h_1} \partial_x + 1 \right) u.$$

Тогда коэффициент при старшей производной равен $\frac{(-1)^k}{M}$. Поэтому коэффициент при $\partial_x^k u$ имеет вид:

$$(-1)^{k+1} \frac{W(h_1, \dots, h_k)}{W(h_1, \dots, h_k)}.$$

Используем систему компьютерной алгебры Maple [Дьяконов, 2011] для нахождения решений уравнения (7).

Пример. Пусть дано уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2}{x}u_x. \quad (16)$$

Общее решение этого уравнения

$$u(t, x) = \frac{f(t+x) + 2g(t-x)}{2x}, \quad (17)$$

преобразованием Эйлера–Дарбу (2) переводится в решения уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} + G_1 v_x, \quad v_{tt} = v_{xx} + G_1 v_x. \quad (18)$$

где $G = \frac{2}{x}$.

Решение. Для уравнения (4) в зависимости от выбора C получается три типа решений.

$$h' + \frac{2}{x}h' + ch = 0, \quad (19)$$

в случае $C = 0$ получаем:

$$h = C_1 + \frac{C_2}{x}.$$

В этом случае решением уравнения (7) является функция

$$r = -\frac{h'}{h} = \frac{C_2}{(C_1 + \frac{C_2}{x})x^2}.$$

Значит, функция G_1 по формуле (6) имеет следующий вид:

$$G_1 = -\frac{2C_1}{C_1x + C_2},$$

а функцию v – получаем, используя команды:

- 1) with(VectorCalculus);
- 2) with(LinearAlgebra);

$$3) v := \frac{\mathbf{Determinant}(\mathbf{Wronskian}([\mathbf{H}, \mathbf{U}(x, t)], x))}{\mathbf{Determinant}(\mathbf{Wronskian}(\mathbf{H}, x))};$$

$$v := \frac{(-2C_1x - 2C_2)g'(t-x) - 2g(t-x)C_1 + (C_1x + C_2)f'(t+x) - f(t+x)C_1}{2C_2},$$

где H – решение уравнения (19).

Библиографический список

1. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2011.
2. Капцов О.В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
3. Эйлер Л. Интегральное исчисление. М.: ГИФМЛ, 1958. Т. 3.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛИЗМА В JULIA НА ПРИМЕРЕ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

USING CONCURRENCY IN JULIA TO COMPUTE EULER'S TOTIENT FUNCTION

Е.А. Оконешникова

E.A. Okoneshnikova

Параллельное программирование, язык Julia, управление процессами и памятью, удаленный вызов, удаленная ссылка, связь канала и процесса, функция Эйлера.

Статья описывает принципы построения параллельной программы на молодом высокопроизводительном языке Julia, ориентированном на научные вычисления. Приведены примеры использования удаленных вызовов и удаленных ссылок, описан механизм привязки канала к процессу. Разобран код программы, вычисляющей значение функции Эйлера.

Parallel programming, Julia language, process and memory management, remote call, remote reference, channel and process connection, Euler's totient function.

The article describes the principles of constructing a parallel program in the young high-performance language Julia, focused on scientific computing. Examples of using remote calls and remote reference are given, the mechanism of linking a channel to a process is described. The code of the program that calculates the value of the Euler function has been analyzed.

Задачи научного программирования, как правило, отличаются трудоемкими, масштабными вычислениями. Чтобы ускорить их выполнение, прибегают к использованию мощностей нескольких процессоров, расположенных на одном компьютере или на кластере, путем параллельного или многопоточного программирования. Для этих целей отлично подойдет молодой, высокопроизводительный язык Julia – текущая версия v.1.5.2. Его уже используют для планирования космических миссий и моделирования спутников, а также для реализации глобальной климатической модели следующего поколения. На Julia в обилии представлены математические инструменты, такие как пакет компьютерной алгебры Nemo, экосистема дифференциальных уравнений DifferentialEquations, семейство пакетов для оптимизации и решения уравнений JuliaNLSolvers, эффективные алгоритмы итерационного решения линейных систем IterativeSolvers, пакет статистического анализа StatsBase, быстрые преобразования Фурье AbstractFFTs и многое другое [1].

Julia предоставляет многопроцессорную среду, основанную на передаче сообщений, чтобы программы могли запускаться сразу в нескольких процессах в разных доменах памяти. Реализация параллельных вычислений с распределенной памятью обеспечивается модулем Distributed, который является частью стандартной библиотеки, поставляемой с Julia. Коммуникация в Julia является «односторонней», т.е. для выполнения двухпроцессорной операции программисту достаточно явно управлять только одним процессом.

У каждого процесса есть связанный идентификатор. Процессы, используемые по умолчанию для параллельных операций, называются «рабочими». Ког-

да есть только один процесс, процесс 1 считается рабочим. В противном случае, рабочими считаются все процессы, кроме процесса 1, который называется главным. В результате необходимо добавить 2 или более процессов, чтобы получить преимущества от методов параллельной обработки.

Параллельное программирование в Julia построено на двух примитивах: удаленных ссылках и удаленных вызовах. Удаленный вызов (`remotecall`) – это запрос одного процесса на выполнение определенной функции другим процессом (или им самим). Данный метод немедленно в качестве ответа возвращает удаленную ссылку (`Future`) на область памяти, в которую процесс-исполнитель запишет результат операции. Благодаря чему процесс, выполнивший вызов, может сразу перейти к своей следующей операции, в то время как вызванная задача будет выполняться в другом процессе. Если необходимо дождаться завершения удаленного вызова, можно применить метод `wait` к полученной ссылке `Future`. Значение результата вызова можно получить, используя метод `fetch`. Таким образом, удаленная ссылка позволяет любому процессу использовать данные, хранящиеся на каком-то конкретном процессе.

Иногда вычисленное удаленно значение нужно для выполнения следующей локальной операции. Для такого случая существует функция `remotecall_fetch`. Она эквивалентна `fetch(remotecall(...))`, но более эффективна. На рис. 1 приведен пример удаленного вызова функции на процессоре 2, вычисляющей вычет 47 по модулю 3.

```
julia> rc=remotecall(mod, 2, 47,3)
Future(2, 1, 22, nothing)

julia> fetch(rc)
2

julia> rcf=remotecall_fetch(mod, 2, 47,3)
2

julia> A = [pi/3 pi/6
            pi/4 pi/2]

            fetch(@spawnat 2 sin.(A))
2x2 Array{Float64,2}:
 0.866025  0.5
 0.707107  1.0
```

Рис. 1

Удаленный вызов считается интерфейсом низкого уровня, обеспечивающим более точное управление. Чтобы упростить задачу, можно использовать макрос `@spawnat`, как показано на рис. 2. Он находит значение выражения, указанного во втором аргументе, в процессе, указанном первым аргументом. Макрос `@spawn` отправляет вызов на любой доступный рабочий процесс.

```
julia> rc=remotecall(mod, 2, 47,3)
Future(2, 1, 22, nothing)

julia> fetch(rc)
2

julia> rcf=remotecall_fetch(mod, 2, 47,3)
2

julia> A = [pi/3 pi/6
            pi/4 pi/2]

            fetch(@spawnat 2 sin.(A))
2x2 Array{Float64,2}:
 0.866025  0.5
 0.707107  1.0
```

Рис. 2

Одним из классических способов распараллеливания программы является концепция «производитель–потребитель», когда одна процедура генерирует значения, а другая их потребляет [2]. Производитель может генерировать множество значений, которые в свою очередь (все или частично) должны быть переданы процессу-потребителю для дальнейшей обработки. Для осуществления передачи данных между процессами Julia предоставляет механизм Channel. Channel (канал) – это ожидаемая очередь по принципу «первым пришел – первым ушел». Еще один вид удаленной ссылки – RemoteChannels – это ссылка на канал, расположенный на некотором процессе. Таким образом, несколько процессов могут координировать свою работу, ссылаясь на один и тот же удаленный канал.

Попробуем написать программу с несколькими параллельными процессами, вычисляющую значение функции Эйлера. Как известно, для произвольного числа n , имеющего каноническое разложение $n = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, значение функции Эйлера можно отыскать по формуле

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Пусть задачей процесса-производителя будет отыскание всех простых делителей числа n . Каждое подходящее число будет записываться в канал, из которого впоследствии его сможет извлечь потребитель.

В случае, когда значения в канал записывает определенный процесс, и по завершении его работы канал должен быть закрыт для записи, следует воспользоваться методом

Channel{T}(func::Function, [size=0; taskref=nothing, spawn=false]), который создает задачу из функции func, связывает ее с каналом Channel типа T и отправляет в очередь исполнения текущего процесса. При этом функции func в качестве ее единственного аргумента должен быть передан связанный с ней канал Channel. Канал будет закрыт, как только связанный с ним процесс завершит работу.

В нашем случае работа процесса-производителя будет задаваться функцией, приведенной на рис. 3.

```
function producer(ch::Channel)
    for r in nmbms
        if isprime(r)&&(n%r==0)
            put!(ch,r)
        end
    end
end
```

Рис. 3

Здесь из массива nmbms будут отбираться простые делители числа n и с помощью метода put!(ch::Channel, v::Any) помещаться в канал, являющийся аргументом функции. Теперь нам остается вызвать в теле программы метод, создающий канал делителей числа n , связанный с функцией producer:

```
divisor = Channel(producer)
```

В массив `nmbrs` запишем все нечетные числа до \sqrt{n} , предварительно разделив данное число на максимальную степень двойки, входящую в его разложение.

Отметим, что созданный нами канал является небуферизованным. Это означает, что при наличии в канале одного объекта операция `put!` будет блокироваться до тех пор, пока объект не будет извлечен методом `take!`. И наоборот, вызванный на пустой канал метод `take!` будет блокироваться до соответствующего вызова `put!`.

Для каждого числа `d`, записанного в канал `divisor`, нужно сформировать выражение $1-1/d = (d-1)/d$, а затем собрать их в одно произведение. Эту задачу можно отнести к типу «одна инструкция – множество данных» (SIMD), то есть над данными из канала `divisor` различные процессы должны выполнить одинаковые действия. Реализовать это можно с помощью функции `map`:

```
map(f, [::AbstractWorkerPool], col...) -> collection.
```

`map` вызывает функцию `f` на всех доступных рабочих процессах (или на указанном пуле процессов) к массиву `col` поэлементно. Результат будет возвращен также в виде массива данных. Фактически `map` производит удаленный вызов функции `f`, поэтому необходимо следить, чтобы вызываемая функция была определена на каждом рабочем процессе. Чтобы это осуществить, достаточно использовать макрос `@everywhere` при определении именованной функции, или же передать `map` анонимную функцию в формате

$$x \rightarrow f(x).$$

В нашем примере можно обойтись анонимной функцией, так как имеет место простое отображение. В качестве массива аргументов нужно передать элементы канала делителей числа `n`. Тогда код для потребителя будет выглядеть, как на рис. 4.

```
function consumer(ch::Channel)
    arr = map(x->(x-1)//x, c for c in ch)
    reduce(*, arr)
end
```

Рис. 4

Функция `reduce(op, itr)` сокращает массив `itr` до одного значения, применяя к элементам бинарную операцию `op`. Таким образом, результатом функции `consumer` будет произведение дробей вида $(d-1)/d$, где `d` должны быть элементами канала `divisor`.

Полный листинг программы представлен на рис. 5. Можно экспериментировать, изменяя размер канала `divisor` и количество рабочих процессов, и производить замеры времени работы программы с помощью макроса `@time`.

На этом простом примере нам удалось рассмотреть несколько важных конструкций: способ создания канала и его привязка к процессу, использование функции `map` для осуществления модели параллельного программирования SIMD, а также познакомились с базовыми примитивами многопроцессорных вычислений.

```

using Distributed
addprocs(3)
@everywhere using Nemo

function phi_p(n::Integer)
    if isprime(ZZ(n))==false
        n%2==0 ? result=Int(n/2) : result=n
        while n % 2 == 0
            n /= 2
        end
        nmbrs = [i for i=3:2:round(Integer, n^0.5, RoundDown)];

        function producer(ch::Channel)
            for r in nmbrs
                if isprime(r)&&(n%r==0)
                    put!(ch,r)
                end
            end
        end

        function consumer(ch::Channel)
            arr = pmap(x->(x-1)//x, c for c in ch)
            reduce(*,arr)
        end

        divisor = Channel(producer)
        result*= consumer(divisor)

        return Integer(result)
    else return n-1
    end
end

```

Рис. 5

Библиографический список

- 1 Документация по языку Julia: официальный сайт. MIT, 2020. URL: <https://docs.julialang.org/en/v1/> (дата обращения: 25.07.2020).
- 2 Эндрюс Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования. Университет штата Аризона. Издательский дом «Вильяме», 2003. 512 с.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ – ПРОБЛЕМА КОЛЛАТЦА

THE EXPERIMENTAL NUMBER THEORY – KOLLATTS'S PROBLEM

А.В. Рожков

A.V. Rozhkov

Теория чисел, ОС Debian, язык программирования Julia, проблема Коллатца.

Проведены вычисления, занявшие более трех лет, получены результаты по проблеме Коллатца.

Number theory, Debian OS, Julia programming language, Kollatts's problem.

The calculations which borrowed more than three years are carried out, results on Kollatts problem are received.

Проект задумывался несколько лет назад как средство обучения математике и информатике одновременно. Реализуя ту же идею, что и проект GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>) и более масштабный образовательный проект STEM (Science, technology, engineering, and mathematics).

Проект используется для индивидуального применения и не требует практически никаких ресурсов, кроме грамотности преподавателя и его энтузиазма, а также полностью определяем конкретными научными и образовательными целями.

МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Проблема Коллатца, или проблема $3+1$, сформулирована в 1932 г.

Берем натуральное число n . Если оно четное, то делим его на 2, а если нечетное, то умножаем на 3 и прибавляем 1 (получаем $3n + 1$). Над полученным числом выполняем те же самые действия, и так далее.

Гипотеза Коллатца заключается в том, что какое бы начальное число n мы ни взяли, в итоге мы получим единицу.

Проблемой Коллатца занимаются многие энтузиасты (<http://boinc.thesonntags.com/collatz/>).

Мы сразу ограничимся нечетными числами.

Преобразование Коллатца. Преобразованием Коллатца для нечетного числа “ a ” назовем переход от нечетного числа “ a ” к нечетному числу “ b ”, которое получается из четного числа “ $3a+1$ ” после его деления на максимально возможную степень числа 2.

Например, “ $27 \rightarrow 41$ ”, а “ $5 \rightarrow 1$ ”.

Цепочка Коллатца. Последовательность преобразований Коллатца, приводящая к 1.

Например, экстремальная цепочка длины 38:

27->41->31-> ... >3077->577-> 433->61->23->35->53->5->1

Поскольку случайное четное число делится в среднем на 4, то длина цепочки Коллатца числа “а” должна “в среднем” равняться $\log_{4/3} a$.

В силу перехода “а->3а+1”, начиная со второго преобразования Коллатца, в цепочках Коллатца не могут встречаться нечетные числа, кратные 3.

Нетрудно заметить, что длина цепочки Коллатца числа $a = 2^n - 1$ не меньше n. Это одни из самых длинных цепочек. Были проведены вычисления до n=100 000 и оказалось, что

Теорема 1. *Матожидание длины цепочки Коллатца для чисел вида $a = 2^n - 1$ равно $2 \cdot \log_{4/3} a \approx 2 \cdot n \cdot \log_{4/3} 2 \approx 4.82 \cdot n$.*

Код программы

```
function Tr(a::BigInt)
b = 3*a+1
while b%2 ==0
b=div(b,2)
end
return (b)
end

function kol(m::Int64,n::Int64)
for i = m:n
j= BigInt(2)^BigInt(i)-1; t=0;
while j >1
j=Tr(j)
t += 1
end
t1= t/(3.476059496782208*log(BigInt(2)^BigInt(i)-1.0))
println("i=",i, "->t=",t, "->t1=",t1)
end
end
```

Цепочки Коллатца и цепи Маркова

Преобразование Коллатца – это типичная цепь Маркова, когда следующий шаг зависит только от предыдущего.

Состояния – это нечетные числа, взятые по модулю 6, 18, 54, 162 и т.д.

Если мы зафиксировали модуль, например 54, тогда у нас 18 состояний и возникает матрица 18 на 18 переходов этих состояний. Ее 3-я степень становится стационарной, у которой все строки совпадают – вот ее первая строка:

(9632, 8632, 2408, 12784, 23285, 34492, 6392, 3196, 1598, 19264, 5240,
10480, 17264, 4816, 4316, 34528, 17246, 46570) / 262 143.

Мы видим, что некоторые нечетные числа встречаются в цепочках Коллатца в 30 раз чаще, чем другие.

Кроме того, и четные числа далеко не все встречаются в этих цепочках. Это особый мир, достойный внимательного изучения.

Самым удивительным результатом является плотность распределения длин цепочек Коллатца. Абсолютно неожиданно, что некоторые длины оказываются запретными.

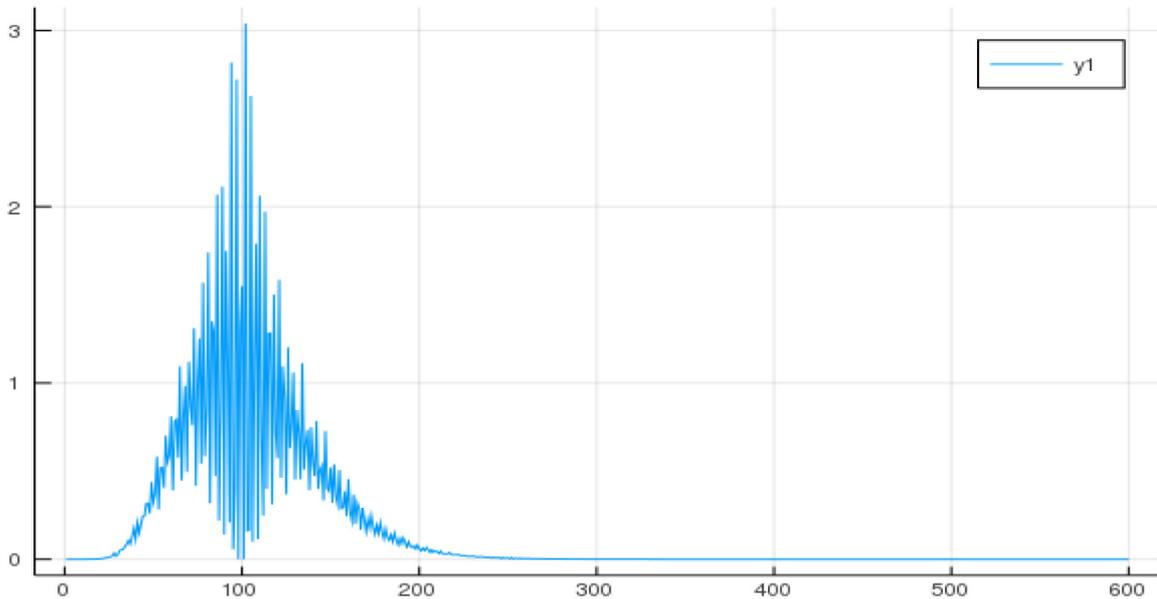


Рис. 1. Нормированная по $\log_{4/3} n$ реальная длина цепочек Коллатца

Длина цепочки Коллатца $k(n)$ для числа n удовлетворяет неравенству
Теорема 2. Для $10^9 < n < 14 \cdot 10^{12}$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n k(n) - \log_{4/3} n + 2.1 \right| < 0.01$$

Таким образом, средняя длина цепочки Коллатца числа “а” на 2.1 меньше, чем логарифм $\log_{4/3} a$.

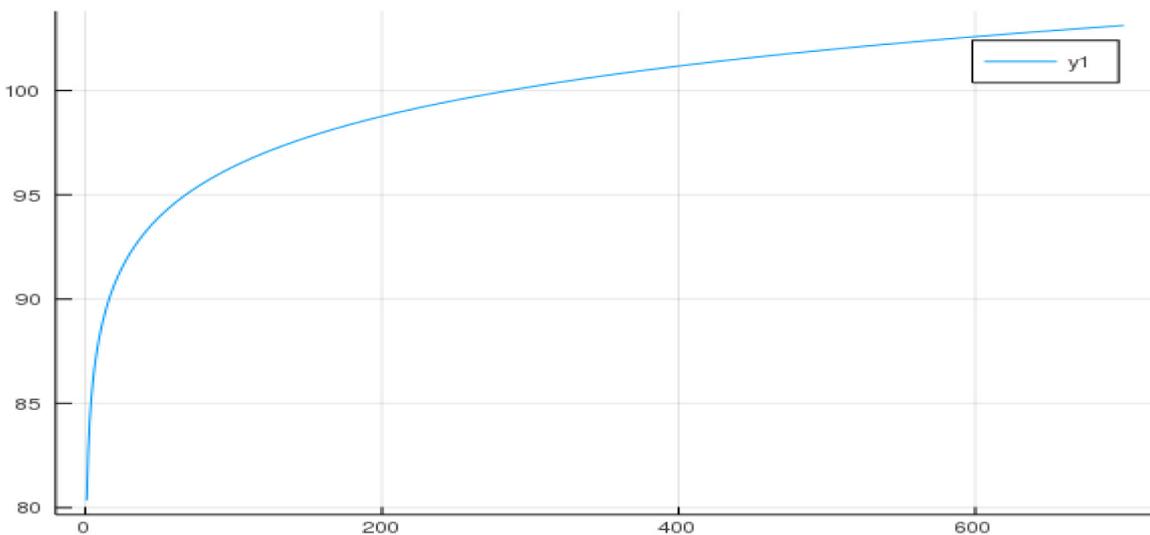


Рис. 2. Средняя длина похожа на логарифм

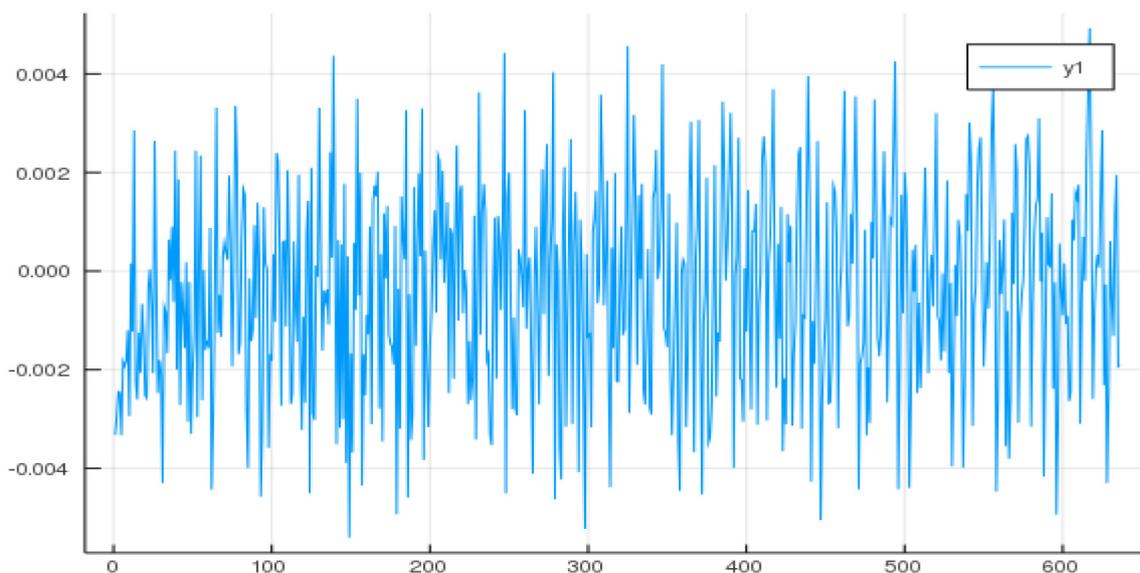


Рис. 3. Отклонение средней длины от логарифма

Теорема 3. До 14 триллионов максимальная длина цепочки Коллатца удовлетворяет неравенству $k(a) < 6 \cdot \log_{4/3} a < 21 \cdot \ln(a)$.

Рис. 2 – это график среднего значения длины цепочки Коллатца до 14 трл, рис. 3 – его отклонение от функции $\log_{4/3} n - 2.1$.

Шаг в обоих графиках 20 млрд. При более меньших масштабах заметить тенденцию изменения длины цепочки почти невозможно.

Предварительные результаты были представлены в [1; 2].

Библиографический список

1. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера: материалы II Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». Майкоп: Изд-во АГУ, 2017. С. 198–203.
2. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная (вычислительная) теория чисел / Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы X междунар. науч.-практ. конф., Екатеринбург, 27 февраля–3 марта 2017 г. ФГАОУ ВО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». Екатеринбург, 2017. С. 413–417.
3. The ultimate challenge. The $3x+1$ problem / Jeffrey C. Lagarias Editor / AMS. 2011. 360 p.
4. The $3x + 1$ Problem: An Annotated Bibliography (1963–1999) / Jeffrey C. Lagarias Editor. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0309224v13>.
5. The $3x + 1$ Problem An Annotated Bibliography II (2000–2009) / Jeffrey C. Lagarias Editor. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0608208v6>

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ФИНИТНО-АППРОКСИМИРУЕМЫХ p -ГРУПП¹

ABOUT MAXIMAL SUBGROUPS OF FINITELY GENERATED RESIDUALLY FINITE p -GROUPS

Н.Н. Рыбакова, А.И. Созутов

N.N. Rybakova, A.I. Sozutov

Конечно порожденные финитно-аппроксимируемые p -группы, максимальные подгруппы, подгруппа Фраттини.

Доказано, что максимальная подгруппа бесконечного индекса конечно порожденной финитно-аппроксимируемой p -группы конечно порождена и изоморфна самой группе.

Finitely generated residually finite p -groups, maximal subgroups, Frattini subgroup.

It is proved that the maximal subgroup of infinite index of the finitely generated residually finite p -group is finitely generated and is isomorphic to the group itself.

Пусть p – простое число. Группа называется p -группой, если порядок каждого ее элемента есть степень числа p . Группа G называется финитно-аппроксимируемой (резидуально конечной), если в ней есть система нормальных делителей конечных индексов, общее пересечение которых равно единичной подгруппе [10, с. 438], [11].

В настоящее время известны два класса конечно порожденных бесконечных финитно-аппроксимируемых p -групп. Это группы Голода – подгруппы присоединенных групп конечно порожденных бесконечномерных ассоциативных нильалгебр характеристики p [4-5], и AT -группы – группы автоморфизмов бесконечных однородных деревьев [13] (этот класс групп включает группы С.В. Алешина [3], Р.И. Григорчука [6], В.И. Сущанского [17], Н. Гупты и С. Сидки [1]). Их подгрупповое строение мало изучено по вполне понятным причинам. Группы Голода заданы опосредованно, через нильалгебры, которые к тому же определены генетическими кодами. А AT -группы заданы порождающими их конкретными автоморфизмами бесконечных графов. В настоящее время даже неизвестно, пересекаются ли указанные классы групп (*существует ли группа Голода, изоморфная AT -группе?* вопрос 13.55 А.В. Тимофеев из [9]). В 18-ом издании Коуровской тетради [9] Д.С. Пассман поставил такой вопрос:

18.81. Пусть G – конечно порожденная финитно-аппроксимируемая p -группа. Верно ли, что все максимальные подгруппы из G нормальны?

Другими словами, *существует ли конечно порожденная финитно-аппроксимируемая p -группа с максимальной подгруппой бесконечного индекса?* Этот

¹ Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-01-00566 А.

вопрос давно ожидал официального статуса, он имеет связь с другими нерешенными вопросами, в том числе из Коуровской тетради [9], и неоднократно обсуждался специалистами. Его частный случай – *содержит ли максимальные подгруппы бесконечного индекса 2-группа Григорчука; AT_w -группа; AT -группа?* – опубликован в [13, вопрос 6.1.1] (1998), и для 2-групп Григорчука и AT_w -групп был решен положительно в [12]. Полный текст доказательства в [12] приведен только для группы Григорчука, а для AT_w -групп указаны лишь формулировки основных шагов. Используемая в [12] техника опирается на теорию AT -групп [13] и основана на изучении действия конечно порожденных подгрупп на поддеревьях.

Можно предполагать, что решение вопроса 18.81 Д.С. Пассмана [9] также будет опираться на детально изученное строение гипотетических максимальных подгрупп M бесконечного индекса группы G . К сожалению, в доказательстве представленной в [16] теоремы об изоморфизмах $M \cong G$ был обнаружен пробел, ликвидировать который пока не удается. В настоящей работе доказан более слабый вариант теоремы из [16].

Теорема. Пусть P – конечно порожденная финитно-аппроксимируемая p -группа и M ее максимальная подгруппа бесконечного индекса. Тогда M содержит подгруппу H , факторы нижнего центрального ряда которой изоморфны соответствующим факторам нижнего центрального ряда группы P .

Некоторые свойства исследуемых групп.

Пусть $P = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ – бесконечная конечно порожденная финитно-аппроксимируемая p -группа. Будем считать, что x_1, \dots, x_r – минимальная система порождающих группы P , т. е. r – минимально возможное число и любая k -порожденная подгруппа при $k < r$ является собственной подгруппой в P . Число r назовем рангом группы P .

Группа P обладает максимальными подгруппами. Так, например, множество X_k собственных подгрупп из P , содержащих подгруппу $H_k = \langle x_i \mid 1 \leq i \leq r, i \neq k \rangle$, частично упорядочено по включению и ввиду конечной порожденности группы P объединение любой возрастающей цепочки подгрупп из X принадлежит X . По лемме Цорна X_k обладает максимальными элементами. Если подгруппа M – максимальный элемент в X_k , то очевидно, что M максимальна в P . Те же рассуждения показывают, что каждая собственная подгруппа H из P содержится в подходящей максимальной подгруппе M группы P . Используя теорему Шрейера [18, теорема 7.2.8], несложно доказать, что каждая подгруппа H конечного индекса n в группе P не более, чем $1 + n(r - 1)$ порождена и ввиду теоремы Пуанкаре [10, стр. 53] H содержит нормальную в P конечно порожденную подгруппу N конечного индекса. Понятно также, что каждая собственная подгруппа H конечного индекса содержится в конечном числе максимальных подгрупп группы P .

В силу конечной порожденности и финитной аппроксимируемости группа P обладает бесконечным нижним центральным рядом

$$P = \gamma_0(P) > \gamma_1(P) > \gamma_2(P) > \dots, \text{ где } \gamma_{i+1}(P) = [P, \gamma_i(P)],$$

с конечными факторами $\gamma_i(P)/\gamma_{i+1}(P)$ и тривиальным пересечением $\bigcap_{i=0}^{\infty} \gamma_i(P) = 1$ (см., например, [11]). Несложно доказывается теорема 1 из [15]:

Лемма 1. В финитно-аппроксимируемой p -группе P ранга r каждая максимальная подгруппа конечного индекса нормальна в P и имеет индекс p , их общее пересечение D является характеристической подгруппой группы P , фактор-группа P/D – элементарная абелева группа порядка p^r , и число различных максимальных подгрупп конечных индексов в P равно $1 + p + \dots + p^{r-1}$.

Пересечение всех максимальных подгрупп произвольной группы G называется ее подгруппой Фраттини и обозначается $\Phi(G)$. По известной теореме Б. Неймана и Г. Цассенхауза [7, теорема 2.6.1] множество всех непорождающих элементов группы G совпадает с ее подгруппой Фраттини $\Phi(G)$, т.е. из $G = \langle X \rangle G = \langle X \rangle$ всегда следует $G = \langle X \setminus \Phi(G) \rangle$.

Как следует из леммы 1, подгруппа D группы P содержит коммутант $P' = [P, P]$ и характеристическую в P подгруппу $\langle x^p \vee x \in P \rangle$, которую обозначим через $K(P)$. В силу конечной порожденности P и известного результата А.И. Кострикина [8] подгруппа $K(P)$ имеет конечный индекс в P . Индекс коммутанта P' в P также конечен, и по теореме Пуанкаре подгруппа $V = K(P) \cap P'$ имеет конечный индекс в P .

Лемма 2. Пусть подгруппа N нормальна в P , $|P:N| < \infty$, $N \leq V$ и $\bar{P} = P/N$. Тогда $\bar{P}' = P'/N$, $K(\bar{P}) = K(P)/N$, $\bar{D} = \Phi(\bar{P}) = P'/K(P)$ и $\bar{P} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r \rangle$.

Доказательство. По условиям $N \leq P' \cap K(P)$, и равенства $\bar{P}' = P'/N$ и $K(\bar{P}) = K(P)/N$ верны в силу теорем [7, теоремы 3.3.1, 3.3.3], устанавливающих соответствие между подгруппами группы P , содержащими N , и подгруппами фактор-группы P/N . Поскольку $N \leq D < M$ для любой максимальной в P подгруппы M конечного индекса и соответствие между такими подгруппами M и всеми максимальными подгруппами из \bar{P} биективно [7, теоремы 3.3.1, 3.3.3], то \bar{D} как пересечение всех максимальных подгрупп из \bar{P} является подгруппой Фраттини $\Phi(\bar{P})$. Поскольку p -е степени элементов из \bar{P}/\bar{P}' содержатся в $K(\bar{P})/\bar{P}'$, то по [18, теорема 12.2.1] $\Phi(\bar{P}) = \langle \bar{P}', K(\bar{P}) \rangle = \bar{P}' \cdot K(\bar{P})$.

Представляет интерес и такое свойство исследуемых групп.

Лемма 3. Множество X нормальных подгрупп бесконечного индекса в группе P обладает максимальными по включению элементами. Если подгруппа N – максимальный в X элемент, то в фактор-группе P/N нет нормальных подгрупп бесконечного индекса.

Доказательство. Ввиду теорем Пуанкаре [10, с. 53] и Шрейера [18, теоремы 2.3.4, 7.2.8] каждая подгруппа H конечного индекса в группе P конечно порождена. Поэтому H не может содержаться в объединении $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ бесконечного возрастающего ряда $N_1 < N_2 < \dots$ подгрупп N_1, N_2, \dots из X и индекс подгруппы N в P бесконечен. Поскольку N очевидно нормальна в P , то $N \in X$ и первое утверждение леммы следует из леммы Цорна. Второе утверждение следует непосредственно из определения множества X .

Заметим, что в общем случае фактор-группа группы P не обязана быть финитно-аппроксимируемой (см., например, комментарии к вопросу 12.102 из [9]). Пусть N – максимальная по включению подгруппа из X (лемма 3). Фактор-группа P/N является бесконечной p -группой. Возникает такой вопрос: *может ли P/N быть простой?*

Лемма 4. Пусть подгруппа H не содержится ни в одной максимальной подгруппе конечного индекса группы P . Тогда H бесконечна, и для любой подгруппы N конечного индекса из P выполняются равенство $HN = P$ и изоморфизм $P/N \simeq H/(H \cap N)$.

Доказательство. В силу теоремы Пуанкаре можно считать, что N нормальна в P . Тогда HN – подгруппа, а из конечности индекса $[P:N]$ следует конечность индекса $[P:HN]$. Поскольку каждая собственная подгруппа конечного индекса группы P содержится в максимальной подгруппе конечного индекса, то в силу условий леммы $HN = P$. Согласно [7, теорема 3.3.2 (б)], $P/N \simeq H/(H \cap N)$. В силу бесконечности и финитной аппроксимируемости в P есть нормальные подгруппы N , индексы которых больше любого наперед заданного числа. Поэтому ввиду доказанных выше равенств $HN = P$ подгруппа H бесконечна. Лемма доказана.

Доказательство теоремы

Пусть $P = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ – бесконечная конечно порожденная финитно-аппроксимируемая p -группа ранга r , M – максимальная в P подгруппе бесконечного индекса, и пусть D – подгруппа, определенная в лемме 1. При естественном гомоморфизме $P \rightarrow P/D$ порождающие элементы x_1, \dots, x_r группы P отображаются в базис a_1, \dots, a_r абелевой группы $A = P/D$. По лемме 4 $P = MD$ и $A = MD/D \simeq M/(M \cap D)$. Пусть элементы h_1, \dots, h_r из M при гомоморфизме $DM = P \rightarrow P/D \simeq M/(M \cap D)$ также отображаются в базис a_1, \dots, a_r группы A . Обозначим через H подгруппу из M , порожденную элементами h_1, \dots, h_r . Так как $HD = P$, то H удовлетворяет условиям леммы 4, она бесконечна, $HN = P$ для любой нормальной подгруппы N конечного индекса из P и $P/N \simeq H/(H \cap N)$. Поскольку подгруппа H конечно порождена и как подгруппа группы P финитно аппроксимируема, то она обладает нижним центральным рядом

$$H = \gamma_0(H) > \gamma_1(H) > \gamma_2(H) > \dots$$

с конечными факторами $\gamma_i(H)/\gamma_{i+1}(H)$ и тривиальным пересечением $\bigcap_{i=0}^{\infty} \gamma_i(H) = 1$. Ряд

$$H > H_1 > H_2 > \dots, \text{ где } H_i = H \cap \gamma_i(P)$$

также является центральным в H и $\bigcap_{i=0}^{\infty} H_i = 1$, так как $\bigcap_{i=0}^{\infty} \gamma_i(P) = 1$. Докажем, что

$$P/\gamma_i(P) \simeq H/H_i \simeq H/\gamma_i(H).$$

С целью лучшего понимания дадим удобное описание подгруппы $\gamma_n(G)$ в произвольной группе G абстрактным свойством. Если N нормальна в G и фактор-группа G/N абелева, то для любых $g_1, g_2 \in G$ коммутатор $[g_1, g_2] \in N$ и, значит, $\gamma_1(G) \leq N$. Обозначим через X_1 множество всех нормальных в G подгрупп N , для которых фактор-группы G/N абелевы. Тогда $\gamma_1(G) \in X_1$ и $\gamma_1(G) = \bigcap_{N \in X_1} N$ – искомое абстрактное свойство.

Аналогично, если $N \triangleleft G$ и фактор-группа G/N нильпотентна класса n , то для любых элементов $g_1, \dots, g_n, g_{n+1} \in G$ коммутатор $[g_1, \dots, g_n, g_{n+1}] = [[g_1, \dots, g_n], g_{n+1}] \in N$ и $\gamma_n(G) \leq N$. Поэтому $\gamma_n(G) = \bigcap_{N \in X_n} N$, где X_n – множество всех нормальных в G подгрупп N , для которых фактор-группы G/N нильпотентны класса n .

Фактор-группы H/H_n нильпотентны класса n , и по доказанному выше $\gamma_n(H) \leq H_n$.

Допустим, что $\gamma_n(H) \neq H_n$ для некоторого n . Фактор-группа $H/\gamma_n(H)$ конечна, и ввиду равенства $\bigcap_{i=0}^{\infty} H_i = 1$ ([f3]) для некоторого номера $m \geq n$ выполняется включение $H_m \leq \gamma_n(H)$. По лемме 4 фактор-группа H/H_m изоморфна $P/\gamma_m(P)$, и ввиду соответствия между подгруппами группы P , содержащими $\gamma_m(P)$, и подгруппами фактор-группы $P/\gamma_m(P)$ [7, теоремы 3.3.1, 3.3.3], ряд

$$\bar{P} = P/\gamma_m(P) > \gamma_1(P)/\gamma_m(P) > \dots > \gamma_{m-1}(P)/\gamma_m(P) > \gamma_m(P)/\gamma_m(P) = \bar{1}$$

является нижним центральным рядом фактор-группы $P/\gamma_m(P)$. В силу леммы 4 нижним центральным рядом фактор-группы H/H_m является ряд

$$\bar{H} = H/H_m > H_1/H_m > \dots > H_{m-1}/H_m > H_m/H_m = \bar{1}.$$

В частности, фактор-группа H_n/H_m является пересечением всех нормальных подгрупп из H/H_m , факторы по которым нильпотентны класса n . По [7, теоремы 3.3.1, 3.3.3] фактор-группа $(H/H_m)/(\gamma_n(H)/H_m)$ изоморфна фактор-группе $H/\gamma_n(H)$ и нильпотентна класса n . Но тогда $(\gamma_n(H)/H_m) \leq H_n/H_m$ и $\gamma_n(H) \leq H_n$, вопреки предположению. Следовательно, $H_n = \gamma_n(H)$ и $P/\gamma_i(P) \simeq H/H_i \simeq H/\gamma_i(H)$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Gupta N., Sidki S. Some infinite p -groups // Алгебра и логика. 1983. 22. С. 584–589.
2. Ershov M., Jaikin-Zapirain A. Groups of positive weighted deficiency and their applications // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 2013. Vol. 677. P. 71–134.
3. Алешин С.В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 3. С. 319–328.
4. Голод Е.С., Шафаревич И.Р. О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1964. Т. 28. С. 261–272.
5. Голод Е.С. О нильалгебрах и финитно-аппроксимируемых группах // Изв. АН СССР. Сер.: Матем. 1964. Т. 28, № 2. С. 273–276.
6. Григорчук Р.И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и его приложения. 1980. Т. 14, № 1. С. 53–54.
7. Кондратьев А.Н. Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 310 с.
8. Кострикин А.И. О проблеме Бернсайда // Изв. АН СССР. Сер.: Матем. 1959. Т. 23. № 1. С. 3–34.
9. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 18-е изд. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2014.
10. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
11. Мальцев А.И. Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб. 1949. Т. 25. С. 347–366.
12. Первова Е.Л. Всюду плотные подгруппы одной группы автоморфизмов дерева // Труды МИАН. 2000. Т. 231. С. 356–367.
13. Рожков А.В. AT -группы: учеб. пособие. Челябинск: Челяб. гос. ун-т. 1998. 84 с.
14. Рожков А.В. К теории групп алешинского типа // Мат. заметки. 1986. № 40. С. 572–589.
15. Созутов А.И., Мельникова И.В. О теоремах Бернсайда и Фраттини для некоторых финитно-аппроксимируемых p -групп // Информационные технологии в математике и математическом образовании... (статья в печати).
16. Созутов А.И., Синицин В.М. О максимальных подгруппах конечно порожденных примарных финитно-аппроксимируемых групп // Тез. докл. Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем». Нальчик, 2018.
17. Суцанский В.И. Периодические p -группы и неограниченная проблема Бернсайда // ДАН СССР. 1979. Т. 247. С. 561–565.
18. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 468 с.

АПЕРИОДИЧЕСКИЕ СЛОВА НАД КОНЕЧНЫМ АЛФАВИТОМ

APERIODIC WORDS ABOVE FINITE ALPHABET

В.И. Сенашов

V.I. Senashov

Локально конечная группа, слово, аперIODичность, оценка, формальный язык.

Работа посвящена изучению множеств аперIODических слов над конечным алфавитом. У. Бернсайд принадлежит вопрос о локальной конечности периодических групп. Отрицательный ответ был получен лишь через шестьдесят лет Е.С. Голодом. В данной статье рассматриваем результаты по оценке множеств аперIODических слов, в частности, получена оценка количества 6-аперIODических слов любой данной длины в алфавите из трех букв.

Locally finite group, word, aperiodicity, estimate, formal language.

W. Burnside owns the question of the local finiteness of periodic groups. A negative answer was received only sixty years later by E.S. Golod. In this article, we consider the results of estimating the sets of aperiodic words, in particular, an estimate is obtained for the number of 6-aperiodic words of any given length in an alphabet of three letters.

В статье рассматриваются множества аперIODических слов над конечным алфавитом.

Группа $B(d, n)$ с d порождающими и тождественным соотношением $x^n = 1$ называется *свободной бернсайдовской группой ранга d и периода n* .

Конечность свободной бернсайдовской группы установлена в разное время для периода два (тривиальный случай), для периода три У. Бернсайдом, для периода четыре У. Бернсайдом для двух порождающих; И.Н. Сановым для произвольного числа порождающих элементов, для периода шесть М. Холлом.

Уильям Бернсайд сто двадцать лет назад поставил вопрос о локальной конечности групп с тождеством $x^n = 1$ [1]. Сейчас этот вопрос известен как проблема Бернсайда. Группа называется локально конечной, если любая ее конечнопорожденная подгруппа конечна.

Отрицательный ответ на проблему Бернсайда был получен в 1968 г. в работах П.С. Новикова–С.И. Адяна [2–4]. Доказательство бесконечности группы $B(d, n)$, с числом порождающих больше либо равным двум, для нечетных показателей, превышающих 4380, было дано в [2–4], а для нечетных периодов, превышающих 665, – в монографии С.И. Адяна [5].

Более подробно с результатами по проблеме Бернсайда можно познакомиться в работе С.И. Адяна [6].

Теоремы о неповторных словах в алфавите из трех букв и 3-аперIODических слов любой длины в алфавите из двух букв доказал А. Туэ в 1906 г. [7] (см. также лемму 1 из [6]). В статье С.Е. Аршона 1937 г. [8] доказано существование n -значной ассиметричной неповторной последовательности для алфавита не менее, чем из трех букв. В монографии С.И. Адяна [5] на с. 13–16 способом

Аршона [8] доказано, что в алфавите из двух символов существуют бесконечные 3-апериодические последовательности. К этому же направлению относится работа [9]. В монографии А.Ю. Ольшанского [9] доказана бесконечность множества 6-апериодических слов в двухбуквенном алфавите и получена оценка количества таких слов любой данной длины.

Мной был сделан доклад по теме апериодических слов на конференции «Решетневские чтения» [10], затем исследования по этому вопросу были продолжены: в [11] была улучшена оценка А.Ю. Ольшанского из [9] количества 6-апериодических слов в двухбуквенном алфавите.

В данной статье получена оценка количества 6-апериодических слов любой данной длины в трехбуквенном алфавите. Мной также рассматривались ранее 5-периодические слова [12] и 12-апериодические слова [13].

Периодическим словом с периодом H называется любое подслово некоторого слова H^p , $p > 0$. *l-апериодическим словом* называется слово X , не содержащее нетривиальных подслов типа Y^l .

С.И. Адяном [4] доказано, что в алфавите из двух букв существует бесконечное множество сколь угодно длинных 3-апериодических слов.

Рассматривалась также задача о существовании сколь угодно длинных слов, свободных от квадратов, над алфавитом из трех букв [8].

А.Ю. Ольшанский в работе [9] рассматривал множество 6-апериодических слов и получил оценку функции $f(n)$ – количества таких слов длины n : в двухбуквенном алфавите существует сколь угодно длинные 6-апериодические слова, и число $f(n)$ таких слов длины n больше, чем $(\frac{3}{2})^n$. В работе [11] автором улучшена эта оценка количества 6-апериодических слов над двухбуквенным алфавитом.

Для нас представляет интерес оценить количество 6-апериодических слов в алфавите из трех букв. При получении оценки использован метод А.Ю. Ольшанского [9].

Теорема. *В трехбуквенном алфавите существует сколь угодно длинные 6-апериодические слова, и число $f(n)$ таких слов длины n больше, чем $(\frac{5}{2})^n$.*

Выводы. Работа посвящена изучению множеств апериодических слов над конечным алфавитом. Рассмотрены результаты по оценке множеств апериодических слов, в частности, получена оценка количества 6-апериодических слов любой данной длины в алфавите из трех букв.

Библиографический список

1. Burnside W. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // Quart. J. Pure. Appl. Math. 1902. Vol. 33. P. 230–238.
2. Новиков П.С., Адян С.И. О бесконечных периодических группах // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1968. № 1 (32). С. 212–244.
3. Новиков П.С., Адян С.И. О бесконечных периодических группах. II // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1968. № 2 (32). С. 251–524.
4. Новиков П.С., Адян С.И. О бесконечных периодических группах. III // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1968. № 3. С. 709–731.

5. Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975. 336 с.
6. Адян С.И. Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65, вып. 5 (395). С. 5–60.
7. Thue A. Uber unendliche Zeichenreih // Norcke Vid. Selsk. skr., I Mat. Nat. Kl. Christiania. 1906. Bd. 7. P. 1–22.
8. Аршон С.Е. Доказательство существования n -значных бесконечных асимметричных последовательностей // Мат. сб. 1937. № 4 (2 (44)). С. 769–779.
9. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989. 448 с.
10. Сенашов В.И. Апериодические слова // Решетневские чтения: материалы XIX Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 55-летию Сиб. гос. аэрокос. ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева (10–14 нояб. 2015, г. Красноярск): в 2 ч. / под общ. ред. Ю.Ю. Логинова; Сиб. гос. аэрокос. ун-т. Красноярск, 2015. Ч. 2. С. 132–133.
11. Сенашов В.И. Улучшение оценки количества 6-апериодических слов фиксированной длины // Вестник СибГАУ. 2016. № 2 (17). С. 168–172.
12. Сенашов В.И. Оценка количества 5-апериодических слов // Вестник Тувинского государственного университета. Технические и физико-математические науки. 2017. № 3. С. 132–138.
13. Сенашов В.И. Оценка количества 12-апериодических слов фиксированной длины // Вестник СибГАУ. 2017. № 1 (18). С. 93–96.

M_p -ГРУППЫ

M_p -GROUPS

В.И. Сенашов

V.I. Senashov

Группа, M_p -группа, условие конечности, периодичность, порядок элемента, инволюция, фактор-группа.

В работе сделан обзор свойств класса M_p -групп, введенного В.П. Шунковым в 1983 г., приведены примеры таких групп. В.П. Шунков охарактеризовал M_p -группы как далеко идущее обобщение черниковской группы. Результаты восьмидесятых годов В.П. Шункова по классу M_p -групп относятся к группам без инволюций. Затем, в последующих совместных работах с С.Н. Козулиным и В.И. Сенашовым появляются характеристики M_p -групп в классе групп с инволюциями.

Group, M_p -group, finiteness condition, periodicity, element order, involution, factor group.

The paper reviews the properties of the class of M_p -groups introduced by V.P. Shunkov in 1983, examples of such groups are given. V.P. Shunkov characterized M_p -groups as a far-reaching generalization of the Chernikov group. The results of the eighties of V.P. Shunkov in the class of M_p -groups, belong to groups without involutions. Then, in subsequent joint papers with S.N. Kozulin and V.I. Senashov, characterizations of M_p -groups appear in the class of groups with involutions.

Введение

В статье сделан обзор свойств M_p -групп, введенных В.П. Шунковым в 1983 г., приведены примеры таких групп. В.П. Шунков в монографии 1990 г. охарактеризовал M_p -группы как далеко идущее обобщение черниковской группы. Он же отметил, что до введения этого класса групп изучал лишь различные фрагменты теории M_p -групп, даже не подозревая этого.

В этом классе групп содержатся: черниковская группа, обладающая бесконечной p -подгруппой и почти регулярным элементом порядка p ; периодическая почти нильпотентная группа с конечными силовскими подгруппами, обладающая элементом простого порядка p с конечным централизатором в группе; группа Новикова–Адяна.

Результаты восьмидесятых годов В.П. Шункова по классу M_p -групп относятся к группам без элементов второго порядка. Затем в последующих совместных работах с С.Н. Козулиным и В.И. Сенашовым появляются характеристики M_p -групп в классе групп с инволюциями.

Класс M_p -групп относится к направлению изучения бесконечных групп с условиями конечности для бесконечных систем подгрупп.

Определение. Пусть G – группа, B – ее бесконечная нормальная полная абелева p -подгруппа с условием минимальности, a – элемент порядка p и выполняются следующие условия:

- а) локально конечные p -подгруппы из $C_G(a)B/B$ конечны,

б) если некоторая полная абелева p -подгруппа C группы G содержится в множестве $\bigcup_{g \in G} \langle a, a^g \rangle$, то $C \subseteq B$.

Группа G из определения называется M_p -группой, а подгруппы B , $\langle a \rangle$ соответственно – ядром и ручкой M_p -группы G .

Ручка $\langle a \rangle$ называется q -регулярной, если $C_G(a)$ конечен и для некоторого $q \in \pi(G)$ любая локально конечная $\langle a \rangle$ -инвариантная q -подгруппа из G конечна. Если для любого $q \in \pi(G)$ группа G – M_p -группа с q -регулярной ручкой, то G называется M_p -группой с регулярной ручкой или регулярной M_p -группой.

В.П. Шунков охарактеризовал M_p -группы как «далеко идущее обобщение черниковской группы». Он же отметил, что «до введения этого класса групп изучал лишь различные фрагменты теории M_p -групп, даже не подозревая этого».

Приведем некоторые свойства M_p -групп.

Пусть G – группа без инволюций, a – элемент простого порядка p из G с централизатором $C_G(a)$, являющимся конечной p -подгруппой, удовлетворяющие условию: все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны. Тогда G обладает полной абелевой нормальной p -подгруппой B такой, что в G/B силовские p -подгруппы, содержащие элемент aB , конечны и сопряжены, а число их конечно [1].

Условие конечности подгрупп $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, здесь является существенным. Действительно, в этом легко убедиться на примере свободного произведения бесконечной черниковской p -группы, обладающей почти регулярным элементом порядка p ($p \neq 2$) и некоторой нетривиальной периодической группы без инволюций.

Следующее свойство устанавливает условия для того, чтобы группа без инволюций была M_p -группой.

Пусть G – группа без инволюций, B – ее полная абелева p -подгруппа, a – элемент порядка p из G , удовлетворяющие условиям: 1) $H = N_G(B)$ является M_p -группой с p -ядром B и редуцированной ручкой $\langle a \rangle$; 2) для всякого $g \in G \setminus H$ подгруппа $\langle a, a^g \rangle$ конечна; 3) $|C_G(a) : H \cap C_G(a)| < \infty$ и H содержит все p' -элементы конечного порядка из $C_G(a)$; 4) если Q – конечная $\langle a \rangle$ -инвариантная q -подгруппа из H с условием $Q \cap C_G(a) \neq \{1\}$ и $q \neq p$, то $N_G(Q) \leq H$. Тогда B нормальна в G и G – M_p -группа с ядром B и редуцированной ручкой $\langle a \rangle$ [2].

Аналогичный результат для M_2 -групп получен В.О. Гомером в [3].

Приведем примеры M_p -групп с регулярной ручкой:

- Бесконечная группа диэдра является M_2 -группой с регулярной ручкой [4].
- Периодическая почти нильпотентная группа с конечными силовскими подгруппами, обладающая элементом простого порядка p с конечным централизатором в группе, является M_p -группой с регулярной ручкой [4].
- Группа Новикова–Адяна [5] является M_p -группой с регулярной ручкой по любому простому числу p из множества простых делителей порядков элементов группы [4].

– Свободное произведение групп [6], обладающее нетривиальными конечными множителями, является M_p -группой с регулярной ручкой [4].

– Периодическое произведение групп без инволюций [7] является M_p -группой с регулярной ручкой [4].

– Свободное произведение конечных групп Фробениуса с объединенной подгруппой [6], являющейся дополнением в множителях, также M_p -группа с регулярной ручкой [4].

Критерий периодичности и почти нильпотентности для M_p -группы дает следующее свойство.

M_p -группа G без инволюций с регулярной ручкой $\langle a \rangle$ тогда и только тогда является периодической почти нильпотентной группой, когда в ней выполняется условие: подгруппы $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны [5].

Следующее свойство характеризует M_p -группы с p -конечной ручкой произвольного простого порядка, отличного от трех.

Пусть G – группа, B – ее бесконечная полная абелева p -подгруппа с условием минимальности (p – простое число, отличное от трех), удовлетворяющие условиям: $H = N_G(B)$ является M_p -группой с ядром B и p -конечной ручкой $\langle a \rangle$; для произвольного элемента $g \in G \setminus H$ подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$ конечны и разрешимы; $|C_G(a) : H \cap C_G(a)| < \infty$ и $H \cap C_G(a)$ содержит все p' -элементы конечного порядка из $C_G(a)$; если Q – конечная $\langle a \rangle$ -инвариантная q -подгруппа из H с условием $Q \cap C_G(a) \neq \{1\}$, то $N_G(Q) \leq H$ (q – простое число, отличное от p); в G все конечные $\langle a \rangle$ -инвариантные p' -подгруппы разрешимы. Тогда подгруппа B нормальна в G [8].

Покажем на примерах существование групп, в которых условия 4), 5) этого свойства выполняются, а каждое из условий 1)–3) не зависит от остальных.

– Пусть H – черниковская группа без инволюций, обладающая бесконечной p -подгруппой и почти регулярным элементом порядка p , и T – некоторая нетривиальная группа. В периодическом (в смысле С.И. Адяна) произведении G подгрупп H и T для подгруппы H и ее почти регулярного элемента a порядка p выполняются условия 1) и 3), а условие 2) не выполняется и G не является M_p -группой с ручкой $\langle a \rangle$ (об абстрактных свойствах периодических произведений см. [9]).

– Пусть $G = \langle c \rangle \wr V$, где V – p -группа типа $V = B\lambda\langle a \rangle$, B – полная абелева группа, a, c – элементы порядка p . Очевидно, $B = N_G(B)$ и a удовлетворяют условиям 1) и 2), $|C_G(a) : N_G(B) \cap C_G(a)| = \infty$ и G не является M_p -группой.

– Пусть G – локально конечная группа Фробениуса с дополнительным множителем B , являющимся квазициклической p -группой, a – некоторый элемент порядка p из B . Условия 2) и 3) выполняются для $B = N_G(B)$ и элемента a , но B не есть M_p -группа с p -конечной ручкой.

Приведем еще одно свойство.

Пусть G – группа, B – ее бесконечная p -подгруппа (p – простое число, отличное от трех), удовлетворяющие условиям предыдущего свойства. Тогда G является M_p -группой [8].

В следующем свойстве удастся отказаться от условий на порядок ручки (в предыдущих свойствах было ограничение: отличный от двух и отличный от трех, соответственно).

Пусть G – группа, B – ее бесконечная полная абелева p -подгруппа с условием минимальности (p – простое число), удовлетворяющие условиям: $H = N_G(B)$ является M_p -группой с ядром B и p -конечной ручкой $\langle a \rangle$; для произвольного элемента $g \in G \setminus H$ подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$ конечны и разрешимы; $|C_G(a) : H \cap C_G(a)| < \infty$ и $H \cap C_G(a)$ содержит все p' -элементы конечного порядка из $C_G(a)$; если Q – конечная $\langle a \rangle$ -инвариантная q -подгруппа из H с условием $Q \cap C_G(a) \neq \{1\}$, то $N_G(Q) \leq H$ (q – простое число, отличное от p); в G все конечные $\langle a \rangle$ -инвариантные p' -подгруппы разрешимы; в группе G нет подгрупп, изоморфных группе кватернионов. Тогда подгруппа B нормальна в G [10].

Последние два свойства доказаны В.П. Шунковым совместно с С.Н. Козулиным и В.И. Сенашовым и являются обобщениями свойства, доказанного В.П. Шунковым в [1] для группы G без инволюций.

Более подробно со свойствами класса M_p -групп и его подклассов можно познакомиться в монографии В.П. Шункова [11].

Выводы. В докладе рассматривается класс групп, введенный В.П. Шунковым 37 лет назад. В работе сделан краткий обзор результатов, полученных в этом направлении.

Библиографический список

1. Шунков В.П. M_p -группы // Алгебра и логика. 1984. № 4 (23). С. 445–475.
2. Шунков В.П. M_p -группы с ядром произвольного ранга // Алгебра и логика. 1987. № 1 (26). С. 84–105.
3. Гомер В.О. О группах с элементами конечных рангов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: ИМ СО РАН. 1992.
4. Шунков В.П. M_p -группы с регулярной ручкой // Алгебра и логика. 1987. № 2 (26). С. 220–266.
5. Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975. 336 с.
6. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
7. Адян С.И. Периодические произведения групп // Труды мат. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. 1976. Т. 142. С. 3–21.
8. Козулин С.Н., Сенашов В.И., Шунков В.П. Группы с ручками порядка, отличного от трех // Укр. мат. журнал. 2004. № 8 (56). С. 1030–1042.
9. Козулин С.Н., Сенашов В.И., Шунков В.П. M_p -группы, не содержащие групп кватернионов // Известия вузов. Матем. 2014. № 2. С. 17–29.
10. Адян С.И. Аксиоматический метод построения групп с заданными свойствами // Успехи мат. наук. 1977. № 1 (32). С. 3–15.
11. Шунков В.П. M_p -группы. М.: Наука, 1990. 160 с.

ЧТО ТАКОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ВЕКТОР?

WHAT IS A GEOMETRIC VECTOR?

К.А. Сидоров

K.A. Sidorov

Связанный вектор, свободный вектор, коллинеарность, параллельность, сонаправленность, антинаправленность.

Представлена попытка математически строгого описания понятия геометрического вектора. Статья отличается от большинства других источников, в которых обсуждается данный круг вопросов, изложением теории на более высоком уровне строгости и формализации.

Bound vector, free vector, collinearity, parallelism, codirectivity, antiderectivity.

The article is an attempt to mathematically rigorously describe the concept of a geometric vector. The article differs from most other sources in which this range of issues is discussed, an attempt to present the theory at a higher level of rigor and formalization.

1. Введение

Математику вопрос, заданный в заглавии, покажется скорее наивным. Пусть не в школе, но в вузе студенты-первокурсники, обучающиеся по специальности «Математика», всесторонне знакомятся с понятием геометрического вектора на лекциях и семинарах по аналитической геометрии.

Что ж, попробуем поискать ответ на этот наивный вопрос в учебниках по аналитической геометрии. Прежде условно разделим эти учебники на два уровня.

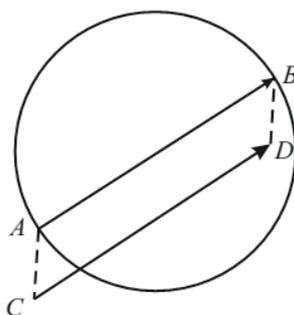


Рис. 1. Векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} не равны

К первому отнесем несомненно хорошие учебники, в которых материал, не относящийся к теме статьи, излагается на высоком методическом уровне. Это учебники [1] – [5]. Во всех этих книгах вектор определяется как направленный отрезок прямой. При этом в учебниках [1], [2] даже не делается попытка определить термин «направленный». В пособиях [3] – [5] так или иначе предпринимается попытка объяснить, что «направленный» означает наличие двух неравноправных точек у вектора \overrightarrow{AB} : начала A и конца B . Во всех указанных учебниках предпринята попытка дать определение равенства двух векторов как векторов, равных по модулю

(длине), параллельных и «направленных в одну сторону» (что это означает, остается, к сожалению, за пределами внимания авторов). При этом, как известно (см. [6], гл. I, §. 1.1, а также [7], гл. V, §. 5.1), одним из следствий аксиоматической теории множеств Цермело–Френкеля является следующее утверждение:

$$(x = y) \rightarrow (F(x) \rightarrow F(y)), \quad (1)$$

где F – любая формула логики предикатов. Нетрудно видеть, что такое определение равенства векторов, приведенное авторами, не удовлетворяет условию (1). Достаточно в качестве F взять хотя бы предикат

$$P(\overrightarrow{AB}) = (A \in O \wedge B \in O \wedge |\overrightarrow{AB}| = \text{diam}O), \quad (2)$$

где O – некоторая окружность. В учебниках второго уровня [8] – [10] изложение материала уже ведется на более высоком уровне абстракции. В учебниках [8], [9] дается (пусть и не совсем строго) представление о связанных, свободных и скользящих векторах, введение которых при последовательном изложении теории представляется важным. Авторы этих учебников не используют во всеоружии удобные понятия и определения математической логики и дискретной математики – в первую очередь понятия упорядоченной пары и бинарного отношения эквивалентности. Цель настоящей статьи и состоит в восполнении этих пробелов.

2. Связанный вектор

2.1. Упорядоченная пара. Важнейшим понятием современной теории множеств является понятие упорядоченной пары. Мы начнем с того, что введем сперва в рассмотрение неупорядоченную пару a, b как множество, состоящее из двух элементов: a и b . Согласно Куратовскому, упорядоченная пара элементов a и b есть множество

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}. \quad (3)$$

Непосредственно из этого определения следует эквиваленция:

$$((a_1, b_1) = (a_2, b_2)) \leftrightarrow (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2), \quad (4)$$

доказательство которой мы здесь не приводим – его можно найти во всех учебниках по аксиоматической теории множеств.

2.2. Определение связанного вектора. Понятие упорядоченной пары является основополагающим при введении понятия связанного вектора.

Определение 1. Связанным вектором \overrightarrow{AB} называется упорядоченная пара точек евклидова пространства:

$$\overrightarrow{AB} = (A, B), \quad (5)$$

где A и B – точки из V^3 . Точка A называется началом вектора, точка B – его концом.

2.3. Основные виды отношений между связанными векторами.

Определение 2. Связанный вектор \overrightarrow{AB} называется параллельным прямой l (плоскости α), если либо он нулевой, либо прямая AB совпадает с прямой l (соответственно, лежит в плоскости α), либо прямая AB параллельна прямой l (соответ-

ственно, плоскости α). Отношение параллельности вектора \overrightarrow{AB} и прямой l (плоскости α) будем обозначать так: $\overrightarrow{AB} \parallel l$ ($\overrightarrow{AB} \parallel \alpha$).

Введем теперь понятие связанного вектора, *сонаправленного* или *антинаправленного* данному. Введение этого понятия для случая, когда связанные векторы A_1B_1 и A_2B_2 не лежат на одной прямой, не представляет существенных трудностей. Мы могли бы, например, определить, что A_2B_2 сонаправлен (антинаправлен) с A_1B_1 , если прямые A_2B_2 и A_1B_1 параллельны и отрезки A_1A_2 и B_1B_2 не имеют общей точки (соответственно, имеют общую точку). Но случай, когда ненулевые связанные векторы A_1B_1 и A_2B_2 лежат на одной прямой, – более сложный и требует отдельного рассмотрения. В связи с возникшей задачей определения сонаправленности (антинаправленности) связанного вектора A_2B_2 связанному вектору A_1B_1 обратимся к понятию движения. Это понятие в евклидовой геометрии аксиоматически определяется десятью аксиомами (аксиомами движения). Для нас важным будет частный случай движения – так называемый параллельный перенос.

Определение 3. Параллельным переносом называется движение, при котором любая прямая переходит в прямую, ей параллельную.

Итак, пусть даны ненулевые связанные векторы $\overrightarrow{A_1B_1} \in l$ и $\overrightarrow{A_2B_2} \in l$, где l – некоторая прямая. Осуществим параллельный перенос Γ_{\parallel} , ставящий в соответствие точке A_1 точку A_2 : $\Gamma_{\parallel} : A_1 \rightarrow A_2$. Существование такого движения вытекает из упомянутой аксиомы III₈ [11]. Пусть при этом переносе точка B_1 перейдет в точку B'_1 : $\Gamma_{\parallel} : B_1 \rightarrow B'_1$. В силу самого определения Γ_{\parallel} точка $B'_1 \in l$. При таком параллельном переносе, как нетрудно видеть, логически возможными оказываются следующие четыре случая:

$$1) B'_1 = B_2, 2) A_2 \overline{B'_1 B_1}, 3) A_2 B'_1 \overline{B_2}, 4) \overline{A_2 B'_1 B_2}. \quad (7)$$

Здесь черта над буквой используется для обозначения тернарного отношения «лежит между». Это понятие аксиоматически вводится посредством четырех аксиом порядка [11]. Мы подразумеваем, что записи все равнозначны и означают, что точка A лежит между точками B и C . Так вот, мы по определению примем, что в случаях 1), 2) и 3) связанные векторы A_1B_1 и A_2B_2 сонаправлены и антинаправлены в случае 4). Все сказанное в этом абзаце графически проиллюстрировано на рис. 2.

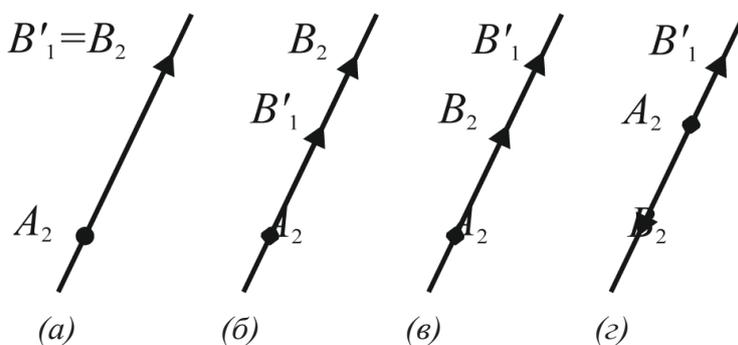


Рис. 2. Рисунки (а), (б), (в) и (г) отвечают формулам 1), 2), 3), 4) соотношений (7) соответственно

Договоримся бинарное отношение сонаправленности обозначать через $\uparrow\uparrow$: запись $\overrightarrow{A_2B_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1B_1}$ означает, что связанный вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$ сонаправлен связанному вектору $\overrightarrow{A_1B_1}$. Математически строго данное бинарное отношение определяется так.

Определение 4. Пусть $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ – связанные векторы. $\overrightarrow{A_2B_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1B_1}$ если и только если

I) $\overrightarrow{A_2B_2} \parallel \overrightarrow{A_1B_1}$;

II) при параллельном переносе, переводящем точку A_1 в точку A_2 , а точку B_1 – в точку $B'_1 \in \overrightarrow{A_2B_2}$ имеет место один и только один из трех случаев:

1) $\overrightarrow{B'_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_2}$;

2) $\overrightarrow{A_2B'_1B_2}$;

3) $\overrightarrow{A_2B'_1B_2}$.

Введем также бинарное отношение антинаправленности вектора $\overrightarrow{A_2B_2}$ вектору $\overrightarrow{A_1B_1}$, которое договоримся обозначать так: $\overrightarrow{A_2B_2} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A_1B_1}$.

Определение 5. Пусть $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ – связанные векторы. $\overrightarrow{A_2B_2} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A_1B_1}$ если и только если

I) $\overrightarrow{A_2B_2} \parallel \overrightarrow{A_1B_1}$;

II) при параллельном переносе, переводящем точку A_1 в точку A_2 , а точку B_1 – в точку $B'_1 \in \overrightarrow{A_2B_2}$, точка A_2 оказывается лежащей между точками B'_1 и B_2 : $\overrightarrow{A_2B'_1B_2}$.

В заключение этого параграфа отметим, что отношения \parallel и $\uparrow\uparrow$ являются отношениями эквивалентности, а отношение $\uparrow\downarrow$ антирефлексивно, симметрично, антитранзитивно и не обладает какими-либо еще существенно интересными свойствами.

3. Свободный вектор

Мы переходим к изложению основного в теории геометрических векторов понятия свободного вектора. Основные теоретические предпосылки для его введения уже были заложены нами в п. 2. Введем такое определение.

Определение 6. Связанный вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$ назовем конгруэнтным связанному вектору $\overrightarrow{A_1B_1}$, если существует параллельный перенос $\Gamma_{\parallel} : \overrightarrow{A_1B_1} \rightarrow \overrightarrow{A_2B_2}$. Условимся факт конгруэнтности связанного вектора $\overrightarrow{A_2B_2}$ связанному вектору $\overrightarrow{A_1B_1}$ обозначать так: $\overrightarrow{A_2B_2} \cong \overrightarrow{A_1B_1}$.

Мы не останавливаемся здесь на доказательстве того, что отношение \cong является отношением эквивалентности.

Определение 7. Класс эквивалентности по отношению \cong называется свободным вектором. Свободный вектор, порожденный классом эквивалентности, которому принадлежит связанный вектор \overrightarrow{AB} , условимся обозначать через $s1(\overrightarrow{AB})$.

Разберем далее все те же понятия, что мы разбирали в предыдущем абзаце при обсуждении понятия связанного вектора. Разберем, прежде всего, понятие параллельности. Если какой-либо из связанных векторов класса $s1(\overrightarrow{AB})$ окажется параллельным прямой l , то вследствие симметричности и транзитивности бинарного отношения параллельности прямых и всякий другой вектор из класса $s1(\overrightarrow{AB})$ окажется параллельным прямой l . Поэтому приводимое ниже определение 8 корректно и представляется целесообразным.

Определение 8. Свободный вектор $\vec{a} = c1(\overrightarrow{AB})$ называется параллельным прямой l , если $AB \parallel l$ (т.е. если прямая AB параллельна прямой l).

Аналогично вводится определение свободного вектора, параллельного плоскости. Корректность такого определения следует из того факта, что если одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости, то и другая параллельна той же плоскости (см. [12], §98, теорема 194).

Определение 9. Свободный вектор $a = c1(\overrightarrow{AB})$ называется параллельным плоскости α , если $AB \parallel \alpha$ (т.е. если прямая AB параллельна прямой l).

Перейдем теперь к “коллективным” (т.е. затрагивающим несколько свободных векторов сразу) свойствам свободных векторов. Уже обсуждавшиеся свойства симметричности и транзитивности отношения параллельности прямых гарантируют корректность такого определения коллинеарности свободных векторов.

Определение 10. Свободные векторы $a_u = c1(\overrightarrow{A_u B_u})$, $u \in U$ называются коллинеарными, если существует прямая l такая, что $A_u B_u \parallel l$ для любого $u \in U$.

Мы не станем приводить здесь строгую формулировку сонаправленности и антинаправленности свободных векторов, предоставляя их читателю.

Библиографический список

1. Виноградов И.М. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1986.
2. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1966.
3. Садовничий Ю.В., Федорчук В.В. Аналитическая геометрия. Экзамен, 2009.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2004.
5. Федотов А.Г., Карпов Б.В. Аналитическая геометрия. М.: МГИЭМ, 2005.
6. Казимиров Н.И. Введение в аксиоматическую теорию множеств, Петрозаводск, 2000.
7. Верещагин Н.К., Шень А. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2012.
8. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
9. Мухелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. М.: Высшая школа, 1967.
10. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. М.: Наука, 1968.
11. Костин В.И. Основания геометрии. М.: Учпедгиз, 1948.
12. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии. М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1965. Ч. II.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ ИСТОЧНИКОВ СВЕТА В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

USE OF COHERENT LIGHT SOURCES IN INFORMATION TECHNOLOGIES

А.У. Умбетов

A.U. Umbetov

Лазер, цифровая технология, аэрофотосъемка, воздушное сканирование, пинцет, импульс.
В статье рассматривается использование лазеров в цифровых технологиях. Наряду с научными и технологическими применениями лазеры используются в цифровых технологиях для решения специальных задач, причем эти применения широко распространены или находятся в стадии исследований. Наиболее распространенными примерами таких применений являются оптическая цифровая память, оптическая передача информации, лазерные печатающие устройства, кроме того, они применяются в вычислительной технике в качестве различных устройств.

Laser, digital technology, aerial photography, air scanning, tweezers, impulse.
The article discusses the use of lasers in digital technology. Along with scientific and technological applications, lasers are used in digital technologies to solve special tasks, and these applications are widespread or under research. The most common examples of such applications are optical digital memory, optical transmission of information, laser printers, besides, they are used in computing as various devices.

Лазеры являются одним из самых эффективных источников света. Принцип работы лазеров основан на втором типе излучения атомов – принудительном излучении. То есть мы заставляем атомы излучать. При нормальных условиях излучение атомов проходило само по себе, в свободных условиях. Лазерные лучи очень многочисленны, в отличие от обычных световых лучей. Их энергетическая плотность очень высока, их направленность распространяется на большие расстояния, излучающая волна близка к одной длине, т.е. монохромата, при этом в ее волновом наборе можно концентрировать большое количество данных. Области применения лазера в настоящее время очень широки [1, с. 141].

В науке:

- Спектроскопия
- В измерении расстояний до планет
- Фотохимия
- Лазерное охлаждение
- Оптический пинцет

В производстве:

- Лазерная термическая обработка
- Лазерная плавка

- Получение поверхностного тепла
- Лазерная сварка
- Распределение материалов
- Лазерная размерная обработка

В медицине:

- В хирургии
- В предварительной профилактике больных
- Для удаления новообразований в различных отделах организма
- В лечении зубов
- В переплетении зрительного процесса
- В косметической хирургии

В связи и информационных технологиях:

- Хранение данных на оптических носителях
- Оптическая связь
- Оптические компьютеры
- Голография
- Лазерные принтеры

В культуре:

- Лазерные компьютеры и лазерное телевидение
- Лазерные концерты и дискотеки
- Мультимедийные презентации
- Световая иллюминация

В быту:

- Лазерная съемка и видеосъемка
- Проекция изображений на глаза
- Лазерный гироскоп
- Лазерное дистанционное измерение
- Лазерные инструкции

В Вооруженных силах:

- Лазерные инструменты
- Лазерный прицел
- Системы контроля снайперов
- Измерение расстояний
- Лазерный контроль
- Средства лазерной стрельбы

Цифровые технологии основаны на передаче сигналов (данных) в виде непрерывных полос. Полосы будут иметь аналоговые уровни. Все уровни в пределах полосы показывают одинаковый уровень сигнала. Цифровой фильтр состоит в основном из логических элементов AND, OR, NOT и находится в контакте с счетчиками между собой.

Цифровые технологии в основном используются в вычислительной цифровой электронике, компьютерах, различных областях электротехники, робототех-

нике, автоматизации, измерительных приборах, радио- и телекоммуникационных устройствах, игровых автоматах и многих других цифровых устройствах.

Одним из преимуществ цифровой технологии является то, что сигналы передаются без нарушения данных. При передаче данных шум очень мал, поэтому их можно переслать без ошибок. Данные могут быть записаны и сохранены на мини-дисках [2, с. 226].

Цифровые системы, управляемые компьютерами, могут управляться с помощью программного обеспечения путем внедрения дополнительных функций.

Устойчивые к помехам цифровые системы позволяют беспрепятственно хранить и использовать необходимые данные. А в аналогичных системах данные могут устаревать или отключаться.

Можно сказать, что на большинство цифровых технологий при их использовании ушло больше трудозатрат. Это усложняет схемы и не позволяет использовать цифровые системы на малых установках.

Существуют тесные связи между лазерами и цифровыми технологиями. С помощью импульсных лазеров можно расширять и совершенствовать возможности применения цифровых технологий. Одним из них является лазерное сканирование с воздуха и цифровая аэрофотосъемка.

Под лазерным сканированием в воздухе понимается оптико-механическое сканирование поверхности Земли с помощью лазерного луча. Используемый в этом случае лазерный луч посылается с большой частотой. Импульс этого луча отражается от тел земной поверхности, мы его регистрируем и обрабатываем. Расстояние до источников излучения, их координаты и порядок расположения можно определить с большой точностью. В результате удается решить следующие задачи на высоком уровне.

- Количественную модель строения фрагмента земной поверхности.
- Топографические карты малых размеров 1:500 м.
- Трехмерную модель местности.
- Исследование объектов электростроительного хозяйства.
- Обследование объектов транспортной инфраструктуры.

Современные широкоформатные аэрофотокамеры позволяют получать аэрофотоснимки с разрешением от 3 до 5 см, что позволяет производить съемки с помощью аэрофотокамер в трех спектральных интервалах (панхроматический, цветной и инфракрасный). И у них будет три объектива с разным фокусным расстоянием. То есть мы можем проводить фотосъемку на разных высотах. Большой размер изображения уменьшает время съемки.

Направленность применения лазерных сканеров следующая:

- Инвентаризация земельных участков.
- Создание старины больших территорий, в том числе городов.
- Проведение аэрофотосъемки сельскохозяйственных земель и лесов.
- Экологический мониторинг.
- Контроль опасных зон.
- Мониторинг аварийных ситуаций.

В настоящее время цифровые технологии позволяют реализовать различные типы базисов. Запись данных осуществляется путем гравирования, лазерного воздействия, экспонирования, экспонирования с помощью УФ-ламп и переноса тепла [3, с. 176].

Гравирование проводится на толстостенных пластинах. В результате записываются рельефные изображения.

При лазерном взаимодействии данные записываются тонким слоем на приемных пластинах.

При экспонировании УФ-лампами излучение модулируется в соответствии с числовыми данными, относящимися к изображениям. Этот метод используется для нанесения печатных форм на тип пластин в виде монометаллов.

Теплотранспорт реализует возможности тереографического метода, который также использует помощь лазерного луча и используется для создания офсетных типов.

Одним из примеров лазерных лучей и цифровых систем являются оптические пинцеты. С помощью этого средства можно исследовать свойства многих микрочастиц, набрав нужное. Открытие состоялось в 1976 г. американским ученым Артуром Эшкиным. С помощью лазерного пинцета можно улавливать или перемещать отдельные атомы, вирусы, живые клетки, не нанося им никакого вреда. Мы решаем эту проблему путем фокусировки лазерных лучей и с помощью градиентных сил. Градиентная сила притягивает частицу к частице с высокой интенсивностью электромагнитного поля. Именно с помощью этого метода впервые был реализован процесс получения живой клетки в 1987 г. В настоящее время этот метод используется с целью извлечения вирусов, бактерий, клеток человека, а также отдельных атомов для создания наноразмерных систем. За эту новизну Э. Эшкин был удостоен Нобелевской премии 2018 г.

Чем короче импульс лазерного луча и больше мощность, тем больше его возможности. Такой же лазер был получен в 1985 г. Очень важные системы на основе таких лазеров находят свое применение в электронике и нескольких лабораторных установках. При этом круг его применения с каждым днем увеличивается. Например, ошибки зрения можно устранить методом фемтосекундного лазера. Благодаря небольшому времени импульса и обилию его мощности, мы можем эффективно уничтожить нужную клетку, не оказывая влияния на другие клетки за меньшее время. За эти открытия французский ученый Жерар Мур и канадский ученый Дона Стикланд стали лауреатами Нобелевской премии по физике 2018 г.

Эти нововведения, связанные с лазером, привели к развитию электроники с очень высокими возможностями. В то же время возможности цифровых технологий на основе этой связи дают возможность в будущем получать удивительные открытия.

В заключение рассмотрим работу поляризационного интерферометра с источником когерентного излучения для измерения малых угловых перемещений объекта (рис. 1).

Работа устройства заключается в следующем. Световой пучок от источника поляризованного излучения I после расширения и формирования в параллельный пучок с помощью коллиматора (2), состоящего из микрообъектива и длиннофокусного объектива в фокусном положении, разделяется светоделителем 3 на два пучка одинаковой интенсивности, один из которых направляется на плоское зеркало 4, установленное на объекте, и, отражаясь, падает на БП 5, а другой пучок, пройдя через светоделитель 2, также падает на БП 5, причем оба пучка падают нормально на входные грани БП. Каждый из пучков, падающих на выходные грани БП, разделяется на два пучка ортогональной поляризации: обыкновенный (o) и необыкновенный (e).

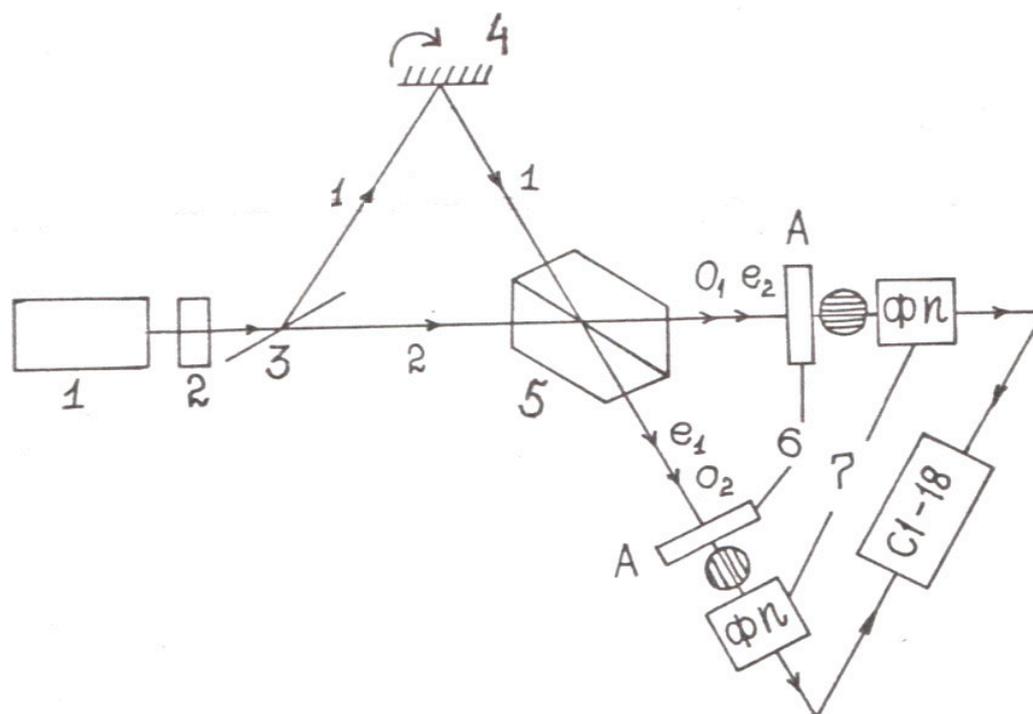


Рис. 1. Поляризационный интерферометр для измерения малых угловых перемещений объекта

БП выполнен так, что главные оси в обеих призмах Дове параллельны между собой, лежат в плоскости, перпендикулярной боковым граням и основаниям БП, и составляют угол 45° с основаниями призм Дове. Это создает удобства при работе с лазерными источниками, у которых излучение поляризовано в вертикальной плоскости, то есть падающий на БП световой луч имеет колебания электрического вектора параллельно ребру БП. Таким образом, создается условие формирования o- и e-пучков равной интенсивности, необходимое для получения интерференционной картины с максимальной контрастностью. Обыкновенные лучи (o_1 , o_2) выходят из БП, претерпев полное внутреннее отражение на склеенных основаниях призм Дове. Склейка выполнена тонким слоем канадского бальзама, так как канадский бальзам имеет промежуточный показатель преломления:

$$n_e < n_{к.б} < n_0.$$

Необыкновенные лучи (e_1, e_2) проходят из БП, претерпевая отклонения. На выходе БП между лучами $o_1 e_2$ и $e_1 o_2$ в двух измерительных каналах необходимо осуществить фотосмещение. Для этой цели в оба плеча интерферометра вводятся анализаторы 5, ориентированные перпендикулярно ребру БП, фотоприемники 6 регистрируют сигналы в сбоях каналов. При любом незначительном повороте плоского зеркала 4 получается взаимное смещение интерференционных полос в обоих плечах поляризационного интерферометра. Разностный сигнал, регистрируемый с фотоприемников 7, является мерой углового перемещения плоского зеркала 4, установленного на объекте.

Чувствительность предложенного устройства можно характеризовать с помощью выражения (18). Предварительные испытания макета интерферометра показали, что для интервала измеряемых углов $\alpha = \pm 70^\circ$ достигается точность измерений порядка угловой секунды. При повышении требований к виброустойчивости измерение смещений интерференционной картины может быть выполнено с точностью 1/10 полосы, что эквивалентно угловому перемещению объекта порядка десятой доли угловой секунды.

В результате исследования можно сделать следующие выводы:

- 1) использование источников когерентного излучения расширяет возможности информационных систем при проведении измерений;
- 2) повышает точность измерения малых угловых и линейных перемещений объектов;
- 3) упрощает конструкцию интерферометров.

Библиографический список

1. Шандыбина Г.Д. Информационные лазерные технологии. М.: Наука, 2018.
2. Партыка Т.Л. Периферийные устройства вычислительной техники. М.: ИНФРА, 2007.
3. Дмитриева В.Ф. Физики для профессий и специальностей технологического профиля. М.: Академия, 2013.

**СИСТЕМЫ
ДИНАМИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ,
КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ И ГРАФИКИ
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ
СТУДЕНТОВ И ШКОЛЬНИКОВ**

О ЦИФРОВОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ В 9 КЛАССЕ

ABOUT THE DIGITAL APPROACH TO LEARNING MOVEMENT IN GRADE 9

А.А. Алексашов

A.A. Alexashov

Среда Живая математика, движения.

В работе представлен исследовательский подход к изучению в 9 классе темы «Движения» с использованием динамической среды Живая математика.

The Geometer's Sketchpad, movements.

The paper presents a research approach to the study of the “Movement” theory in grade 9 using the dynamic environment of the Geometer's Sketchpad.

С понятием движения учащиеся знакомятся в 7 классе при доказательстве теорем о равенстве треугольников и фигур. Равенство фигур определяется с помощью наложения. Наложение – это отображение плоскости на себя. В 9 классе теме «Движения» отводится 8 часов. За это время предстоит изучить понятие движения, параллельный перенос и поворот [1]. Существенно повысить понимание учащимися предмета изучения помогает среда динамической геометрии Живая математика [2]. Отметим преимущества ее использования при изучении темы «Движения».

Во-первых, это наличие встроенных в систему инструментов, позволяющих создавать с помощью компьютерной анимации динамические модели, визуализирующие большой класс геометрических преобразований плоскости, а именно, поворот, параллельный перенос, осевая симметрия.

Во-вторых, любые динамические чертежи, визуализирующие те или иные геометрические преобразования, можно эффективно использовать в качестве виртуальных моделей для их изучения, проведения компьютерных экспериментов и исследований, что способствует формированию исследовательских компетенций учащихся.

Продемонстрируем применение Живой математики на уроке изучения понятия движения. На занятии в распоряжении учителя кроме маркерной доски должен находиться персональный компьютер с компьютерной средой Живая математика. Все, что связано с аналитическими выкладками, выводом формул и формулировкой условий задач, оформляется заранее на свободных листах Живой математики. Все чертежи, имеющие в первую очередь динамический характер, выполняются преимущественно в режиме реального времени в Живой математике, что позволяет продемонстрировать учащимся преимущества и возможности этой среды при изучении геометрических преобразований.

Отображение плоскости на себя рассматривается на примере осевой симметрии. На рабочем поле чертежа (рис. 1) изображается прямая a – ось симметрии и выбирается произвольная точка плоскости M , не лежащая на прямой a . Построим симметричную ей точку M' относительно прямой a . Для этого нужно провести перпендикуляр MP к прямой a и отложить на прямой MP отрезок PM' , равный отрезку PM . Точка M' и будет искомой.

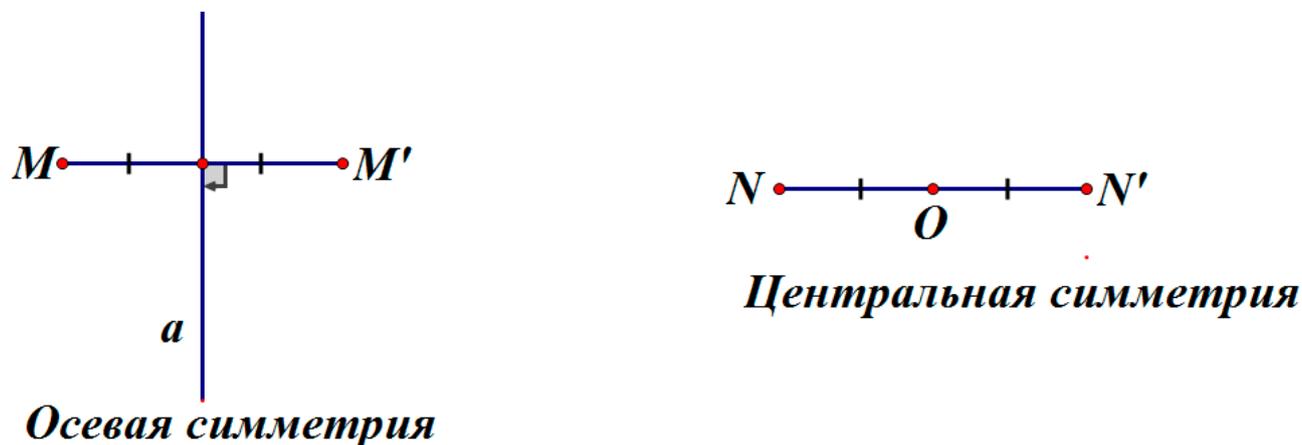


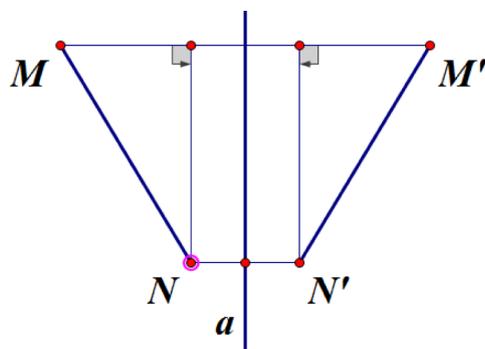
Рис. 1. Отображение плоскости на себя

Мы видим, что с помощью осевой симметрии каждой точке M плоскости сопоставляется точка M' этой же плоскости. И наоборот, каждой точке M' сопоставляется некоторая точка M . Итак, осевая симметрия представляет собой отображение плоскости на себя.

Для исследования свойств осевой симметрии учитель выбирает на рабочем поле Живой математики две произвольные точки M и N и строит симметричные им относительно прямой a точки M' и N' (рис. 2). Приглашает к компьютеру одного из учеников и предлагает измерить расстояние между выбранными и симметричными им точками. Измерение делается с помощью имеющегося в среде Живая математика инструмента «Измерение-Расстояние». Результаты оформляются в виде таблицы. Приглашается к компьютеру следующий ученик. Он изменяет положение точек M и N , производит новые измерения расстояния между точками. Результаты заносят в таблицу. Так производится не менее пяти измерений. Затем учитель предлагает проанализировать таблицу и сделать вывод.

Учащиеся делают вывод, что несмотря на изменение положений точек, расстояние между точками при осевой симметрии не меняется. На основании данного вывода выдвигают гипотезу, что осевая симметрия – это отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояние между точками. Чтобы быть уверенным в этом, классу предлагается самостоятельно, или с помощью учебника доказать это утверждение. На этом этапе Живая математика используется для графической визуализации процесса доказательства.

После доказательства гипотезы на экран выводится текст, содержащий определение движения. По итогам эксперимента по изучению первого признака параллелограмма в стиле экспериментальной математики экран компьютера будет иметь вид, представленный на рис. 2. Точно такой же эксперимент проводится для центральной симметрии, делаются соответствующие выводы.



| $M'N'$ | MN |
|---------|---------|
| 3,98 см | 3,98 см |
| 4,86 см | 4,86 см |
| 5,21 см | 5,21 см |
| 6,28 см | 6,28 см |
| 6,10 см | 6,10 см |

Вывод: Расстояние между точками M и N равно расстоянию между симметричными им точками M' и N'

Осевая симметрия

Гипотеза: Осевая симметрия - это отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояние между точками.

Определение: любое отображение, которое сохраняет расстояние между точками, называется движением.

Рис. 2. Вид экрана по результатам компьютерного эксперимента

Таким образом, в результате проведения компьютерного эксперимента с использованием системы динамической геометрии Живая математика учащиеся получают не только возможность самостоятельно сформулировать свойства движения, но и мощную мотивацию для его доказательства.

Библиографический список

1. Атанасян Л.С., Бутусов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014. 383 с.
2. Живая математика 5.0: сборник методических материалов / сост.: Г.А. Аджемян, В.Н. Дубровский и др. М.: ИНТ, 2013. 205 с.

РЕПЕТИТОР ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ЯЗЫКА PYTHON

TUTOR FOR APPLICANTS TO LEARN THE PYTHON PROGRAMMING LANGUAGE

И.В. Артемьев

I.V. Artemev

Программирование, репетитор, онлайн-образование, дистанционное обучение, перевернутый учебник, визуализатор, интерпретатор.

Рассматривается создание электронного учебного ресурса для обучения основам языка Python. Ресурс предоставляет ученику краткую теорию и генерирует задачи, учитывая уровень знаний. Для написания программ на сайте встроен интерпретатор и визуализатор для более глубокого понимания задачи. Использование данного ресурса при подготовке к ЕГЭ позволит ученику самостоятельно освоить язык Python, который может использоваться также и в математическом образовании.

Programming, tutor, online education, distance learning, inverted textbook, visualizer, interpreter.

We consider the creation of an electronic learning resource for teaching the basics of the Python language. The resource provides the student with a brief theory and generates tasks based on the student's level of knowledge. For writing programs, the site has a built-in interpreter and visualizer for a deeper understanding of the problem. Using this resource in preparation for the unified state exam will allow the student to independently master the python language, which can also be used in mathematical education.

Экосистема языка Python стремительно развивается. Это уже не просто язык общего назначения. С его помощью можно успешно разрабатывать веб-приложения, системные утилиты и много другое.

Python имеет большое количество библиотек и легко расширяем. Благодаря этому Python может заменить большое количество математических пакетов – MATLAB, Maple, Mathcad, Mathematica [1]. Python позволяет оптимизировать работу, ускорить вычисления, автоматизировать загрузку и выгрузку данных. Язык широко используется при работе с нейронными сетями и при обучении математике.

Для успешного применения языка Python необходимо знать его основы. Его использование далеко не всегда обсуждается в школьном курсе, и чаще всего ученикам приходится самостоятельно изучать данный язык для сдачи ЕГЭ по информатике.

В том числе в связи с пандемией нового вируса большинство организаций были вынуждены перейти на дистанционную форму обучения. Разумеется, это отразилось на формах, методах, средствах обучения. Качество дистанционного обучения школ показало, что разработка новых обучающих ресурсов актуальна и требует внимания. Повышение качества самообразовательной учебной деятельности обучаемых с использованием электронных ресурсов в настоящее время является чрезвычайно актуальной темой.

Цель работы – создание обучающего электронного ресурса для подготовки обучающегося к ЕГЭ по информатике по теме «Программирование». На ресур-

се будет предоставлена необходимая теория по теме. Ресурс будет автоматически генерировать задачи для ученика, учитывая уровень его знаний. Процесс самообучения будет визуализирован, и ученик сможет проследить динамику изменений своих навыков. Для более глубокого понимания темы, при проверке задач, ученику будет предоставлен визуализатор, показывающий схему решения задачи. Способ визуализированного самоконтроля учебного процесса, открытое тестирование и визуализация решения позволит существенно повысить эффективность самообразовательной деятельности ученика.

Каждая из задач, рассматриваемых в рамках курса, была разбита на базовые составляющие – умения. Каждое умение оценивается числовым значением от 0 до 100. Числовое значение увеличивается по мере изучения теории и после успешного решения задач. При неверном решении задач, а также и в том случае, если задачи с подобным навыком давно не выполнялись, оценка уменьшается.

В начале доступно ограниченное число умений. Новые умения открываются по мере изучения теории и после закрепления более простых умений.

Подобная система позволяет постепенно увеличивать сложность задач, а также вовремя повторять материал. Большинство умений встречаются сразу в нескольких задачах, благодаря этому ученику не обязательно решать один и тот же тип заданий.

К примеру, задание 17 типа из ЕГЭ по информатике можно разбить на следующие составляющие:

- 1) Умение делать проверку делимости чисел.
- 2) Умение делать проверку делимости чисел в различных системах счисления.
- 3) Умение находить количество чисел.
- 4) Умение находить произведение чисел.
- 5) Умение находить среднее значение чисел.
- 6) Умение находить произведение чисел.
- 7) Умение находить максимальное значение.
- 8) Умение находить минимальное значение.

Рассматривается множество целых чисел, принадлежащих числовому отрезку [150; 250], которые делятся на 3 и не делятся на 17. Найдите количество таких чисел и минимальное из них. В ответе запишите два целых числа без пробелов и других дополнительных символов: сначала количество, затем минимальное число.

Python 3.6

```

1 a=150
2 b=250
3 k=0
4 min=251
5 for i in range(a,b+1):
6     if i%3==0 and i%17!=0:
7         k+=1
8         if i < min:
9             min = i
→ 10 print(k, min)
                    
```

→ строка, которая только что была выполнена
→ следующая строка для выполнения

Щелкните строку кода, чтобы установить точку останова; используйте кнопки Назад и вперед, чтобы перейти туда.

программа завершилась

Вывод на печать (перетащите нижний правый угол, чтобы изменить размер)

32 150

Global frame

| | |
|-----|-----|
| a | 150 |
| b | 250 |
| k | 32 |
| min | 150 |
| i | 250 |

Рис. 1. Интерфейс системы

Еще один важный элемент – это скрытый от пользователя модуль индивидуальных учебных маршрутов, в котором фиксируется протокол работы ученика с учебником.

Для повышения качественных характеристик учебника в него будут заложены элементы искусственного интеллекта, психолого-педагогические закономерности, принципы перевернутого учебника [2] и прочие интерфейсные сервисы.

Библиографический список

1. Криволапов С.Я. Практикум по математической статистике. Проверка гипотез с использованием Excel, MatCalc, R и Python. 2019.
2. Пак Н.И., Потупчик Е.Г., Хегай Л.Б. Концепция трансформационных и перевернутых электронных учебников // Вестник РУДН. Сер. Информатизация образования. 2020. Т. 17, № 2.

КОМПЬЮТЕРИЗИРОВАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ

COMPUTERIZED DYNAMIC ASSESSMENT OF ALGORITHMIC LEARNING ACTIVITY OF HIGHER CLASS STUDENTS

С.А. Багачук, А.Е. Чихачёв,
О.О. Шактар

S.A. Bagachuk, A.E. Chikhachev,
O.O. Shaktar,

Динамическое тестирование, алгоритмическая деятельность, адаптация, обучаемость, оценочная обратная связь, подкрепление, уровни самостоятельности.

Рассматриваются результаты динамического адаптивного тестирования алгоритмической учебной деятельности старшеклассников средних школ г. Красноярска, участвующих в работе физико-математической школы «Галилео». Содержательно диагностировалась алгоритмическая деятельность по решению задач на знание алгоритма преобразования графиков функций. Получены статусные и процессуальные характеристики учебной деятельности учащихся.

Dynamic testing, algorithmic activity, adaptation, learning, evaluative feedback, reinforcement, levels of independence.

The results of dynamic adaptive testing of algorithmic learning activity of senior pupils of secondary schools in Krasnoyarsk, participating in the work of the physics and mathematics school “Galileo”, are considered. The algorithmic activity of solving problems on the knowledge of the algorithm for transforming function graphs was substantively diagnosed. The status and procedural characteristics of the educational activity of students were obtained.

В процессе решения задач по некоторому алгоритму всегда имеется: 1) само предписание, состоящее из указаний о выполнении над определенными объектами определенных действий или операций; 2) некоторая система-исполнитель (человек или машина), к которой эти указания адресованы и которая их выполняет, осуществляя над этими объектами определенные операции; 3) объекты, на которые направлены операции и которые под воздействием этих операций преобразуются. Решение любой задачи состоит, в конечном счете, в преобразовании некоторого объекта или объектов из одних (исходных) состояний в другие (конечные состояния).

Предписания алгоритмического типа, апеллируя к содержательным, семантическим операциям, требуют осуществления специфически человеческих способов действий, включающих в себя осознание объектов действий и операций, выполняемых над этими объектами. Именно поэтому обучение учащихся дей-

ствиям на основе предписаний алгоритмического типа может служить средством формирования сознательной деятельности и овладения специфически человеческими способами мышления. В этом состоит большое значение предписаний алгоритмического типа для педагогики и психологии [1].

В предлагаемой работе приведены результаты динамической оценки алгоритмической деятельности учащихся средних школ г. Красноярска, участвующих в работе физико-математической школы «Галилео» при решении задач по преобразованию графиков квадратичной функции.

Динамическая оценка впервые была введена Л.С. Выготским [2; 3]. Динамическая оценка совмещает тестирование с обучением. Главную роль при этом играет посредник (медиатор) [4]. Посредник, взаимодействуя с испытуемым, помогает или содействует испытуемому в выполнении заданий теста. Цель динамической оценки – диагностика обучаемости или процессуальных характеристик учебной деятельности в условиях взаимодействия испытуемого с посредником. Для организации компьютерной динамической оценки использовался метод «сэндвича» [5; 6], который реализует схему:

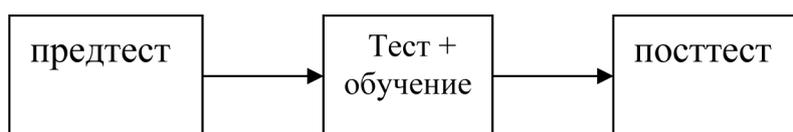


Рис. 1. Схема организации динамической оценки учебной деятельности

Первый этап динамической оценки, так называемый «предтест», диагностирует обученность испытуемого алгоритму решения задач, предлагаемых испытуемому. По завершении «предтеста» определяется объем внешней помощи, в которой нуждается испытуемый при переходе во второй этап «Тест+обучение». В течение второго этапа испытуемый, используя внешнюю помощь в виде подкреплений, может перейти на 10 уровень самостоятельности, отвечающей автономной учебной деятельности. Объем внешней помощи при автономной учебной деятельности равен нулю. После достижения автономной учебной деятельности испытуемый переходит к третьему этапу динамической оценки «посттесту» [6]. На этапе «посттеста» испытуемый должен подтвердить автономный характер учебной деятельности.

Несмотря на то, что конечной целью динамического тестирования является достижение автономной учебной деятельности, испытуемый может прекратить процедуру динамической оценки при любом уровне самостоятельности. На первом уровне самостоятельности обучающийся получает подкрепление каждого действия в виде датчика «расстояние до цели» (рис. 2). Относительная частота подкреплений уменьшается с увеличением номера уровня самостоятельности [7; 8]. При достижении 10 уровня самостоятельности (или сложности) относительная частота подкреплений равна 0, и деятельность становится автономной. Сложность проблемной среды [7] характеризуется неопределенностью, которая возрастает по мере перехода к автономной учебной деятельности.

Компьютеризированная динамическая оценка алгоритмической деятельности проводилась на основе динамического компьютерного теста-тренажера «Преобразование графика квадратичной функции» (рис. 2).

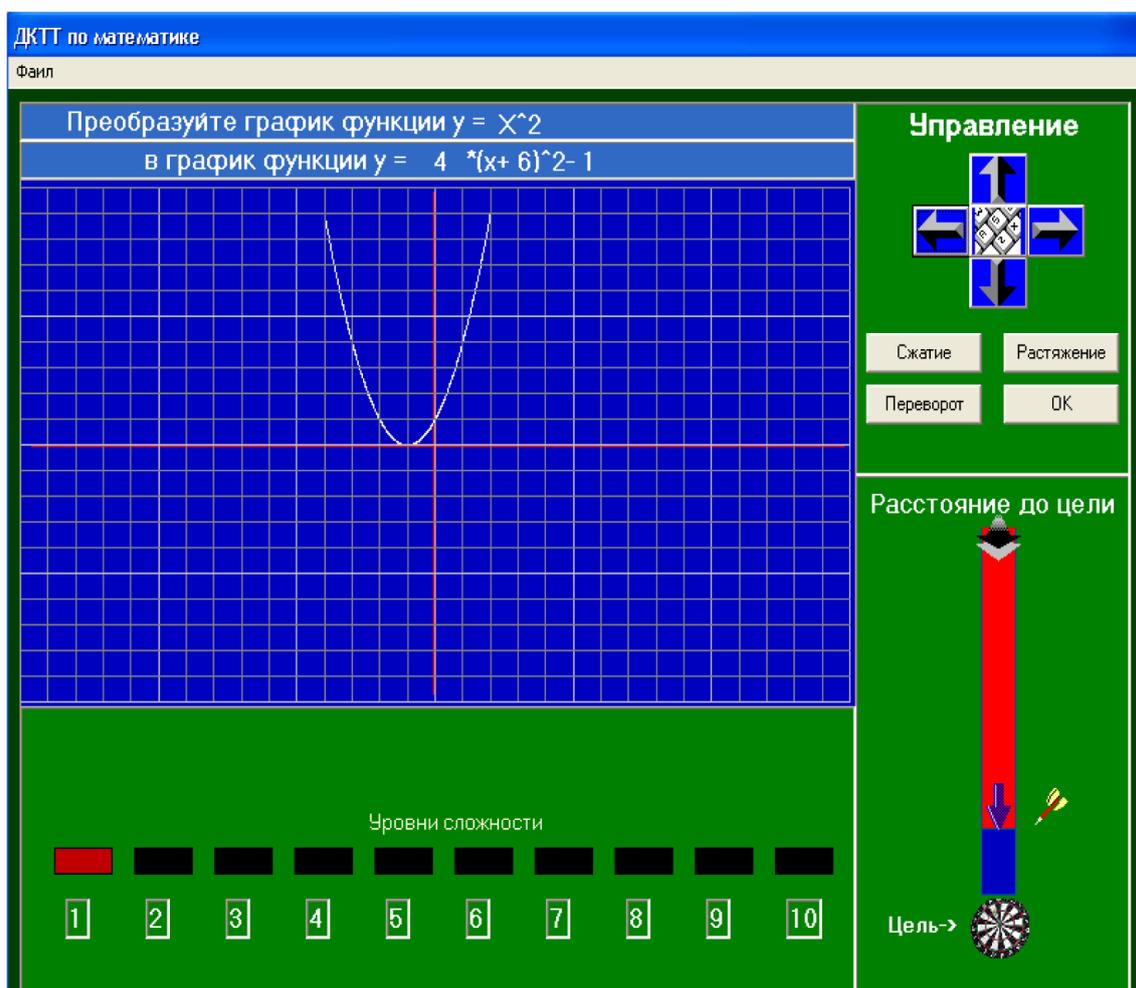


Рис. 2. Интерфейс динамического компьютерного теста-тренажера «Преобразование графика квадратичной функции»

В эксперименте было зарегистрировано 160 учащихся старших 9, 10 и 11 классов средних школ г. Красноярск, участвующих в работе городской физико-математической школы «Галилео». Предполагается, что участники динамического тестирования – это школьники, имеющие способности к математической деятельности. Поскольку тестирование проходило в апреле, то учащиеся 9 классов, которых было большинство среди испытуемых, сравнительно недавно изучали тему «Преобразование квадратичной функции». Учащихся 10 и 11 классов было не более 20 %. Поэтому динамическая оценка основывалась на их остаточных знаниях об этом учебном материале.

Предтест включал задачу по преобразованию графика квадратичной функции. Задания индивидуальные и должны выполняться без вмешательства извне, то есть без подкреплений деятельности по поиску решения. Результат прохождения предтеста представлен на рис. 3.

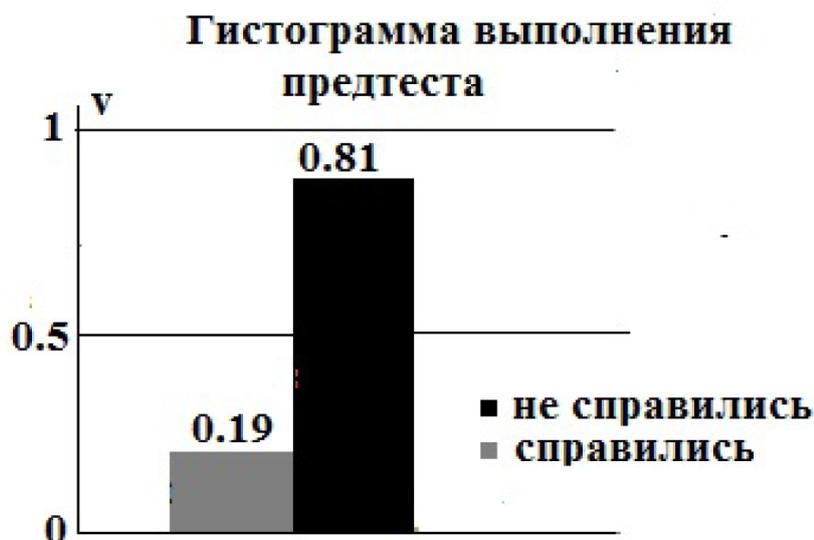


Рис. 3

Испытуемые, не прошедшие предтеста, при переходе к этапу совмещения тестирования с обучением начнут его с 1-го уровня самостоятельности. На 1 уровне подкрепляется каждое действие. Учащиеся, справившиеся с предтестом, перейдут на уровень самостоятельности, определяемый долей неправильных действий. Чем меньше доля неправильных действий, тем больше номер уровня самостоятельности испытуемого. Как видно из рис. 3, предтест прошли только 20 % испытуемых.

После предтеста испытуемые перешли к основному этапу динамической оценки, совмещающего тестирование и обучение с подкреплением. По завершении этого этапа 45 % испытуемых достигли 10-го уровня самостоятельности учебной деятельности и прошли посттест, подтвердив автономность своей алгоритмической деятельности по преобразованию графика квадратичной функции. В то же время 55 % испытуемых не достигли автономного режима учебной деятельности, так как не смогли продуктивно использовать подкрепления [9].

Авторы благодарят за консультацию и помощь в написании доклада научного руководителя доктора педагогических наук, профессора кафедры математики и методики обучения математике КГПУ им. В.П. Астафьева Дьячука Павла Петровича.

Библиографический список

1. Ланда Л.Н. Алгоритмизация в обучении. М.: Просвещение, 2012. 488 с.
2. Vygotsky L.S. Mind in society. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1978.
3. Wu H.M., Kuo B.C., & Wang S.C. Computerized Dynamic Adaptive Tests with Immediately Individualized Feedback for Primary School Mathematics Learning // Educational Technology & Society. 2017. 20(1). P. 61–72.
4. Gabelica C., Van Den Bossche P., Segers M., & Gijssels W. Feedback, a powerful lever in teams: A Review // Educational Research Review. 2012. 7(2). P. 123–144. DOI:10.1016/j.edurev.2011.11.003

5. Haywood C.H., & Lidz C.S. Dynamic assessment in practice: Clinical and educational applications. New York, NY: Cambridge University Press, 2007.
6. Stevenson C.E., Heiser W.J., & Resing W.C.M. Dynamic testing: Assessing cognitive potential of children with culturally diverse backgrounds. // Learning and Individual Differences. 2016. 47. P. 27–36. URL: <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.12.025>
7. Дьячук П.П., Лариков Е.В., Дьячук П.П.мл. Динамика процесса обучения решению алгоритмических задач // Научный ежегодник КГПУ: сборник статей / отв. ред. Н.И. Дроздов. Красноярск, 2002. С. 6–13.
8. Дьячук П.П., Суровцев В.М. Компьютерные системы автоматического регулирования учебных действий // Информатика и образование. 2010. № 4. С. 115–118.
9. Дьячук П.П., Суровцев В.М. Учебная деятельность как информационный процесс развития обучающегося // Информатика и образование. 2008. № 1. С. 123–124.

СПОСОБЫ СОЗДАНИЯ AR-МОДЕЛЕЙ В ПРОГРАММЕ GEOGEBRA

METHODS FOR CREATING AR MODELS IN GEOGEBRA

О.Л. Безумова, Е.В. Зацепина

O.L. Bezumova, E.V. Zatsepina

GeoGebra, дополненная реальность, AR-модель, функция двух переменных, функция поверхности, каркас.

В статье описаны способы построения AR-моделей в интерактивной геометрической среде GeoGebra: использование готовых инструментов, использование функции двух переменных, использование функции поверхности, построение с помощью каркаса.

GeoGebra, augmented reality, AR model, two-variable function, surface function, wireframe.

The article describes ways to build AR models in the interactive geometric environment GeoGebra: using ready-made tools, using a function of two variables, using the surface function, and a wireframe.

Одним из перспективных направлений в настоящее время является развитие информационных технологий, среди которых выделяется технология Augmented reality (AR), или технология дополненной реальности. За последние несколько лет эта она совершила огромный скачок в развитии и расширении сфер ее применения.

В настоящее время технология дополненной реальности определяется как «... технология наложения информации в форме текста, графики, аудио и других виртуальных объектов на реальные объекты в режиме реального времени» [4].

Возможность создания и воспроизведение AR-моделей предоставили пользователям в 2017 г. разработчики системы динамической математики GeoGebra. Более 400 моделей реальных объектов можно найти на сайте GeoGebra 3D Calculator (<https://www.geogebra.org/3d>). Одним из активных популяризаторов AR-моделирования в GeoGebra является Тим Бжезинский, который не только размещает готовые модели и видеоролики к ним, но и описывает процесс их создания в GeoGebra 3D Calculator.

Проведя анализ возможностей GeoGebra и разработанных моделей, можно выделить несколько способов построения AR-моделей в ИГС GeoGebra.

Первый способ – разработка модели с помощью готовых инструментов. Для создания модели используются готовые инструменты программы GeoGebra, например, конус, куб, пирамида и др.

В качестве примера рассмотрим процесс построения шляпы данным способом. Сама шляпа состоит из двух элементов: тульи (часть, покрывающая голову) и поля (выступающая за края тульи полоса материала для защиты лица, плеч, шеи от солнца, ветра и атмосферных осадков). Тулья шляпы (верхняя часть) строится с помощью инструмента «Конус» (рис. 1). Параметры задаются с помощью ползунков.

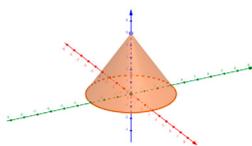


Рис. 1. Построение тульи шляпы

Для построения полей необходимо поделить окружность, которая лежит в основании, на максимальное количество равных частей. Деление окружности удобнее производить с помощью инструмента «биссектриса угла» (рис. 2). В результате получаем точки на окружности, которые находятся на одинаковом расстоянии друг от друга.

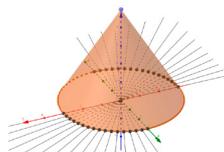


Рис. 2. Построение биссектрис для деления окружности

Строим теперь окружность, ограничивающую поля (рис. 3).

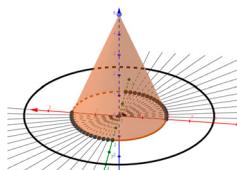


Рис. 3. Построение окружности, ограничивающей поля шляпы

Аналогично делим вторую окружность, проставив точки пересечения уже проведенных ранее биссектрис и построенной только что окружности.

С помощью инструмента «Многоугольник» заполняем одну из четвертей полей шляпы (рис. 4).

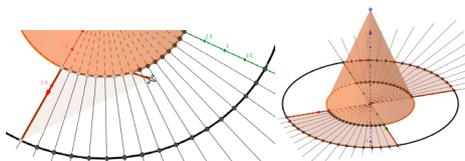


Рис. 4. Построение полей инструментом «Многоугольник»

После того, как две четверти полей уже готовы, можно их отразить с помощью функции «отражение». Отражение будем производить относительно дополнительно построенной плоскости (рис. 5).

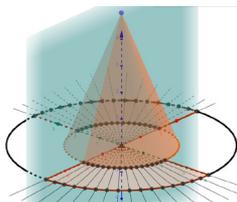


Рис. 5. Построение дополнительной плоскости

В результате получается вот такая шляпа (рис. 6). В настройках необходимо теперь настроить цвет и «спрятать» контур у полей.

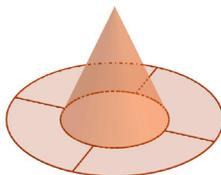


Рис. 6. Построенная шляпа



Рис. 7. Итоговый вариант шляпы в цвете

Второй способ – использование функции двух переменных.

Этот способ заключается в задании некоторой функции двух переменных, график которой может напоминать какую-либо реальную вещь. Для примера приведем модель чипсов Pringles, созданную Tim Brzezinski [2]. Здесь за основу взята поверхность второго порядка гиперболический параболоид (рис. 8):

$$a(x, y) = if \left(\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} \leq 2, \frac{x^2}{22} - \frac{y^2}{13} + 2 \right).$$

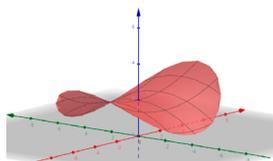


Рис. 8. Гиперболический параболоид

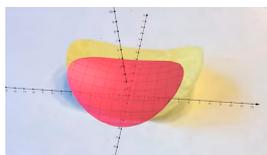


Рис. 9. AR-модель Pringles

Сложность данного метода заключается в том, что необходимо экспериментальным путем подбирать функцию для построения модели или ее части.

Третий способ – использование функции поверхности.

В программе GeoGebra имеется множество различных функций, и одна из них – функция заполнения поверхностью путем вращения Surface, которая зависима от трех параметров: линия, которая будет вращаться, ползунка и оси вращения. Ниже приведен пример построения модели пирамидки с помощью данной функции.

Для построения пирамидки понадобится ее фотография. Фотографию загружаем в полотно 2D. Пирамидка представляет собой тело вращения, поэтому ее удобнее всего строить с использованием данной функции Surface. Для этого необходимо построить ломанную, проставив на картинке точки, на основе которых будет она построена. Чем больше точек, тем близка будет форма пирамидки к естественной. Все построенные точки можно уже увидеть на полотне 3D (рис. 10).

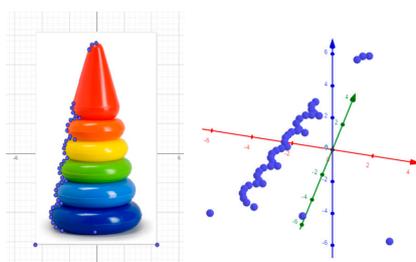


Рис. 10. Построение точек по картинке

Следующим этапом является построение линий. Сама пирамидка состоит из шести частей. Поэтому лучше соединить точки не одной линией, а шестью. Это позволит сделать пирамидку разноцветной. Для построения линии используется функция Polyline, в параметры которой входят все точки (рис. 11).

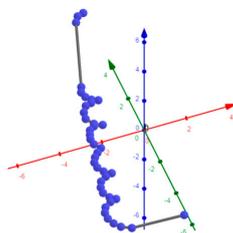


Рис. 11. Построение линий

После того, как линии построены, можно приступать к построению «колец» пирамидки при помощи построения поверхности. Как уже говорилось ранее, для этого используется функция Surface, в которую в качестве параметров входит линия, ползунок (он служит для регулировки области заполнения), ось вращения (например, $\text{Surface}(a, f, y\text{Axis})$, где a – линия, f – ползунок, y – ось). Заполнение производилось относительно оси Oy (на рис. 12 она изображена зеленым цветом). Заполняются таким образом все 6 частей пирамидки. Затем в настройках необходимо изменить цвет каждой поверхности.

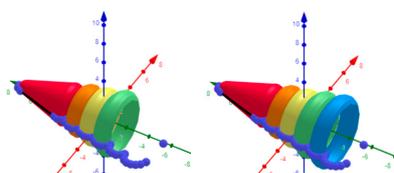


Рис. 12. Построение поверхностей

Последним этапом построения является поворот поверхностей, так как если это не сделать, пирамидка будет «лежачей». Поворот осуществляется относительно оси Ox (на рисунке изображена красным цветом) на угол, равный $\frac{\pi}{2}$, с помощью функции Повернуть (<объект>, <угол>, <ось>). Готовая модель пирамидки изображена на рис. 13.



Рис. 13. Готовая AR-модель пирамидки

Третий способ – построение с помощью каркаса.

При использовании данного способа строится каркас модели. Для того, чтобы раскрыть суть, ниже приведен пример построения шляпы.

Каркас шляпы выполняется с использованием эллипсов, прямых и других фигур. Самый маленький эллипс (рис. 14) предназначен для верхушки тульи, средний – для ее основания, большой – для края полей шляпы. Прямые используются для получения неподвижных точек, количество которых может быть различным. Удобнее разделить четверть поверхности на равные части с помощью инструмента «угол», равный $7,5^\circ$ или $\frac{\pi}{24}$.

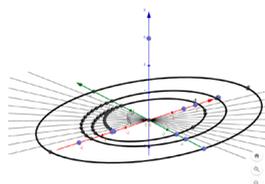


Рис. 14. Построение каркаса шляпы

После построения малый эллипс смещаем на заданный вектор с помощью функции «Перенос» и заполняем зеленым цветом (рис. 15). Вектор определяет «высоту» шляпы.

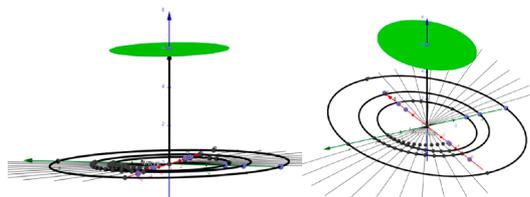


Рис. 15. Перенос эллипса на заданный вектор

Для построения полей шляпы используется поверхность второго порядка – гиперболический параболоид:

$$15y^2 - 3x^2 - 500z = -350$$

Гиперболический параболоид используется по причине того, что программа GeoGebra не позволяет поставить произвольно точку в пространстве. Параметры данной поверхности второго порядка подбираются экспериментальным путем в самой программе GeoGebra. Затем через точки на эллипсах проводятся прямые, перпендикулярные плоскости XU для получения проекций этих точек на поверхности. Полученные точки соединяются с помощью инструмента «Многоугольник» (рис. 16). Достаточно заполнить таким образом одну четверть, а затем с помощью функций отражения относительно оси и относительно плоскостей заполнить оставшиеся части шляпы.

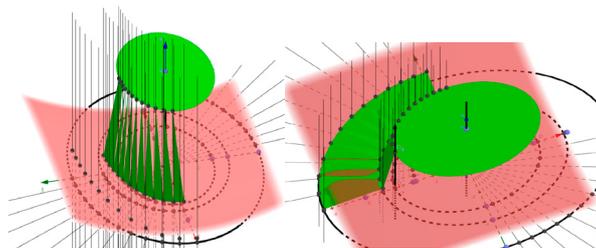


Рис. 16. Построение тульи шляпы

После заполнения оставшихся частей цветом ненужные элементы необходимо «спрятать». Таким образом, с помощью построения каркаса было выполнено построение шляпы в программе GeoGebra (рис. 17).



Рис. 17. Итоговый вариант шляпы

Построение AR-моделей в программе GeoGebra может быть использовано при изучении стереометрии для демонстрации возможностей геометрии в моделировании реальных объектов окружающей действительности; использование технологии дополненной реальности сближает учебную деятельность с областью практических применений полученных в школе знаний.

Библиографический список

1. GeoGebra [Electronic resource]: [official website] / GeoGebra. Electronic text data. Access mode. URL: <https://www.geogebra.org/>, free access (12.10.2020). Title from screen.
2. Tim Brzezinski [Electronic resource]: [official website] / GeoGebra. Electronic text data. Access mode. URL: <https://www.geogebra.org/u/tbrzezinski>, free access (12.10.2020). Title from screen.
3. Прокопов С.А., Соколовский Н.А. Основы и принципы работы технологии дополненной реальности // Информационно-управляющие системы. 2018.
4. Яковлев Б.С., Пустов С.И. История, особенности и перспективы технологии дополненной реальности // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2013. № 3. С. 479–484.

ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ КАК АКТУАЛЬНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБРАЗОВАНИИ

DISTANCE LEARNING AS AN ACTUAL DIRECTION OF APPLICATION OF INFORMATION TECHNOLOGIES IN EDUCATION

О.М. Беличенко, М.Н. Сомова

O.M. Belichenko, M.N. Somova

Информационно-коммуникационные технологии, дистанционное обучение, образовательный процесс, динамическая среда Moodle, интернет-тренажеры, интернет-олимпиады. Описаны дидактические возможности применения дистанционного обучения для организации самостоятельной работы студентов. Выделены основные методические принципы, реализуемые в системе Moodle. Рассмотрены возможности использования Единого портала интернет-тестирования в сфере образования для независимой оценки качества образования.

Information and communication technologies, distance learning, educational process, dynamic Moodle environment, Internet simulators, Internet Olympiads.

The article describes the didactic possibilities of using distance learning to organize independent work of students. The main methodological principles implemented in the Moodle system are highlighted. The possibilities of using a Single portal of Internet testing in the field of education for independent assessment of the quality of education are considered.

Использование в современной российской образовательной системе информационно-коммуникационных технологий способствует повышению качества, эффективности, конкурентоспособности и доступности образования.

К информационно-коммуникационным образовательным технологиям относятся: системы дистанционного обучения и тестирования, образовательные порталы, электронные библиотеки, электронные учебно-методические комплексы и др.

Согласно Федеральному закону «Об образовании в Российской Федерации» предусматривается возможность освоения образовательных программ с помощью дистанционных образовательных технологий.

Сегодня почти во всех образовательных системах мира наблюдается тенденция к усилению роли самостоятельной работы. Самостоятельная работа студентов становится основой высшего образования. Для того чтобы самостоятельная учебно-познавательная деятельность была эффективной, необходимо: правильное сочетание объемов аудиторной и самостоятельной работы, обеспечение студентов учебно-методическими материалами, контроль за ходом выполнения самостоятельной работы и своевременная оценка уровня усвоения

материала. Эти условия могут быть реализованы с помощью среды дистанционного обучения [3].

Дистанционное обучение может реализовываться с помощью разных программных средств, но наиболее часто используемой является модульная объектно-ориентированная динамическая среда Moodle. Перечислим основные методические принципы, реализуемые в системе Moodle: конфиденциальность, автоматизация процедур оценивания, возможность многократных повторений изучаемого материала, модульность, динамичность доступа к информации, наличие постоянно активной справочной системы, возможность самоконтроля, сохранение истории обучения, обеспечение наглядности и многовариантность представления информации [2].

При дистанционном обучении полезно комбинировать обучение, происходящее на расстоянии, но одновременно, например, с применением видеоконференций, с обучением, которое происходит в разное время, удобное для обучающегося.

Кафедрой высшей математики Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева разработаны дистанционные курсы в среде Moodle по всем дисциплинам математического цикла. Авторами был разработан и используется при работе со студентами направления подготовки 39.03.02 «Социальная работа» дистанционный курс по дисциплине «Математика». Статистика учебной деятельности, накопленная и систематизированная для каждого обучающегося, позволяет преподавателю корректировать деятельность и формировать у студентов понимание необходимости систематической работы.

Особо актуальным сейчас стало участие преподавателей и студентов университета в проекте «Интернет-тренажеры в сфере образования», в основу которого положена тренировка обучающихся в процессе решения тестовых заданий в рамках образовательного процесса. Студенты могут пройти тестирование в режимах «Обучение» и «Самоконтроль», преподаватели имеют возможность провести тестирование в режиме «Текущий контроль» по федеральным тестовым материалам, а также воспользоваться модулем «Тест-конструктор» и провести тестирование по тестовым материалам, разработанным самостоятельно [1].

Ежегодное участие одаренных студентов университета в интернет-олимпиадах дает возможность оценить качество подготовки обучающихся на международном уровне.

Использование информационных технологий в образовательном процессе является одним из перспективных направлений развития высшего образования, поскольку позволяет автоматизировать процесс обучения, повысить уровень знаний и качество преподавания, проводить обучение дистанционно. Опыт показывает, что дистанционное обучение является актуальной составляющей информационно-коммуникационных образовательных технологий.

Библиографический список

1. Беличенко О.М., Сомова М.Н. Интернет-технологии как элемент образовательного процесса // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VIII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 13–14 ноября 2019 г.: в 2 ч. [Электронный ресурс] / отв. ред. В.Р. Майер; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2019. Ч. 1. С. 73–74.
2. Иванилова Т.Н., Лутошкина Н.В., Доррер А.Г. Руководство по работе в системе дистанционного обучения Moodle: учебное пособие для преподавателей, студентов высших и средних учебных заведений, слушателей курсов ФПКТ. Изд. второе, доп. и перераб. Красноярск: СибГТУ, 2013. 143 с.
3. Сомова М.Н., Беличенко О.М. Дистанционная среда Moodle как средство обучения математике студентов вуза // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты: материалы VI Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 8–9 ноября 2018 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2018. С. 39–43.

СОСТАВЛЕНИЕ ПОЛИНОМА ЖЕГАЛКИНА МЕТОДОМ ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ В СРЕДЕ GEOGEBRA

COMPILATION OF THE ZHEGALKIN POLYNOMIAL USING THE PASCAL'S TRIANGLE METHOD IN THE GEOGEBRA

Д.В. Бочкарёва

D.V. Bochkareva

Математическая логика, полином Жегалкина, треугольник Паскаля, СДМ GeoGebra, дистанционные технологии.

Статья посвящена такому актуальному вопросу, как использование систем динамической математики (СДМ) в обучении студентов колледжа различным математическим дисциплинам. Цель статьи: показать целесообразность применения СДМ в аудиторной и самостоятельной работе студентов, привести конкретный пример использования СДМ GeoGebra при выполнении задания из курса математической логики.

Mathematical logic, Zhegalkin polynomial, Pascal's triangle, GeoGebra, distance technology.

This article is devoted to such a topical issue as the use of dynamic mathematics systems (SDM) in teaching college students various mathematical disciplines. The purpose of the article: to show the feasibility of using SDM in the classroom and independent work of students, to give a specific example of using SDM GeoGebra when performing tasks from the course of mathematical logic.

Современные реалии могут быть весьма непредсказуемыми. Система образования непосредственно встроена в нашу повседневную жизнь: от детского сада до последних ступеней высшего образования. В настоящее время все люди на планете столкнулись с неизбежными изменениями во всех сферах своей деятельности. Неблагоприятная эпидемиологическая обстановка отразилась и на технологиях обучения. В короткий срок все образовательные учреждения Российской Федерации перешли на обучение с применением дистанционных технологий. А значит, появилась необходимость в корректировке форм и методов обучения. Теперь на достаточно долгий срок обучение школьников и студентов перешло в большей степени на самостоятельное освоение и проработку учебного материала под присмотром учителей и преподавателей.

Точные науки всегда вызывают наибольшие затруднения у обучающихся. Многим обучающимся требуется подробное и обширное объяснение преподавателем, что является в большей степени психологическим аспектом или неумением самостоятельно учиться. Следовательно, появляется *проблема*: можно ли создать динамическое наглядное сопровождение к занятиям по математическим дисциплинам, будь то классно-урочная форма или же дистанционное обучение.

Чтобы как-то облегчить нагрузку и разнообразить деятельность при изучении материала, стало необходимым еще больше прибегать к различным компьютерным программам. В этом нам помог классический офисный пакет. Но в нашем распоряжении есть еще один доступный и весьма удобный ресурс – системы динамической математики, например, Живая математика, или GeoGebra. Цель статьи – показать пример применения СДМ и обосновать успешность их использования.

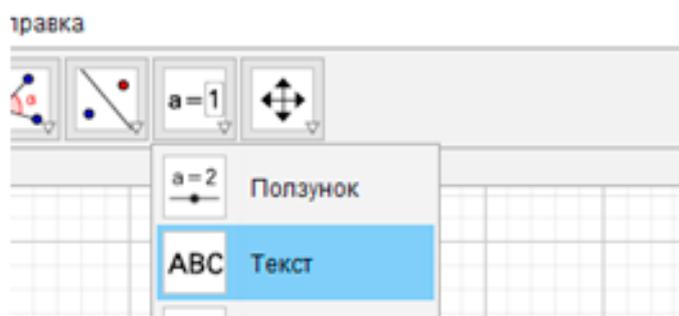
Методология исследования заключается в опыте работы автора по апробации использования СДМ GeoGebra в своей профессиональной деятельности, изучении и анализе литературы, посвященной применению динамических рисунков в методике обучения математике, в частности различных ее разделов [1; 7; 8].

Существует немало публикаций на тему использования динамических сред в обучении математике на различных уровнях образования. Часто делается уклон на развитие исследовательских навыков в ходе математического эксперимента [3; 10] или деятельностный подход в освоении дисциплин [4; 9]. Отмечается, что улучшается понимание нового материала и ускоряется процесс выполнения заданий [5; 7].

Конкретно в своей профессиональной деятельности мы в основном используем приложение GeoGebra. Оно бесплатное, не занимает большой объем памяти, можно установить как на ПК, так и на смартфон. Отметим, что приоритет GeoGebra по ее применению в разделах математики отражен в названии среды: геометрия и алгебра. Рядом авторов, в том числе российских, описан опыт успешного ее использования при обучении таким вузовским дисциплинам, как математический анализ [7; 10], дифференциальная геометрия [6], основания геометрии [9]. Нами предпринята попытка воспользоваться GeoGebra как средством обучения математической логике студентов колледжа.

Продемонстрируем ее применение в теме «Полином Жегалкина», изучаемую в курсе математической логики на уровне СПО по специальности «Программирование в компьютерных системах» в профессионально-педагогическом колледже. На привычных занятиях студенты выполняют задание на бумаге, если есть возможность, то можно обратиться к Excel. Также стоит рекомендовать среду GeoGebra [11], ведь для ее использования не нужна лицензия. Конечно, у студентов могут возникнуть встречные вопросы, так как придется знакомиться с новым приложением, если они не изучали его до этого. Значит, выполнение задания можно распределить на два этапа: сначала необходимо разобраться с самим понятием полинома Жегалкина, а затем освоить умения работы в программе, чтобы выполнить задание по теме. Кто-то может быстро разобраться, а кому-то в помощь нужны методические указания. Нами для студентов разработана следующая небольшая инструкция по шагам, своего рода руководство (см. рис. 1 (а, б)).

5) Сделайте вставку текста и введите свою функцию.



а)

7) Записывайте результаты выполнения действий (операций – инверсия, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция).

| X | Y | Z | $\neg X$ | $\neg X \wedge Y$ | $X \rightarrow Z$ | $(X \rightarrow Z) \vee Y$ | F |
|---|---|---|----------|-------------------|-------------------|----------------------------|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

б)

Рис. 1. Примеры указаний по выполнению задания

Далее студенты самостоятельно осваивают алгоритм работы в программе, повторяют основы построения таблиц истинности и определение полинома Жегалкина. Как известно, полином Жегалкина (или алгебраическая нормальная форма) – это многочлен с коэффициентами вида 0 и 1, где в качестве произведения берется конъюнкция, а в качестве сложения – сложение по модулю 2 [2]. Значит, сначала нужно записать саму функцию, определить порядок операций, сделать таблицу истинности и на ее основании составить треугольник Паскаля. Затем по стороне треугольника, опираясь на значения переменных в таблице, составить полином Жегалкина. В итоге у студента должна получиться примерно следующая картинка (рис. 2):

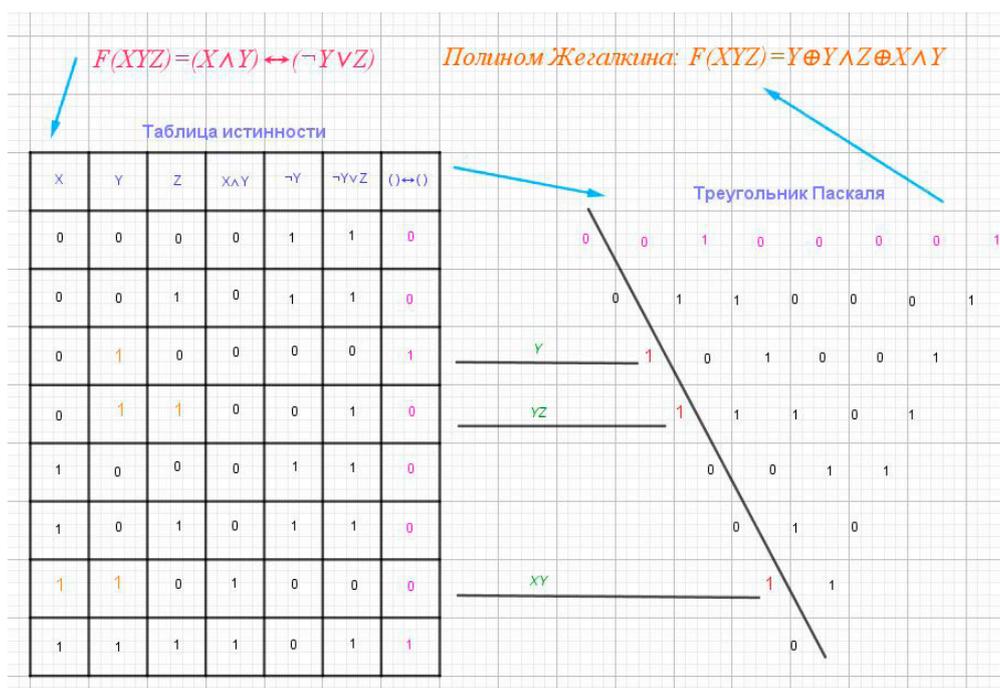


Рис. 2. Пример выполненного задания

Опрос студентов (которые до этого не работали в данной программе) показал, что большинство считает выполнение задания в среде GeoGebra удобным и несложным. Многим понравилось, что на выполнение тратится меньше времени, можно менять цвет текста и объектов, а также легко заменить ошибочный символ на правильный без искажения эстетического вида. Студенты отметили, что электронный вариант работы удобнее для самого преподавателя, так как нет необходимости разбирать не очень аккуратный почерк студента. Можно менять масштаб, изменять размеры и расположение объектов, полотно не ограничено в отличие от тетрадного листа. Единственным замечанием было то, что некоторым студентам по их предпочтениям больше нравится работать ручкой на бумаге, потому что так они лучше усваивают материал и больше концентрируются, но это их личные психологические особенности.

Таким образом, студенты, теперь относящиеся уже к поколению Z, очень охотно и с увлечением познают не только новые для себя основы различных наук, но и гибко пользуются предлагаемыми инструментами информационных технологий. Применение СДМ при обучении математике способствует творческому поиску, эстетическому воспитанию и оптимизации трудозатрат. И даже в периоды нестабильности можно найти положительные стороны. Например, самоизоляция побудила педагогов и обучающихся получить новые умения и расширить количество источников для получения знаний.

Библиографический список

1. Абдулкин В.В., Калачева С.И., Кейв М.А., Ларин С.В., Майер В.Р. Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе: монография [Электронный ресурс] / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2019. 164 с. URL: <http://elib.kspu.ru/document/33659>.
2. Алехина М.А., Пичугина П.Г. Об одном методе построения полинома Жегалкина // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». 2008. Т. 1. С. 330–332. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ob-odnom-metode-postroeniya-polinoma-zhegalkina> (дата обращения: 3.08.2020).
3. Вендина А.А., Киричек К.А. Математический эксперимент в программе GeoGebra как одна из форм реализации интерактивного метода обучения (на примере подготовки студентов педагогического вуза) // МНКО. 2019. № 1 (74). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskiy-eksperiment-v-programme-geogebra-kak-odna-iz-form-realizatsii-interaktivnogo-metoda-obucheniya-na-primere-podgotovki> (дата обращения: 3.08.2020).
4. Громова Е.В., Сафуанов И.С. Применение компьютерной математической программы GeoGebra в обучении понятию функции. Образование и наука. 2014. № 1(4). С. 113–131. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primeneniye-kompyuternoy-matematicheskoy-programmy-geogebra-v-obuchanii-ponyatiyu-funktsii> (дата обращения: 3.08.2020).
5. Ерилова Е.Н. Использование интерактивной геометрической среды GeoGebra в вузовском курсе математики // Международный научно-исследовательский журнал. 2014. № 11 (30). Ч. 4. С. 7–9. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-interaktivnoy-geometricheskoy-sredy-geogebra-v-vuzovskom-kurse-matematiki> (дата обращения: 3.08.2020).
6. Клековкин Г.А. Использование интерактивной математической системы GeoGebra при обучении дифференциальной геометрии. Параметризованные поверхности // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. 2020. № 1 (33). С. 210–229.

7. Ларин С.В. Алгебра и математический анализ с GeoGebra // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2013. № 1. С. 236–240. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/algebra-i-matematicheskij-analiz-s-geogebra> (дата обращения: 3.08.2020).
8. Майер В.Р., Апакина Т.В., Ворошилова А.А. Системы динамической геометрии как средство обучения будущих учителей математики геометрическим преобразованиям // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2016. № 4. С. 60–64. URL: <http://vestnik.kspu.ru/index.php/vestnik/issue/view/11> (дата обращения: 3.08.2020).
9. Сергеева Т.Ф., Шабанова М.В., Гроздев С.И. Основы динамической геометрии: монография. М.: АСОУ, 2016. 152 с.
10. Тагаева Е.А. Возможности использования программы GeoGebra при решении задач по алгебре и началам математического анализа в средней школе // Учебный эксперимент в образовании. 2018. № 1. С. 48–52. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32724619> (дата обращения: 3.08.2020).
11. GeoGebra: официальный сайт [Электронный ресурс]. URL: <http://www.geogebra.org>.

ЦИФРОВАЯ КУЛЬТУРА КАК СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СОВРЕМЕННОГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

DIGITAL CULTURE AS A COMPONENT OF THE ACTIVITY OF A MODERN MATHEMATICS TEACHER

Н.В. Воробьева

N.V. Vorobeva

Цифровая культура, учитель математики, профессиональная деятельность, компоненты цифровой культуры.

В статье обоснована необходимость формирования компонентов цифровой культуры как составляющей деятельности учителя математики. Приведены примеры иллюстрирования особенностей реализации данных компонентов профессиональной деятельности учителя.

Digital culture, mathematics teacher, professional activity, components of digital culture.

The article substantiates the need to form components of digital culture as a component of the activity of a mathematics teacher. Examples of illustrating the features of implementing these components of a teacher's professional activity are given.

В последнее время все чаще появляются в газетных заголовках и новостной ленте термины «цифровая экономика», «цифровое общество», «цифровое образование», «цифровая культура». Еще в мае 2018 г. Президент Российской Федерации В.В. Путин подписал Указ «О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 г.» [1]. Данный документ определил необходимость создания «современной и безопасной цифровой образовательной среды, обеспечивающей высокое качество и доступность образования всех видов и уровней» [1].

На фоне социально-экономического развития страны, а также цифровой экономики цифровизация образования является необходимым процессом реорганизации учебной работы. В связи с активным развитием информационной сферы возникает множество информационных опасностей. Именно поэтому возникла необходимость формирования такой составляющей деятельности педагога, как цифровая культура.

Прототипом понятия «цифровая культура» является понятие «компьютерная грамотность», которое было основополагающим в конце XX в. Для обеспечения всеобщей компьютерной грамотности в стране велась активная работа по созданию программы нового предмета для общеобразовательной школы: «Основы информатики и вычислительной техники», который вскоре стал обязательным. Однако, как отмечено в [7], к моменту введения информатики в среднюю школу (1985) уровень компьютерной подготовки учителей не соответствовал требова-

ниям преподавания нового курса ОИВТ. Спустя некоторое время в теорию и методику обучения предмету вошло понятие «информационная культура», для которого выделяли 2 родовых понятия «информация» и «культура» и под информационной культурой стали понимать «свод правил поведения с информацией, навык ориентироваться в информационном пространстве» [7].

Сегодня в связи с проникновением информационных технологий во все сферы жизни общества активным использованием возможностей сети Интернет в деятельности специалистов различных областей главенствующим понятием стало понятие «цифровая культура».

Существуют различные трактовки данного понятия. Так, например, Е.Г. Михайлова полагает, что «цифровая культура – это в первую очередь понимание современных информационных технологий, их функционала, а также возможность грамотно использовать их в работе или быту» [10]. Автор уточняет, что речь идет о работе с базами данных, машинном обучении, компьютерном моделировании, работе с графическими редакторами и т.д. Е.Е. Елькина в [3] конкретизирует содержание данного понятия. Речь идет об особенностях представления личной информации, публикации данных, информационной безопасности. Таким образом, цифровая культура – совокупность компетенций, характеризующих способность использования информационно-коммуникационных технологий для комфортной жизни в цифровой среде, для взаимодействия с обществом и решения цифровых задач в профессиональной деятельности.

Формирование цифровой культуры начинается в школе, и учитель математики как никто другой влияет на формирование цифровой культуры у учащихся.

Одним из основополагающих школьных предметов, занимающим в начальной школе 20 %, а в основной общеобразовательной и средней (полной) образовательной школе – 18 % всех учебных часов, является математика, которая преподается на протяжении всего обучения в школе, с 1 по 11 класс [2].

Математика насыщает другие науки общими понятийными средствами, играя роль интегратора наук. Математический язык – цифры, символы, числа, благодаря чему математика помогает двигать научно-технический прогресс, особенно во времена цифровых технологий [9].

При этом цифровая культура является и составляющей деятельности учителя математики как профессионала. В [5] выделяют следующие составляющие деятельности педагога:

- деятельностная – знания, умения, навыки и индивидуальные способы самостоятельного и ответственного осуществления педагогической деятельности;
- коммуникативная – знания, умения, навыки и способы творческого осуществления педагогического общения;
- личностная – потребность в саморазвитии и саморегуляции, а также знания, умения, навыки самосовершенствования.

Сегодня учителю необходимо уметь использовать всевозможные информационные технологии, применять существующие информационные ресурсы. Сейчас активно развиваются новые формы обучения с применением компьютерных тех-

нологий, разрабатываются новейшие программные средства образования. Все это предполагает развитие у педагога следующих компонентов цифровой культуры.

1. Общеобразовательный компонент – представление об устройстве компьютера, об основных направлениях использования вычислительной техники, об информатике в целом [8]. Сегодня учителя активно используют платформы для проведения онлайн-занятий, например, Zoom, ZenClass, Microsoft Teams. Для многих учителей в учебном процессе «правой рукой» стала интерактивная доска. Соответствующие программные решения позволяют оптимизировать учебный процесс, делая его более эффективным.

2. Мировоззренческий компонент – понимание роли информационных технологий в формировании научной картины мира, представление о гуманизации науки и математизации в гуманитарной сфере [8]. К тому же он связан с развитием новых информационных ценностей. Стоит отметить, что в современных условиях может возникнуть необходимость повсеместного перехода на дистанционное обучение. Для эффективного взаимодействия со всеми субъектами образовательного процесса можно использовать такие программы, как: 1С: Математический конструктор, которая позволяет создавать виртуальные лаборатории, интерактивные модели; реальных объектов, явлений для разных ступеней школьного обучения. Данное программное обеспечение позволяет использовать материалы как для занятий в классе, так и онлайн-занятий; есть возможность назначения занятий для самостоятельной работы учеников [12]. Также существует динамическая компьютерная среда – GeoGebra, которая позволяет моделировать решение задач различного типа, строить графики, модели 3D и многое другое, поэтому имеет широкое применение в алгебре, геометрии, тригонометрии, теории вероятностей и пр. [13].

3. Психолого-педагогический компонент – теоретические знания психолого-педагогических аспектов обучения с применением компьютера, умение моделировать различные математические ситуации с помощью ЭВМ, понимание психолого-педагогических аспектов обучения принципам и приемам сбора, систематизации, обобщения и использования информации, проведения научных исследований и дидактической работы по преподаваемому предмету, подготовки информационных и научно-технических материалов и пр. [8]. Постепенное увеличение оснащенности образовательных учреждений позволяет использовать эти средства в педагогической деятельности, а современные компьютеры дают возможность с помощью звука, видео, анимации, фотографий делать уроки насыщеннее и повышать мотивацию учеников к изучению конкретного предмета более качественно. Для этого необходимо владеть технологиями оформления учебного материала в красочную, доступную форму. Выбор программ для создания подобных презентаций огромен: MS PowerPoint, iSpring Suite, ПромоШОУ, Impress, ProShow Producer, Google презентации, Живая математика и многие другие.

4. Технологический компонент – активизирующие методы и средства обучения (применение НИТ, деловые игры, эксперименты и др.), подбирать индивидуальные задания учащимся и задания для коллектива, менять их логику в соответствии с выдвигаемой целью, обоснованно, педагогически грамотно и творчески

создавать организационно-педагогическую и логико-психологическую структуру урока математики; умение спланировать весь учебный курс: календарные, тематические и поурочные планы по предмету [8]. Для организации образовательного процесса существует множество программ и приложений, позволяющих не только планировать свою педагогическую деятельность посредством, например, программы для создания календарно-тематических планов КТPlan-2020 – позволяет экономить время, необходимое для расстановки дат проведения уроков, анализа количества часов, экспорта данных в Дневник.ру и формирования полученных данных в текстовый документ Word. Программа автоматизации проверки тренировочных и контрольных работ – позволяет автоматизировать проверку работ с тремя вариантами до двадцать заданий в каждом; Конструктор тестов с функцией тестирования – позволяет легко создавать различные текстовые тесты [11].

От профессионализма учителя зависит большинство показателей качества образования. В наше время в компетентность учителя математики входит не только знание предмета и умение его преподавать, но и умение применять информационные технологии в своей учебной деятельности. Для этого необходимо формировать цифровую культуру учителя.

Библиографический список

1. Указ Президента «О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 года» 07.05.2018. URL: <https://base.garant.ru/71937200/>
2. Приказ Минобрнауки РФ от 9 марта 2004 г. № 1312 «Об утверждении федерального базисного учебного плана и примерных учебных планов для образовательных учреждений Российской Федерации, реализующих программы общего образования» в редакции от 01.02.2012. URL: <https://base.garant.ru/6149681/>
3. Елькина Е.Е. Цифровая культура: понятие, модели и практики. Информационное общество: образование, наука, культура и технологии будущего. СПб.: Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики. URL: <https://openbooks.itmo.ru/ru/file/8471/8471.pdf>
4. Ершов А.П. Основы информатики и вычислительной техники: пробное учебное пособие. М.: Просвещение, 1985.
5. Козинец Л.А. Педагогическая деятельность: сущность, структура, функции. URL: <http://elib.bspu.by/handle/doc/20209>
6. Ефремова Т.Ф. Новый толково-словообразовательный словарь русского языка. М.: Дрофа, Русский язык, 2000.
7. Лапчик М.П., Семакин И.Г., Хеннер Е.К. Методика преподавания информатики: учеб. пособие для студ. пед. вузов / под общ. ред. М.П. Лапчика. М.: Академия, 2001.
8. Бочкарева Г.И. Применение технологии формирования информационной культуры учителя и учащихся при обучении математике: методическая работа. URL: <https://textarchive.ru/c-2249465.html>
9. Истоки «цифрового мира»: Культ математики. 2018. URL: https://yandex.ru/turbo/tsargrad.tv/s/articles/istoki-cifrovogo-mira-kult-matematiki_167104
10. Культура в «цифре»: почему профессионал будущего должен быть немного «айтишником». 2018. URL: <https://news.itmo.ru/ru/education/trend/news/7234/>
11. Учительский портал. URL: <https://www.uchportal.ru/load/3>
12. URL: <https://obr.lc.ru/mathkit/>
13. URL: <https://www.geogebra.org/>

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

APPLICATION OF SOFTWARE PACKAGES FOR TEACHING STUDENTS MATHEMATICAL ANALYSIS

Е.Д. Вохтомина, О.Н. Троицкая

E.D. Vohtomina, O.N. Troitskaya

Пакеты прикладных математических программ, обучение, SMath Studio, методика.

В статье представлено описание методических особенностей использования пакетов прикладных математических программ при изучении понятий математического анализа. Приведены примеры заданий, направленных на формирование у студентов умений определять производные сложных функций с использованием SMath Studio.

Applied mathematical software packages, training, SMath Studio, technique.

The article presents a description of the methodological features of using packages of applied mathematical programs in the study of the concepts of mathematical analysis. There are examples of tasks that are aimed at developing students' skills to determine derivatives of complex functions using SMath Studio.

Применение информационных технологий во всех сферах деятельности современного общества (медицина, производство, торговля и т.д.) привело к их использованию и в образовании. При этом можно говорить как о школьном, так и о вузовском образовании. Современные ИТ-технологии педагоги применяют при организации самостоятельной деятельности обучающихся, при моделировании сложно воспроизводимых явлений, при визуализации изучаемого материала и т.д. Важную роль они играют и при обучении математике. Mathematica, Maxima, Maple и т.д. – вот далеко не полный перечень специализированного программного обеспечения, предназначенного для использования в процессе обучения математике.

Сегодня в связи с сокращением количества часов, отводимых в вузах на изучение основ математического анализа, аналитической геометрии и линейной алгебры, особую актуальность приобретает разработка методических подходов к применению пакетов прикладных программ в процессе обучения. Анализ систем Maple, Maxima, Scilab, SMath Studio, MATLAB и MathCad позволяет утверждать, что сегодня именно SMath Studio [1] полностью соответствует критериям кроссплатформенности, дружелюбности интерфейса, наличия облачной версии, постоянного обновления, бесплатной версии и русскоязычного интерфейса. С помощью SMath Studio можно реализовать различные виды учебной и методической деятельности. Например, исследовательские, что предполагает возможность проведения самими обучающимися компьютерных экспериментов для выдвижения или опровержения выдвинутых ими гипотез, презентационные, что предполагает возможность представления обучающимся особенностей математических объектов, способов выполнения операций и т.д.

Так, например, построение графиков функции $f(x) = \frac{1}{x-a} + b$ при различных значениях a и b в системе SMath Studio позволяет студентам выдвинуть предположение о том, что при $x \rightarrow a$ значения рассматриваемой функции стремятся к b (рис. 1).

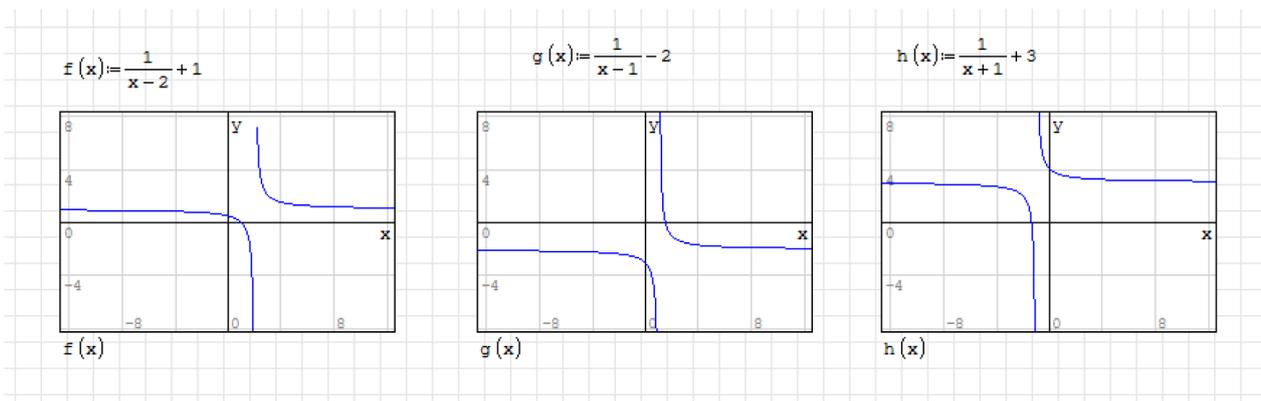


Рис. 1. Графики функции в SMath Studio

Пакеты прикладных математических программ могут быть использованы на различных этапах обучения, например, при формировании умений применять теоретический материал при решении практических задач. Так, студентам можно предложить следующую серию заданий с целью определения внутренней и внешней функций в процессе нахождения производной сложной функции.

Задание № 1. В представленных ниже примерах определите внутреннюю и внешнюю функции: $y = (x-3)^2$, $y = \sin 3x$, $y = \operatorname{tg}(\sin x)$, $y = \ln(x^3 - 2)$.

Задание № 2. Найдите производные представленных ниже функций:

а) $y = x - 3$, $y = x^2$, $y = (x - 3)^2$;

б) $y = 3x$, $y = \sin x$, $y = \sin 3x$;

в) $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{tg}(\sin x)$;

г) $y = x^3 - 2$, $y = \ln x$, $y = \ln(x^3 - 2)$.

Задание № 3. Используя программу SMath Studio, определите производные функций: $y = (x-3)^2$, $y = \sin 3x$, $y = \operatorname{tg}(\sin x)$, $y = \ln(x^3 - 2)$.

Задание № 4. Подтвердите правильность результатов задания № 2 на основе выполнения задания № 3.

Обучающиеся при выполнении третьего задания получают результаты, представленные на рис. 2.

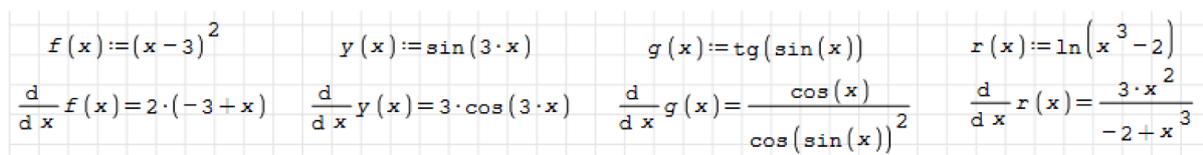


Рис. 2. Подтверждение полученных результатов

Данная серия заданий позволит сформировать у студентов умения определять производные сложных функций.

Пакеты прикладных программ можно применять при реализации трехэтапной методики работы с математическими понятиями и утверждениями. Рассмотрим процесс формирования понятия «предел функции в точке». На первом этапе преподаватель перед студентами поставит задание: «Оцените особенности поведения функции $y = (x - 1)^3 + 2$ при $x \rightarrow 1$ ». Обучающиеся с помощью выбранного пакета программ строят график указанной функции (рис. 3).

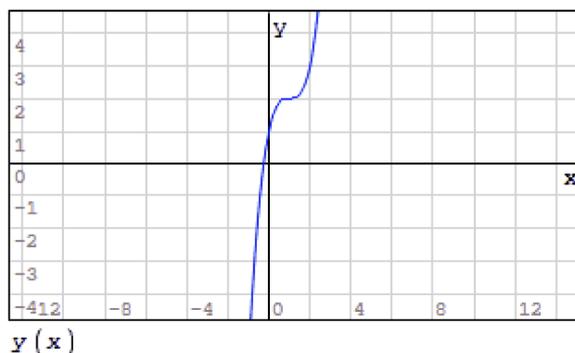


Рис. 3. График функции $y = (x - 1)^3 + 2$

Студенты отметят тот факт, что значения функции стремятся к числу 2 при стремлении значений аргумента к 1. Следующим шагом станет предложение преподавателя определить особенности поведения функции при стремлении аргумента к числу 2,1; 2,01; 1,9; 1,99. Каждый раз студенты будут выдвигать предположения о поведении функции. Таким образом, они окажутся готовыми к введению нового для них математического понятия «предел функции в точке».

На втором этапе преподаватель на основе полученной визуализации понятия предела функции в точке не только раскроет его геометрический смысл, но также введет термин и символ: « $A = \lim f(x)$, если для любой ε -окрестности точки A найдется такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой δ -окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε -окрестности точки A » [3].

На третьем этапе студенты будут вовлечены в деятельность исследования и построения графиков функций без применения аппарата производной функции, например, им будет предложено описать поведение функции $f(x) = \frac{3}{x-5} + 2$. Пакеты прикладных программ позволят студентам подтвердить полученные выводы или опровергнуть выдвинутые предположения.

Применение пакетов прикладных программ при обучении математическому анализу студентов высших учебных заведений способствует повышению уровня их математической подготовки и ИКТ-компетентности. Кроме того, комплексное применение возможностей данного программного обеспечения при обучении линейной алгебре и аналитической геометрии позволит сформировать у студентов целостное представление о разделах высшей математики и их взаимосвязи.

Библиографический список

1. SMath Studio. М., 2006. URL: <https://ru.smath.com/обзор/SMathStudio/резюме> (дата обращения: 01.10.2020).
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. 9-е изд. М.: Айрис-пресс, 2009. 608 с.

ИЗУЧЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНИМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA

LEARNING OF THE FUNCTION GRAPH TANGENT USING ANIMATION TOOLS OF THE INTERACTIVE APPLICATION GEOGEBRA

Е.А. Гедзя

E.A. Gedzya

Компьютерная анимация, динамический чертеж, GeoGebra, график функции, касательная к графику функции, обучение математике.

В статье представлены анимационные возможности интерактивной среды GeoGebra и разработаны динамические чертежи для изучения понятия касательной к графику функции в данной точке. Приведенные в статье примеры демонстрируют необходимость использования анимационных рисунков для эффективного формирования визуальных представлений о касательной к графику функции.

Computer animation, dynamic drawing, GeoGebra, function graph, function graph tangent, teaching mathematics.

The article presents the animation capabilities of the interactive GeoGebra environment and developed dynamic drawings to study the concept of the function graph tangent at a given point. The examples given in the article demonstrate the need to use animation drawings to effectively forming of visual representations about the function graph tangent.

Изучение свойств функций является важной темой школьного курса математики. В старших классах рассматривается понятие касательной к графику функции в данной точке, приводящее к определению производной функции [3].

В курсе геометрии девятого класса учащиеся рассматривали касательную, проведенную к окружности, как прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку. Поэтому у многих школьников возникает путаница в этих понятиях, и геометрическое понятие, основанное на вполне четком визуальном представлении взаимного расположения окружности и прямой, подменяет новое, связанное с графиком функции. У учащихся, как правило, не возникает такого простого и наглядного визуального образа при изучении касательной к графику функции. Для преодоления этой проблемы необходимо активно использовать на уроках анимационные динамические модели, позволяющие наиболее полно раскрыть визуальные представления понятия касательной к графику функции.

Одной из наиболее удобных динамических графических сред, позволяющей наглядно, с использованием анимационных рисунков, создавать визуальные образы многих математических понятий, является GeoGebra [2]. В связи с этим в статье была поставлена цель – разработать в GeoGebra динамические примеры, позволяющие эффективно и наглядно сформировать у учащихся визуальное представление о касательной к графику функции в данной точке.

Напомним, что касательная к графику функции в точке M_0 представляет собой прямую, к которой стремится секущая MM_0 , если точка M перемещается по графику функции, стремясь к точке M_0 . То есть касательная к графику функции в точке – это предельное положение секущей MM_0 [3].

Анимационные рисунки для изучения касательной уже рассматривались в литературе, например, в [2], а также в [5], где использовалась «ползунковая анимация». Мы создали новые анимационные чертежи в GeoGebra. Представленные примеры целесообразно рассматривать с учащимися на уроках математики до изучения производной и ее применения для нахождения уравнения касательной.

Пример 1. Определить, имеет ли график функции $f(x)$ касательную в точке M , если:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$ и $M(1,1)$;

б) $f(x) = (x-2)\ln|x-2| + 3$ и $M(2,3)$.

Решение. а) С помощью GeoGebra строим график функции $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$. Далее отметим на графике точку $M(1,1)$ и произвольные точки N и K , расположенные справа и слева от точки M , то есть $N(a, f(a))$ при $a \geq 1$ и $K(b, f(b))$ при $b < 1$. С помощью ползунков изменяем положения точек N и K , устремив их к точке M справа и слева соответственно, и наблюдаем за тем, как изменяются положения секущих MN и MK . Зафиксируем положения секущих MN и MK при достаточно близком к M положении точек N и K (рис. 1 (слева)). На основе анимационного рисунка делаем вывод о существовании предельного положения секущих, т.е. в точке $M(1,1)$ существует вертикальная касательная.

б) Аналогично рассмотренному выше пункту с помощью GeoGebra строим график функции $f(x) = (x-2)\ln|x-2| + 3$. Отметим на графике произвольные точки $N(a, f(a))$ при $a \geq 2$ и $K(b, f(b))$ при $b < 2$. Выполняем действия с ползунками и наблюдаем за изменением положения секущих MN и MK , как в предыдущем примере (рис. 1 (справа)). На основе анимационного рисунка делаем вывод о существовании касательной в точке $M(2,3)$.

Таким образом, с помощью динамического чертежа учащиеся могут определить, что при стремлении точки N графика справа к точке M и при стремлении точки K слева к точке M существует общее предельное положение этих двух секущих. Значит, в этой точке существует касательная, она является предельным положением этих секущих.

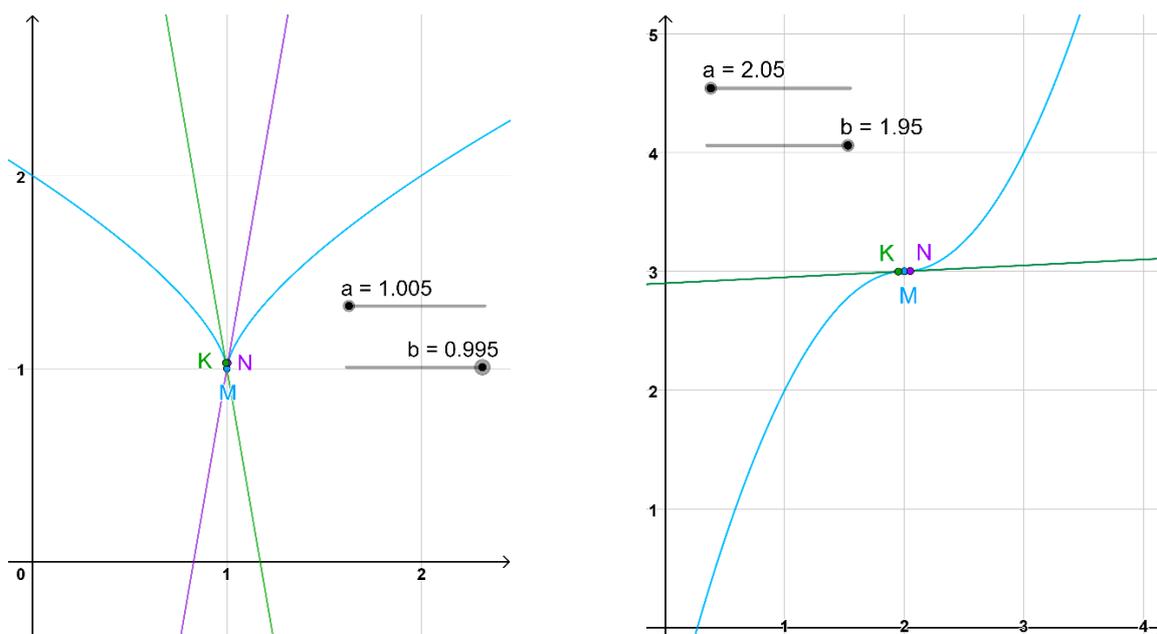


Рис. 1. Нахождение предельного положения секущих MN и MK в примере 1

Пример 2. Определить, имеет ли график функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{3}{4}, & \text{если } x \geq 4 \\ -\frac{1}{4}(x-5)^2 + \frac{5}{4}, & \text{если } x < 4 \end{cases}$$

касательную в точке $M(4,1)$. Какое уравнение имеет касательная в этой точке (сделайте предположение, используя чертеж)?

Решение. Построим график функции $f_1(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{3}{4}$ при $x \geq 4$ и отметим на нем произвольную точку $N(a, f(a))$, где для ползунка установим границу $a \geq 4$. С помощью ползунка изменяем положение точки N , устремив ее к точке M , и наблюдаем за тем, как изменяется положение секущей MN (рис. 2 (сверху)). Зафиксируем положение секущей MN при близком к M положении точки N .

Отметим на графике функции $f_2(x) = -\frac{1}{4}(x-5)^2 + \frac{5}{4}$ при $x < 4$ еще одну произвольную точку $K(b, f(b))$, где для ползунка установим границу $b < 4$, сделаем аналогичные действия, что и для точки N , и зафиксируем положение секущей MK при достаточно близком к M положении K (рис. 2 (снизу)).

По динамическому чертежу можно заметить, что при стремлении точки N графика справа к точке M и при стремлении точки K слева к точке M существует общее предельное положение секущих MN и MK (рис. 3).

Значит, в точке M графика функции $f(x)$ существует касательная, она является предельным положением этих секущих.

Если задать значения параметров на ползунках очень близкими к 4, например, соответственно $a = 4,001$, $b = 3,999$, то на чертеже можно заметить, что секущие практически сливаются в одну прямую, и эта «воображаемая» прямая проходит через точку G . Тогда по двум точкам можно записать предполагаемое уравнение касательной $y = \frac{1}{2}x - 1$.

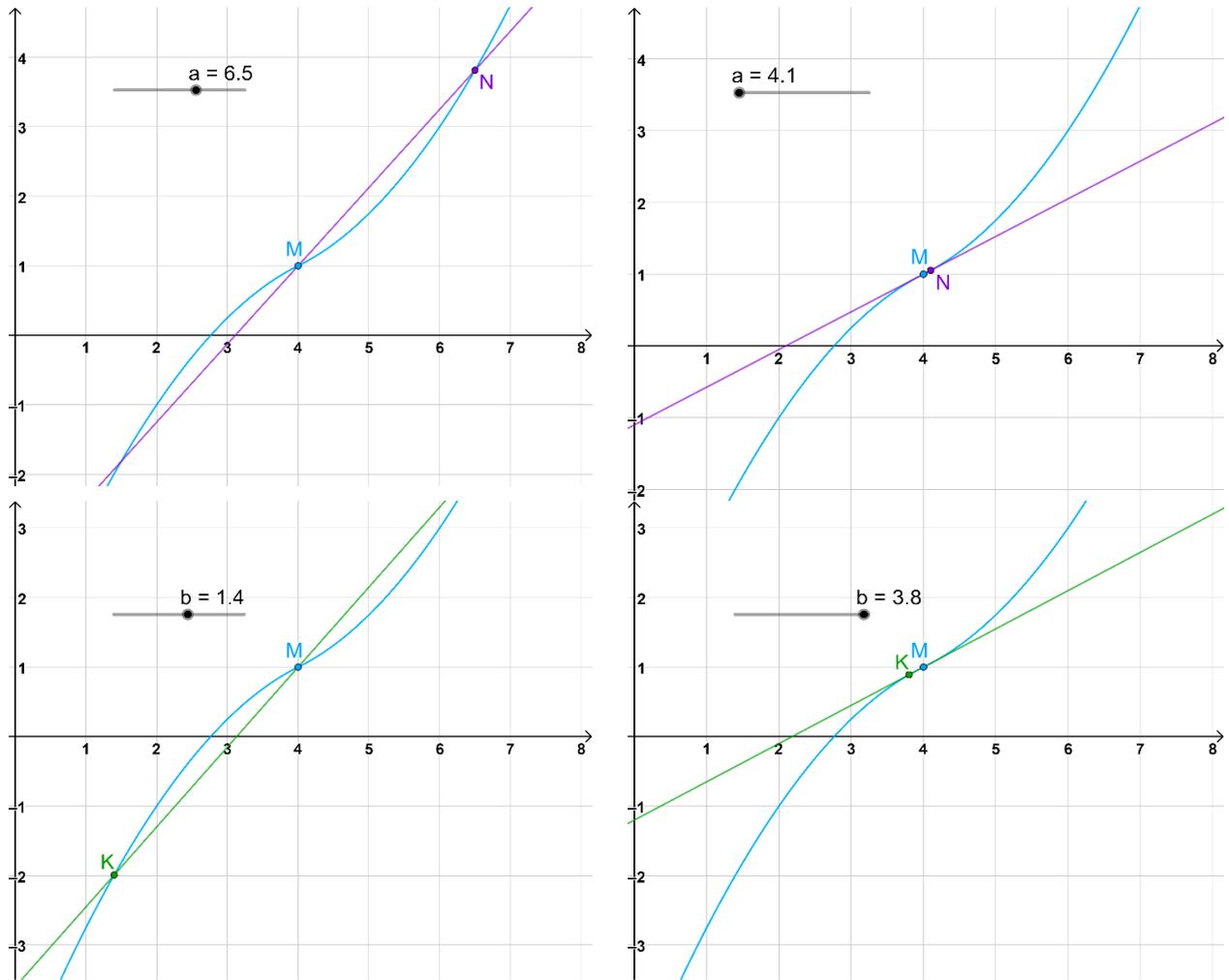


Рис. 2. Изменение положения секущих MN и MK с помощью ползунков

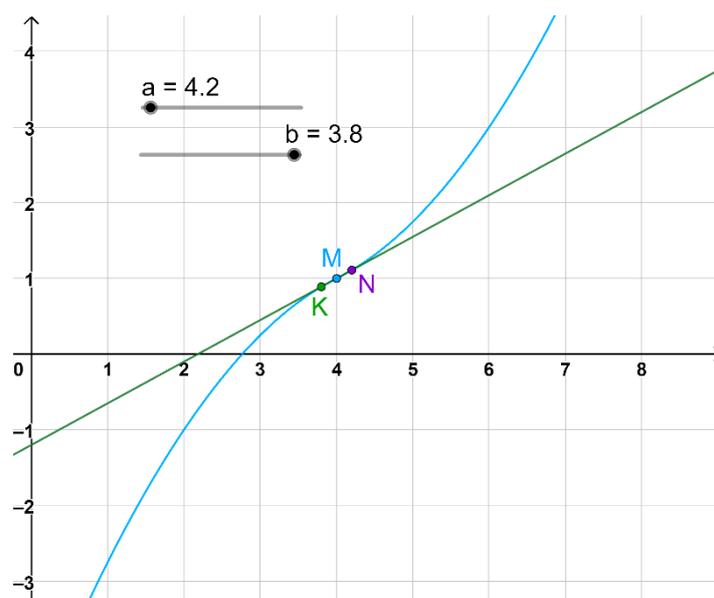


Рис. 3. Нахождение предельного положения секущих MN и MK в примере 2

После изучения производной, ее применения для построения уравнения касательной эти примеры можно рассмотреть вновь. Рассматривая функции из примера 1.б и примера 2, учащиеся столкнутся с проблемой нахождения производных от кусочно-заданных функций, а в примере 1.а – с функцией, имеющей вертикальную касательную в точке.

Таким образом, использование анимационных возможностей динамической среды GeoGebra является необходимым при изучении данной темы, так как позволит эффективно сформировать наглядное представление о касательной к графику функции в точке. Статичные рисунки не формируют таких визуальных образов в отличие от анимационных динамических.

Необходимо отметить, что создание в GeoGebra динамических рисунков, иллюстрирующих математические понятия, является важным умением будущего учителя математики, так как применение компьютерной анимации может существенно повысить качество работы учителя и усвоения учебного материала учащимися [1; 4].

Библиографический список

1. Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе: монография / В.В. Абдулкин и др. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2019. URL: <http://elib.kspu.ru/document/33659> (дата обращения: 09.11.2020).
2. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону: Легион, 2015.
3. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. (базовый и углубленный уровни). М.: Мнемозина, 2019.
4. Нигматулин Р.М., Вагина М.Ю., Кипнис М.М. Особенности использования графических онлайн-калькуляторов в процессе математической подготовки бакалавров педагогического образования // Информатизация образования и методика электронного обучения: материалы III Междунар. науч. конф. / Сибирский федеральный университет. Красноярск, 2019. С. 256–261.
5. Особенности создания и использования компьютерных анимационных рисунков в обучении математике / С.В. Ларин и др. // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2020. № 1 (51). С. 6–14. URL: <https://doi.org/10.25146/1995-0861-2020-51-1-178> (дата обращения: 09.11.2020).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНИМАЦИИ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ «ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА» ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ» В 9 КЛАССЕ

USING ANIMATION IN THE COMPUTER ENVIRONMENT «LIVE MATHEMATICS» WHEN STUDYING THE TOPIC «VECTORS» IN GRADE 9

О.В. Дерова, Ю.А. Бояркина

O.V. Derova, Yu.A. Boyarkina

Живая математика, компьютерная среда, математическое образование, компьютерная анимация, сложение векторов.

В статье обсуждаются сложности, возникающие при обучении школьников геометрии на примере темы «Векторы». Предлагается использование компьютерной анимации в системе динамической геометрии Живая математика при изучении темы «Сложение векторов». Описан пример использования анимационных возможностей Живой математики для проверки переместительного свойства операции сложения векторов.

Live mathematics, computer environment, mathematical education, computer animation, vector addition.

The article discusses the difficulties that arise when teaching geometry to schoolchildren on the example of the topic “Vectors”. It is proposed to use computer animation in the system of dynamic geometry “Live mathematics” when studying the topic “Addition of vectors”. The article describes an example of using the animation capabilities of Live mathematics to check the translational property of the vector addition operation.

Векторы – достаточно «молодой» вопрос, включенный в школьный курс геометрии со второй половины XX столетия. Отвечая потребностям физики, геодезии, географии и ряду других наук, векторы превратились в мощный метод решения задач и доказательства теорем. Они служат одним из способов установления связи линейных и угловых величин наряду с тригонометрическими функциями, также связи алгебры с геометрией. Но наряду с этим при изучении данной темы у школьников возникают трудности.

Рассмотрим некоторые причины их возникновения:

1. *Недостаточное количество часов* на изучении данной темы. Рассмотрев федеральный перечень учебников геометрии, мы выделили те, которые в настоящее время имеют наибольшее распространение. Проанализировав содержание данных учебников, выяснилось, что на изучение данной темы в среднем выделяется 12 часов, что очень мало.

2. *Наглядность*. Выполнение чертежей, даже простых, изображенных в тетрадах или на доске, может быть не совсем точным, или даже неверным [3].

3. *Недостаточная мотивация к изучению данной темы*. У обучающихся возникает непонимание, зачем изучать данную тему. Исходя из этого, происхо-

дит снижение мотивации и, как следствие, качество математической подготовки учащихся в большей степени объясняется качеством уроков: шаблоном, однообразием, скукой [2].

4. *Дистанционное обучение.* В связи с эпидемией коронавируса многие школы, колледжи и вузы в России перешли на дистанционное обучение. Казалось бы, для онлайн-образования есть все необходимое: широкий набор интернет-ресурсов, учебники в цифровом формате и даже электронный журнал и онлайн-доска. В онлайн-уроке трудно включить всех учащихся в общее обсуждение, даже организовать диалог. Обычно в дискуссии участвуют 15–20 % присутствующих. Методы, используемые в определенных предметах (физика, математика), где требуется выполнение практической работы непосредственно учеником (собрать экспериментальную установку, выполнить построение циркулем), оказываются неэффективными при дистанционном обучении. Ввиду недостаточного опыта дистанционного обучения много времени приходится тратить на техническую организацию урока. На сегодняшний день объем материала меньше и качество онлайн-урока ниже, чем обычного школьного урока, проведенного в классе.

Чтобы справиться с этими трудностями, многие учителя ищут разные способы «оживления» урока, привлечения учащихся к активной работе, разнообразию форм объяснения нового материала, в том числе, с помощью интерактивных технологий. Интерактивное обучение предполагает отличную от привычной логику образовательного процесса: не от теории к практике, а от формирования нового опыта к его теоретическому осмыслению через применение.

Одной из возможностей организации интерактива является применение компьютерной среды Живая математика на уроках геометрии [1]. Так как визуальное представление качественных чертежей к геометрическим задачам, предъявление подвижных зрительных образов в качестве основы для осознанного овладения научными фактами обеспечивает эффективное усвоение учащимися новых знаний и умений, предлагаем при изучении темы «Векторы» использовать компьютерную среду Живая математика, а именно ее анимационные возможности [3].

Рассмотрим пример применения анимации на уроках геометрии при изучении темы «Сложение векторов».

Свойства сложения векторов и свойства сложения чисел аналогичны, но свойства сложения чисел мы можем проверить легко, а с векторами возникают трудности. Поэтому мы предлагаем при проверке свойств сложения векторов использовать анимацию.

Данный фрагмент урока посвящен проверке переместительного свойства на практике (рис. 1).

В начале мы взяли два произвольных вектора \vec{a} , \vec{b} (рис. 1а). Далее построили сумму векторов $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 1б) и нашли длину получившегося вектора (рис. 1в). По тому же принципу построили сумму векторов $\vec{b} + \vec{a}$ и нашли сумму (рис. 1г-д).

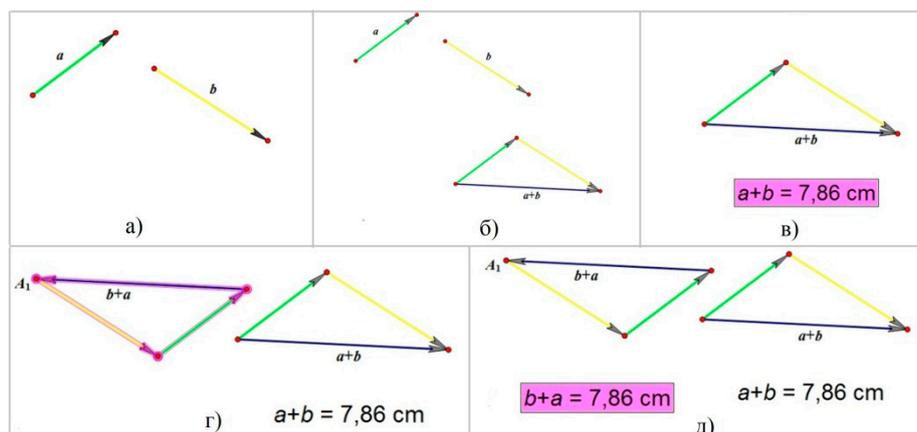


Рис. 1. Свойства сложения векторов

Каждый шаг построения сопровождался анимацией, тем самым обучающиеся могли видеть принцип сложения векторов. Кроме того, совмещение вектора $\vec{a} + \vec{b}$ с вектором $\vec{b} + \vec{a}$ позволяет сформулировать правдоподобную гипотезу о справедливости переместительного закона сложения векторов. Полное совпадение этих двух векторов визуально подтверждает коммутативность операции сложения векторов. Разумеется, считать это строгим математическим доказательством нельзя, но наглядный эксперимент, проведенный с использованием компьютерной анимации, существенно повышает понимание переместительного закона.

В заключение отметим, что использование анимации в компьютерной среде Живая математика на уроках позволяет расширить информационную область учебной дисциплины «Математика», интегрирует образовательный потенциал разных учебных дисциплин, и самое важное, позволяет заинтересовать процессом обучения большинство школьников. Считаем, что это позволит повысить качество математической подготовки. Но использование интерактивных методов обучения требует определенного изменения жизни класса, а также большого времени для подготовки, как от учащегося, так и от педагога. Использование данной компьютерной среды нужно начинать постепенно, так как и педагогу, и ученикам необходимо привыкнуть к ней и получить определенный опыт ее использования.

Библиографический список

1. Абдулкин В.В., Дерова О.В. Использование компьютерной анимации при обучении решению задач на построение методом геометрических преобразований // Материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании». Красноярск, 2018. С. 139–144.
2. Бояркина Ю.А. Живая математика как средство повышения качества математического образования // Материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании». Красноярск, 2018. С. 136–138.
3. Semina E.A., Abdulkin V.V. Dynamic Geometry Systems as a Means of Improving the Quality of Geometric Training Bachelor of Pedagogical Education // International Multidisciplinary Scientific Conference on Social Sciences and Arts SGEM2014, www.sgemsocial.org, SGEM2014 Conference Proceedings, ISBN 978-619-7105-22-3 / ISSN 2367-5659. September 1–9. 2014. Book 1, Vol. 1, 693–700 pp. DOI: 10.5593/SGEMSOCIAL2014/B11/S3.08

О ДИДАКТИЧЕСКИХ ПРЕИМУЩЕСТВАХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СРЕДЫ ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

THE DIDACTIC ADVANTAGES USING THE PORTABLE GEOMETER'S SKETCHPAD WHEN LEARNING IN SOLVING TASKS ON CONSTRUCTIONS

М.С. Дудник, А.Д. Черкасова

M.S. Dudnik, A.D. Cherkasova

Задачи на построение, компьютерная среда, Живая математика, курс геометрии, будущий учитель математики, информационные технологии в геометрии.

В статье рассматриваются основные преимущества использования динамической компьютерной среды Живая математика в обучении решению задач на построение.

Tasks on constructions, interactive system, portable geometer's sketchpad, geometry course, future teachers of mathematics, information technologies in geometry.

The article discusses the main advantages of using a dynamic computer environment Portable geometer's sketchpad in learning to solve tasks on construction.

Как известно, изучение теоретических положений курса геометрии и решение геометрических задач, причем не только в школе, но и в педагогическом вузе, сопровождается большим числом чертежей и рисунков, в основе которых лежат построения циркулем и линейкой. И если с 1 по 6 классы практически все построения выполняются на основе интуиции и здравого смысла, то в 7–9 классах учеников обучают осмыслению процесса конструирования чертежа на плоскости с помощью циркуля и линейки. Именно на этом этапе у обучающихся должны закладываться основы дедуктивного и аксиоматического стилей мышления, формироваться навыки и умения самостоятельно строить изображения простейших планиметрических фигур, формироваться пространственные представления. Учитывая, в том числе, возрастные особенности подростков, а также особенности мышления нынешнего так называемого поколения Z, сегодня обучающиеся не всегда понимают для чего они, выполняя знакомые им по младшим классам построения, должны придерживаться выполнения аксиом и специальных правил, написанных в далекие, с их точки зрения, «докомпьютерные» времена.

Выходом из этой ситуации, на наш взгляд, является широкое применение при обучении школьной математике цифровых ресурсов и систем динамической геометрии, в частности Живой математики. Любые построения в этой среде выполняются электронными аналогами циркуля и линейки на ее рабочем поле, процесс создания виртуального чертежа практически не отличается от его бумажного двойника. Подготовить студента-бакалавра педагогического вуза к исполь-

зованию этой программной среды при обучении решению задач на построение можно в таких разделах курса геометрии, как «Геометрия на плоскости» (3 семестр) и «Геометрические преобразования» (5 семестр). Чтобы мотивировать студентов на заинтересованное изучение технологий и методов применения Живой математики в конструктивной геометрии, необходимо ознакомить их с теми дидактическими преимуществами, которые получает в свое распоряжение учитель при обучении с помощью динамических чертежей в сравнении со статическими рисунками на бумаге, доске и даже компьютере.

Живая математика – это весьма гибкий инструмент, позволяющий с помощью циркуля и линейки реализовать многие геометрические замыслы. Данная программа играет важную роль в обучении решению задачи на построение, так как основными инструментами, сопровождающими решение практически любой задачи по геометрии, являются циркуль и линейка.

Для усиления традиционных возможностей классических циркуля и линейки разработчики Живой математики заложили в эту среду возможность выполнять измерения величин геометрических объектов, построенных с помощью циркуля и линейки, выполнять действия над ними. Именно эти возможности, заложенные в среду Живая математика, позволяют строить на плоскости геометрические модели, проводить математические исследования и эксперименты, превращают компьютер в мини-лабораторию.

Обучая в Живой математике решению задач на построение циркулем и линейкой, учитель может:

- визуализировать объяснения эффектными и точными чертежами;
- организовать экспериментальную исследовательскую деятельность учащихся в соответствии с уровнем и потребностями учащихся;
- увеличить разнообразие форм работы учащихся, значительно повысить долю активной творческой работы в их учебной деятельности;
- освободить время на выполнение учащимися конструктивных задач творческого характера;
- реализовать дифференциацию по уровню знаний и возможностей учеников и индивидуализировать.

Как известно, при решении конструктивных задач в учебных целях рекомендуется использовать известную схему решения, состоящую из следующих четырех этапов: анализ; синтез (построение); доказательство; исследование [1]. Этой схеме следует придерживаться и в случае использования Живой математики, которая на отмеченных этапах дает следующие позитивные дидактические преимущества.

На этапе анализа:

A_1 . Живая математика позволяет оперативно построить качественный, точный и верный чертеж, изображающий данные и искомые фигуры, находящиеся в заданных отношениях.

A_2 . При необходимости в Живой математике можно достаточно быстро изменить положение изображаемых фигур и (или) их элементов, выбрать тот ракурс, при котором лучше видны нужные соотношения.

А₃. Такие инструменты Живой математики, как выбор типа, толщины, цвета фигур, позволяют оформлять все основные и дополнительные построения без нагромождения. В этой среде обучающийся без всяких проблем может совершать неограниченное количество попыток построения без каких-либо негативных чертежных последствий.

А₄. Живая математика дает возможность учащемуся при анализе не связывать свои рассуждения с выполненным чертежом–наброском, которые невольно возникают в связи со статическим характером традиционного рисунка.

А₅. Живая математика дает возможность при анализе решения задачи методом геометрического места точек провести эксперимент, позволяющий визуализировать то множество точек, с помощью которого может быть найдено одно из решений.

А₆. Живая математика дает возможность при анализе задачи, в условии которой фигурируют суммы (разности) отрезков или углов, оперативно строить такие суммы (или) разности.

А₇. Живая математика дает возможность учителю при необходимости подготовить систему визуальных подсказок, которая ненавязчиво позволит ученику при анализе увидеть нужное соотношение между искомой и данными фигурами. Такая необходимость особенно часто возникает при решении задач с использованием геометрических преобразований.

На этапе построения:

П₁. Живая математика позволяет оформить все построения на одной странице рабочего поля, что дает возможность сразу видеть все объекты и, не путаясь, выполнять построение. Используя кнопки «Скрыть/показать» этой среды, можно подготовить презентацию с пошаговым построением чертежа.

П₂. Живая математика предоставляет возможность при решении задач методом геометрических преобразований оперативно построить образ некоторой фигуры или ее части под действием того или иного геометрического преобразования.

На этапе доказательства:

Д₁. Живая математика дает возможность на этапе доказательства производить моментальные вычисления с помощью функций меню «Измерения», в частности находить длину отрезков, расстояние между точками, отношение длин отрезков, радиус, длину окружности и т.д., что способствует скорее не самому доказательству, а его опровержению.

Д₂. Живая математика позволяет без затруднений с помощью команды «Вычислить» производить математические выкладки, которые можно использовать при доказательстве того, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи.

На этапе исследования:

И₁. Живая математика дает возможность при исследовании изменить длины данных отрезков, координаты точек или величины углов, что позволяет увидеть, имеет ли задача решение при соответствующем выборе данных фигур.

И₂. Живая математика дает возможность при исследовании изменить расположение данных фигур друг по отношению к другу, что позволяет оценить наличие искомым фигур в зависимости от различных случаев взаимного расположения.

И₃. Живая математика дает возможность при исследовании визуализировать количество решений задачи в зависимости от выбора величин данных фигур, а также в зависимости от выбора того или иного взаимного расположения данных фигур.

Отметим еще одну дидактическую возможность Живой математики, которая может использоваться на любом из рассмотренных выше этапов, – создание любым пользователем любого собственного инструмента (макрокоманды). Потребность в таком инструменте при решении задач на построение объясняется достаточно просто. Решение задач на построение основано на выполнении элементарных построений: например, нахождение середины отрезка, построение биссектрисы угла, построение прямой, параллельной или перпендикулярной данной прямой и проходящей через данную точку и т.д., поэтому обучающимся приходится неоднократно выполнять однообразные построения. Возникает вопрос, можно ли эти простейшие построения вообще не проводить, если аналогичные построения уже неоднократно проводились? Ведь именно так поступает большинство опытных специалистов, мысленно прокручивая в голове шаги построения. Но именно на этом этапе неискушенный ученик может допустить ошибку. Поэтому задача учителя математики подобрать такую методику обучения решению конструктивных задач, чтобы ученики без особого напряжения, комфортно могли не только найти ключ к задаче, т. е. выполнить самый интересный этап ее решения, но и оперативно проверить найденное решение. Именно для этой цели и следует создавать собственные инструменты пользователя, позволяющие двумя кликами мыши выполнить необходимые действия.

Подводя итог, можно сказать, что применение Живой математики имеет еще и такое преимущество, как возможность ее использования при дистанционной форме обучения: ее можно использовать на онлайн-видео-конференциях в качестве доски, можно создавать с ее помощью обучающие видео. Например, с помощью программы захвата экрана Vndicam преподаватель может записать видео, показав в Живой математике поэтапное построение динамического чертежа и прокомментировав его.

В заключение отметим, что использование всех вышеперечисленных особенностей эффективно при любом методе решения задач на построение циркулем и линейкой: методе геометрических мест точек, алгебраическом методе или методе геометрических преобразований. С помощью среды динамической математики можно открыть новую (для себя) геометрическую закономерность, сформулировать гипотезу и обосновать ее, что полностью соответствует деятельностному подходу в обучении [2].

Библиографический список

1. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости: пособие для студентов педагогических вузов. М.: Учпедгиз, 1957. 267 с.
2. Майер В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий: монография. Красноярск: РИО КГПУ, 2001. 368 с.

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО АЛГЕБРЕ В 7 КЛАССЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ В КАЧЕСТВЕ ИНСТРУМЕНТАРИЯ АНИМАЦИОННЫХ РИСУНКОВ

LABORATORY WORKS ON ALGEBRA IN CLASS 7 WITH THE USE OF ANIMATION DRAWINGS AS A TOOL

Н.В. Занько, А.А. Лариончикова

N.V. Zanko, A.A. Larionchikova

Лабораторная работа, алгебра 7 класса, системы линейных уравнений, среда GeoGebra, анимационный рисунок.

Цель статьи – продемонстрировать конкретные примеры проведения уроков по алгебре в 7 классе в форме лабораторных работ, где в качестве инструментария используются анимационные рисунки. Мы выбрали тему «Системы линейных уравнений», хотя эта форма урока будет эффективной для любой темы, поддерживая исследовательский стиль обучения математике. Использование анимационных рисунков является новым явлением в дидактике обучения математике и заслуживает внимания как проявление цифровизации образования, востребованной всеобщей цифровизацией экономики и общественных отношений.

Laboratory work, grade 7 algebra, systems of linear equations, GeoGebra environment, animation drawing.

The purpose of the article is to demonstrate specific examples of conducting algebra lessons in grade 7 in the form of laboratory work, where animation drawings are used as tools. We chose the topic “Systems of Linear Equations”, although this lesson form will be effective for any topic, supporting the research style of teaching mathematics. The use of animated drawings is a new phenomenon in the didactics of teaching mathematics and deserves attention as a manifestation of the digitalization of education, which is in demand by the general digitalization of the economy and public relations.

Форма проведения уроков математики в виде лабораторной работы разрабатывалась давно [2]. В связи с новыми цифровыми технологиями в образовании лабораторные работы приобретают актуальность как вид урока, поддерживающий экспериментально-исследовательский стиль обучения математике [1], [4], [5]. Цель статьи – демонстрация проведения уроков в форме лабораторных работ на тему «Системы линейных уравнений» в алгебре 7 класса с использованием анимационных возможностей среды GeoGebra [3].

Лабораторная работа предполагает указание оборудования. В нашем случае в состав оборудования входит персональный компьютер с установленной на нем программой GeoGebra и набор анимационных рисунков по теме лабораторной. Характерной чертой этого вида урока является экспериментирование и творчество при усвоении новых знаний.

Лабораторная работа 1. Линейное уравнение с двумя переменными

Анимационный рисунок 1 позволяет найти общее решение и частные решения линейного уравнения, если коэффициент при одной из переменных отличен от нуля. Решение первого уравнения сопровождается комментарием учителя.

Решение линейного уравнения $ax + by = c$ при $b \neq 0$

Установите $n = 1$. $\text{---} \bullet \text{---} \quad n = 3$

Установите коэффициенты $a, b \neq 0, c$.

$\text{---} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \text{---}$
 $a = -3 \quad b = 2 \quad c = 1$

Для решения уравнения установите последовательно $n = 2, n = 3$

$$-3x + 2y = 1, \quad 2y = 1 - (-3)x, \quad y = 1/(2) - (-3)/(2)x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$$

Общее решение $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$

Для нахождения частного решения

введите $x = x_1$

$\text{---} \bullet \text{---} \quad x_1 = 2$

Частное решение $(2, 3.5)$

Рис. 1

Согласно предписанию, устанавливаем $n = 1$ и вводим с помощью ползунков коэффициенты линейного уравнения (взятого из учебника или придуманного учеником). На экране появляется задуманное уравнение. Формулируем и решаем задачу: выразить переменную y через переменную x . Изменяя параметр n на ползунке, открываем шаги решения задачи. При $n = 3$ получаем общее решение уравнения. Вводим частное значение переменной x и получаем частное решение уравнения.

Анимационный рисунок 2 помогает создавать системы линейных уравнений, которые имели бы придуманное «хорошее» решение, например, целочисленное.

Создание системы двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

имеющей заданное решение (x_1, y_1)

Установите коэффициенты и заданное решение (x_1, y_1)

$\text{---} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \text{---}$
 $a = 2 \quad b = -3 \quad x_1 = -1$
 $\text{---} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \text{---}$
 $a_1 = 4 \quad b_1 = -1 \quad y_1 = 2$

Искомая система $\begin{cases} 2x + (-3)y = -8, \\ 4x + (-1)y = -6. \end{cases}$

Рис. 2

Ученику дается задание сначала создать такую систему, пользуясь анимационным рисунком 2, а затем решить ее, пользуясь анимационным рисунком 1.

Лабораторная работа 2. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки

Анимационный рисунок 3 реализует решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными, когда хотя бы в одном из уравнений хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. При этом используется метод подстановки.

Ученик устанавливает $n = 1$ и в соответствии с предписанием вводит ползунками коэффициенты данной системы линейных уравнений (рис. 3a). Каждое следующее перемещение точки n на ползунке открывает очередной шаг решения системы линейных уравнений. При первой демонстрации показ можно предварять соответствующим обсуждением. При $n = 2$ обсуждаем путь решения и договариваемся сначала из первого уравнения выразить y через x , а потом y подставить во второе уравнение. При $n = 3 - 8$ реализуется это решение. При $n = 9$ видим ответ (рис. 3d).

Решение системы

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

 методом подстановки

Перемещайте: $n = 1$

Установите коэффициенты и свободные члены :

$a = 2$ $b = -3$ $c = 5$
 $a_1 = 4$ $b_1 = -1$ $c_1 = 3$

Рис. 3a

Решение системы

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

 методом подстановки

Перемещайте: $n = 3$

$$\begin{cases} 2x + (-3)y = 5, & -3y = 5 - 2x, \\ 4x + (-1)y = 3. \end{cases}$$

Рис. 3b

Решение системы

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

 методом подстановки

Перемещайте: $n = 8$

$$\begin{cases} 2x + (-3)y = 5, & -3y = 5 - 2x, \\ 4x + (-1)y = 3. \end{cases}$$

$$y = \frac{5}{-3} - \frac{2}{-3}x = -1.67 + (0.67)x,$$

$$4x + (-1)(-1.67 + (0.67)x) = 3,$$

$$4x + (1.67) + (-0.67)x = 3,$$

$$(4 + (-0.67))x = 3 - 1.67,$$

$$x = \frac{3 - (1.67)}{4 + (-0.67)} = \frac{1.33}{3.33} = 0.4,$$

$$y = -1.67 + (0.67) \cdot (0.4) = -1.4.$$

Рис. 3c

Решение системы

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

 методом подстановки

Перемещайте: $n = 9$

Ответ : $x = 0.4, \quad y = -1.4$

Для решения следующей системы установите $n = 1$

Рис. 3d

Для следующего использования устанавливаем $n = 1$ и повторяем шаги. Если видим, что в данной системе удобно выразить другую переменную из другого уравнения, то коэффициенты нужно ввести так, чтобы можно было использовать запрограммированное решение.

Лабораторная работа 3. Способ исключения переменной

Исключение переменной состоит из двух действий: 1) уравниваем коэффициенты перед исключаемой переменной, для чего каждое уравнение системы умножаем на подходящее число; 2) из одного преобразованного уравнения вычитаем второе преобразованное уравнение.

1. Способ исключения переменной с последующей подстановкой.

Анимационный рисунок 4 демонстрирует сначала исключение переменной y и нахождение численного значения переменной x , (при перемещении n от 1 до 6, рис. 4a, 4b), а затем подстановку этого значения в первое уравнение и нахождение численного значения y (при перемещении n от 7 до 9, рис. 4c, 4d).

Решение системы

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

 методом исключения переменной
 с последующей подстановкой

Перемещайте: $n = 1$

Установите коэффициенты и свободные члены

$a = 2$ $b = -3$ $c = 5$
 $a_1 = 4$ $b_1 = -1$ $c_1 = 3$

Рис. 4a

Решение системы

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

 методом исключения переменной
 с последующей подстановкой

Перемещайте: $n = 6$

$$\begin{cases} 2x + (-3)y = 5, \\ 4x + (-1)y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \cdot 2x + (-1) \cdot (-3)y = -1 \cdot (5), \\ -3 \cdot 4x + (-3) \cdot (-1)y = -3 \cdot (3); \end{cases}$$

$$(-1) \cdot 2x - (-3) \cdot (4)x = (-1) \cdot (5) - (-3) \cdot (3), 10x = 4,$$

$$x = \frac{4}{10} = 0.4;$$

Рис. 4b

Решение системы

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

 методом исключения переменной
 с последующей подстановкой

Перемещайте: $n = 8$

$$\begin{cases} 2x + (-3)y = 5, \\ 4x + (-1)y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \cdot 2x + (-1) \cdot (-3)y = -1 \cdot (5), \\ -3 \cdot 4x + (-3) \cdot (-1)y = -3 \cdot (3); \end{cases}$$

$$(-1) \cdot 2x - (-3) \cdot (4)x = (-1) \cdot (5) - (-3) \cdot (3), 10x = 4,$$

$$x = \frac{4}{10} = 0.4; \quad -3y = 5 - 2x = 5 - 2 \cdot 0.4 = 4.2,$$

$$y = \frac{5}{-3} - \frac{2}{-3}x = 10 + (0.67)x, \quad y = \frac{4.2}{-3} = -1.4.$$

Рис. 4c

Решение системы

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

 методом исключения переменной
 с последующей подстановкой

Перемещайте: $n = 9$

Ответ: $x = 0.4, \quad y = -1.4$

Для решения следующей системы
 установите $n = 1$

Рис. 4d

Заметим, что решение, представленное на рисунке 4, содержит провокацию: ученик может с ним не согласиться и предложить выразить y через x из второго уравнения, что значительно проще. Чтобы настроить наш рисунок на осуществление этого решения, достаточно в системе уравнений x и y поменять местами и ввести коэффициенты согласно этой замене переменных. Целесообразно сначала продемонстрировать анимационный рисунок решения примера, где нет подобных провокаций. Например, решить систему для $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $a_1 = 4$, $b_1 = -2$, $c_1 = 3$.

2. Способ двойного исключения переменной. Этот способ основан на том, что мы поочередно исключаем одну переменную и получаем значение другой переменной. Анимационный рисунок 5 реализует этот способ решения.

Решение системы

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

 методом исключения переменной
 Перемещайте: $n = 2$
 Решение. 1) Исключаем переменную y

$$\begin{cases} 2x + (3)y = 5, \\ 4x + (-2)y = 3; \end{cases}$$

Рис. 5a

Решение системы

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

 методом исключения переменной
 Перемещайте: $n = 9$
 Ответ : $x = 1.19$, $y = -0.88$

Для решения следующей системы
 установите $n=1$

Рис. 5b

Ученик открывает анимационный рисунок и при $n = 1$ вводит с помощью ползунков коэффициенты при переменных в уравнениях данной системы (рис. 5a). При изменении n от 2 до 6 пошагово демонстрируется нахождение x в результате исключения переменной y . При изменении n от 7 до 8 демонстрируется нахождение y в результате исключения переменной x . Отметим, что ответ в десятичных дробях мы получаем приближенно (рис. 5b). Представляя на анимационном рисунке решение в общем виде системы двух линейных уравнений с двумя переменными методом двойного исключения переменных, получаем

формулы: $x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}$, $y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$, которые называются *формулами Крамера*.

Таким образом, каждая лабораторная работа содержит элементы творчества, экспериментирования при усвоении учебного материала. Практика применения этой формы с использованием анимационных рисунков показывает заинтересованность учащихся и, как следствие, более высокое качество знаний.

Авторы благодарят своего научного руководителя Ларина Сергея Васильевича за ценные советы и рекомендации при подготовке статьи.

Библиографический список

1. Воронько Т.А. Лабораторная работа как средство развития поисковой активности учащихся // Проблемы совершенствования математической подготовки в школе и вузе: учеб. пособие. М.: Прометей, 2000. 47 с.

2. Глаголева Л.В. Преподавание арифметики лабораторным методом // Математика и методика. Начальная школа. СПб.: печ. Графического института. 1910, 86 с. Ил.
3. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону: Легион, 2015.
4. Саяпина Н.В., Евелина Л.Н. Роль и место лабораторных работ в практике обучения школьников математике / Материалы Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования». Самара, 02–03 декабря 2016; Самарский государственный социально-педагогический университет, 2016. С. 287–294. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27615689>.
5. Хохлова К.Е. Лабораторные работы по математике как средство формирования математической культуры обучающихся // От науки к обществу: приоритетные направления преобразований и инструменты их реализации (Казань, 13 апреля 2020). Курский электромеханический техникум. С. 89–91. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=42688467>.

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КРАЕВЕДЧЕСКИХ ЗАДАЧ: ОПЫТ ПРОВЕДЕНИЯ

MATHEMATICAL SOLUTION OF REGIONAL PROBLEMS: EXPERIENCE

Е.Г. Киркина, Т.С. Ширикова

E.G. Kirkina, T.S. Shirikova

Математическое образование, краеведческие задачи, популяризация, математическая культура.

Рассматривается необходимость и опыт проведения краеведческих математических задач. Краеведческие задачи выступают в качестве средства популяризации математического образования. Обосновывается необходимость проведения конкурса краеведческих математических задач.

Mathematical education, local history problems, popularization, mathematical culture.

The article is devoted to the necessity and experience of conducting local history mathematical problems. Local history problems act as a means of popularizing mathematical education. The necessity of holding a contest of local history mathematical problems is justified.

Математической задачей можно назвать рассказ, в который введены значения некоторых величин, и необходимо найти другие известные значения величин, которые зависимы от данных и связаны с ними определенными соотношениями, о чем указано в условии [1]. Задача – это проблема, которая требует разрешения, т. е. решение задач по математике – один из путей решения проблемы и является эффективным средством формирования методов математического мышления и математической деятельности. Представляет интерес к опыту в разработке и использовании на уроках математики задач краеведческого содержания.

Во многих регионах России, например, Ярославской, Ленинградской, Саратовской, Астраханской областей, Хакасии, Татарстане, Башкортостане педагоги используют краеведческие задачи на уроках математики [1].

В Рязанской, Костромской, Тюменской и Ростовской областях изданы сборники задач по математике с использованием краеведческого материала [4]. Учителя отмечают, что необходимо привлекать детей к составлению задач с применением краеведческого компонента. Тем не менее, как отмечает Н.И. Мерлина, такой литературы не достаточно.

Необходимость издания подобных сборников задач объясняется тем, что внутри одного учебника невозможно учесть все особенности российских регионов. И как бы ни был учебник прекрасно составлен, он не сможет удовлетворить потребности учащихся в познании своего края [3].

Например, в книге Н.И. Мерлиной «Фольклорные и краеведческие математические задачи народов России» представлены фольклорные и краеведческие

математические задачи народов России, проживающих в Астраханской области, Бурятии, Татарстане, Удмуртии, Чувашии, Якутии и других регионов. В той же монографии в первой главе представлены краеведческие математические задачи города Архангельска [4] на фольклорном, историческом и краеведческом материале. Материал можно использовать в качестве средства в учебной и познавательной деятельности по овладению математическими знаниями.

Для примера представим несколько условий задач из сборника Н.И. Мерлиной о Соломбале:

Задача 1. С 1986 г. завод отремонтировал судов в 6 раз больше, чем построил лихтеров. Сколько лихтеров построил завод, если всего построено и отремонтировано 70 судов?

Задача 2. Соломбальцы с «Красной кузницы» героически сражались на фронтах Великой Отечественной войны. Только три цеха: корпусной, трубопроводный и кузнечный дали фронту 280 человек. Корпусной цех дал в 7,4 раза больше людей, чем кузнечный, а из кузнечного цеха ушло на фронт на 45 человек меньше, чем из трубопроводного. Сколько человек дал фронту каждый цех?

Задача 3. Первая часть книги «Детство в Соломбале» Е.С. Коковина составляет $\frac{3}{8}$ книги. Сколько страниц составляют две другие части («Морская школа», «Первая любовь»), если в книге всего 288 страниц?

С математическими задачами народов России, основанными на фольклорном материале, взятыми из сборника Н.И. Мерлиной, можно ознакомиться в журнале «Математика в школе» [4]. Так, учитель Л.П. Глазунова при проведении урока закрепления изученного материала по теме «Натуральные числа» использовала задачи, посвященные Маргаритинской ярмарке г. Архангельска [2]. Учителем математики Н.И. Суковой были подготовлены задачи по математике в честь 80-летия образования МОУ «Общеобразовательная гимназия № 6».

Одним из способов привлечения внимания учеников школ, педагогов и общественности Архангельской области к использованию краеведческих задач на уроках математики является проведение ежегодного областного Конкурса краеведческих математических задач «Архангельская область в математических задачах». Конкурс организуется с целью повышения интереса школьников к математике, традициям, культуре и истории родного края, развития краеведческой деятельности. Этот конкурс проходит в Архангельске с 2013 г. [7], после опыт был успешно внедрен коллегами из других регионов России, например в Чувашии и Астрахани.

На областных конкурсах, организованных в Архангельской области, было представлено более 500 краеведческих математических задач. Первый конкурс был рассчитан на учащихся 5–11 классов, в пятом конкурсе могли участвовать уже учащиеся общеобразовательных школ со 2 по 11 класс, т. е. категория участников конкурса со временем расширилась.

Задачи финалистов и участников конкурса «Архангельская область в математических задачах» стали основой для проведения следующих конкурсов по реше-

нию краеведческих математических задач «*Реши задачу – узнай об Архангельском крае*». В основном это были арифметические и алгебраические задачи, которые содержали сведения об исторических, культурных и природно-географических особенностях Архангельской области. Наиболее интересными оказались задачи, составленные учащимися СОШ № 12 и СОШ № 49 г. Архангельска [8].

Перед Днем Победы в Архангельском областном краеведческом музее была организована Всероссийская акция «*Победная ночь*», в которой приняли участие жители города. Они решали задачи участников конкурса в номинации «*Задачи об Архангельской области в годы Великой Отечественной войны*». После чего подобная деятельность также получила продолжение в рамках мероприятий «*Ночь музеев*» и «*Детский день музеев*».

Из опыта Республики Чувашия в организации конкурса для школьников: с 2015 г. проходит Конкурс краеведческих математических задач для школьников: «*Чувашская Республика в математических задачах*». Конкурс проводится в трех возрастных группах: среди учеников 1–4, 5–8 и 9–10 классов. На конкурс принимаются математические задачи, сюжет которых строится на краеведческом материале о Чувашской Республике [4].

В Республике Татарстан стал проходить аналогичный конкурс краеведческих математических задач «*Татарстан в математических задачах*», который проходил в Казани [9].

Таким образом, все больше российских регионов подхватывают инициативу проведения конкурсов краеведческих математических задач с целью формирования математической деятельности школьников и привлечения внимания учеников школ, педагогов и общественности к использованию краеведческих задач на уроках.

Библиографический список

1. Белошистая А.В. Формирование и развитие математических способностей дошкольников: Вопросы теории и практики: курс лекций для студ. дошк. факультетов высш. учеб. заведений. М.: ВЛАДОС, 2003. 400 с.
2. Глазунова Л.П. Математическое путешествие по Маргаритинской ярмарке // Северная Двина. 2007. № 2. С. 40–44.
3. Корощенко Н.А., Кушнир Т.И. Этнографическое региональное содержание как фактор формирования творческой активности учащихся в процессе обучения математике // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2015. № 6. С. 504–508.
4. Математические задачи на основе фольклорного и краеведческого материала народов России (часть 1) / Н.И. Мерлина, А.В. Мерлин, С.А. Карташова и др. // Математика в школе. 2012. № 7. С. 49–58. Режим доступа: Библиотека ИМИКТ.
5. Областной конкурс краеведческих математических задач «Архангельская область в математических задачах». URL: <http://www.uchportfolio.ru/s1366183020?page=14069> (дата обращения 29.10.2019).
6. Подведены итоги V регионального Конкурса краеведческих математических задач Архангельской области в математических задачах. URL: <http://narfu.ru/life/news/university/290145/> (дата обращения: 25.12.2019).

7. Сукова Н.И. История одной школы в задачах по математике // Северная Двина. 2006. № 6. С. 41–44.
8. Томилова А.Е. Использование краеведческих математических задач при обучении математике в школе // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: материалы II Международной научно-практической конференции, посвященной 125-летию П.А. Ларичева / М-во обр. и науки РФ; Вологод. гос. ун-т; Вологод. отд. науч.- метод. совета по матем.; Яросл. гос. пед. ун-т. им. К.Д. Ушинского. Вологда: ИП Киселёв А.В., 2017. С. 273–277.
9. Томилова А.Е., Конечная Т.А. Краеведческие математические задачи как средство популяризации математических знаний и продуктивности математического образования // Технологии продуктивного обучения математике: традиции и инновации: сборник статей участников Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Арзамас, 2016. С. 95–98.
10. Фазлеева Э.И. Республиканский конкурс краеведческих математических задач. URL: <http://kpfu.ru/math/malyj-imm/konkurs-kraevedcheskih-zadach/> (дата обращения: 15.05.2017).

ИССЛЕДОВАНИЯ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ

SATELLITE SYSTEMS RESEARCH

С.В. Ларин

S.V. Larin

Спутниковые системы, комплексные числа, кватернионы, многочлены, улитка Паскаля, обобщенные тригонометрические функции.

В статье вводится понятие спутниковой системы на плоскости или в пространстве, состоящей из планеты и спутников, где первый спутник вращается вокруг планеты, а каждый следующий спутник вращается вокруг предыдущего по круговой орбите с заданной скоростью. Дано ее геометрическое построение и алгебраическое описание. Указаны пути обобщения и различные интерпретации спутниковых систем. На основе спутниковой системы на плоскости вводятся обобщения тригонометрических функций и устанавливаются их основные свойства. В заключение кратко обсуждается роль и значение анимационных рисунков как технологической части цифровизации обучения математике.

Satellite systems, complex numbers, quaternions, Polynomial, Pascal snail, generalized trigonometry functions.

The article introduces the concept of a satellite system on a plane or in space, consisting of a planet and satellites, where the first satellite revolves around the planet, and each next satellite revolves around the previous one in a circular orbit at a given speed. Its geometric construction and algebraic description are given. The ways of generalization and various interpretations of satellite systems are indicated. On the basis of a satellite system on a plane, generalizations of trigonometric functions are introduced and their main properties are established. In conclusion, the role and significance of animated drawings as a technological part of the digitalization of teaching mathematics is briefly discussed.

1. **Описательное определение спутниковой системы.** Спутниковой системой на плоскости (или в пространстве) назовем упорядоченную совокупность точек (S_0, S_1, \dots, S_n) , где точка S_0 называется планетой, а остальные точки называются спутниками, причем для любого $t = 1, \dots, n$ спутник S_t вращается вокруг S_{t-1} по круговой орбите с заданной скоростью v_t . Решим задачу построения анимационных рисунков, изображающих спутниковые системы, а также их алгебраического описания. Кроме того, найдем формулу, выражающую расстояние в данный момент времени от планеты до данного спутника через радиусы орбит спутников. При построении анимационных рисунков будем использовать свободно распространяемую программу GeoGebra [5]. С ее анимационными возможностями можно познакомиться, например, по книге [2].

2. Конструктивное геометрическое определение спутниковой системы и ее алгебраическое описание. Набором числовых параметров спутниковой системы на плоскости назовем упорядоченный набор комплексных чисел $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ и упорядоченный набор положительных действительных чисел $\{v_1, \dots, v_n\}$. Конструктивное определение спутниковой системы на плоскости

представляет собой описание построения многочлена $f(z) = a_0 + a_1z^{v_1} + \dots + a_nz^{v_n}$ при условии, что комплексная переменная z удовлетворяет условию $|z| = 1$. При этом $S_0 = a_0$, $S_1 = S_0 + a_1z^{v_1}$, ..., $S_n = S_{n-1} + a_nz^{v_n}$.

При изображении спутниковой системы на плоскости строим единичную точку $E = (1,0)$, проводим единичную окружность и строим на ней точку Z , изображающую комплексную переменную z . Строим вектор $\overrightarrow{S_0Z}$, который назовем «часовой стрелкой». Получаем изображение часов, где «часовая стрелка» непрерывно вращается в направлении против часовой стрелки, отмеряя время. После построения спутниковой системы описанным выше способом при анимации точки Z можно убедиться, что за один полный оборот «часовой стрелки» по единичной окружности спутник S_t совершит вокруг S_{t-1} по круговой орбите v_t оборотов.

На анимационном рисунке 1 изображено построение спутниковой системы по многочлену $w(z) = a_0 + a_1z^{v_1} + a_2z^{v_2} + a_3z^{v_3}$.

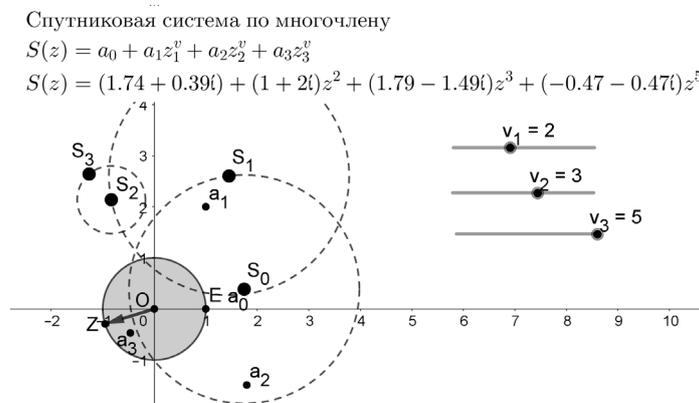


Рис. 1. Спутниковая система на плоскости

При алгебраическом описании спутниковой системы в пространстве используются кватернионы [1]. Анимационный рисунок 2 спутниковой системы в пространстве строится аналогично по многочлену $w(z) = h_1f_1(z)^{v_1} + h_2f_2(z)^{v_2} + h_3f_3(z)^{v_3}$, где коэффициентами являются чисто векторные кватернионы (с нулевой действительной частью), z – комплексная переменная с условием $|z| = 1$, знак \times обозначает векторное произведение векторов и для каждого $t = 1, 2, 3$ рассматривается изоморфное отображение f_t комплексной плоскости $C = \{x + yi \mid x, y \in R\}$ на плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору h_t , которое превращает эту плоскость в комплексную плоскость. На этом рисунке слева представлена координатная плоскость $\langle i, j \rangle$, которая рассматривается как комплексная плоскость, на ней изображена единичная окружность и точка Z , изображающая переменную z . При анимации этой точки спутниковая система приходит в движение и можно подсчитать скорость вращения любого спутника.

Для спутниковых систем найдены формулы, выражающие расстояние от планеты до любого спутника через радиусы орбит. Ключевым в этом вопросе является следующее утверждение (операция «точка» означает скалярное умножение комплексных чисел как векторов).

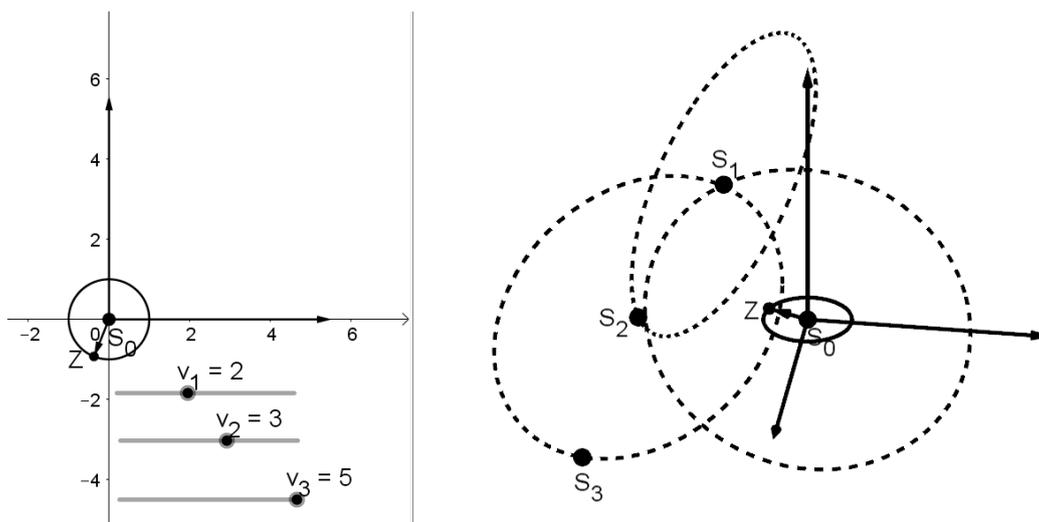


Рис. 2. Спутниковая система в пространстве

Лемма. Пусть a_1, \dots, a_n – ненулевые комплексные числа или чисто векторные кватернионы, $n \geq 2$. Тогда

$$|a_1 + \dots + a_n|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 + 2(a_1 \cdot a_2 + \dots + a_1 \cdot a_n + \dots + a_{n-1} \cdot a_n).$$

Естественным обобщением спутниковой системы является увеличение количества спутников данного спутника или планеты. Такая спутниковая система на плоскости алгебраически описывается совокупностью многочленов.

3. Различные интерпретации спутниковых систем. Пусть дана спутниковая система (S_0, S_1, \dots, S_n) на плоскости или в пространстве. Соединяя отрезками соседние спутники и последний спутник с планетой, получаем многоугольник. Прежнюю формулу расстояния от планеты до последнего спутника можно рассматривать как выражение стороны многоугольника через остальные его стороны. Получаем обобщение известной теоремы косинусов для треугольника.

Можно предложить следующий переход от спутниковой системы на плоскости к так называемой улиточной конструкции [3]. Строим окружность с центром в начале координат произвольного радиуса d (на рисунке 3 параметр d задан ползунком) и отмечаем точку T_1 пересечения луча S_0S_1 с построенной окружностью. Затем строим окружность с центром в точке S_1 , проходящую через точку T_1 , и отмечаем точку T_2 пересечения этой окружности с лучом S_1S_2 . И так далее, последняя окружность имеет центр S_{n-1} , проходит через точку T_{n-1} и пересекает луч $S_{n-1}S_n$ в точке T_n . В результате получаем последовательность окружностей, где каждая окружность, начиная со второй, касается внутренним или внешним образом предыдущей окружности. Эта совокупность окружностей вместе с точкой S_n называется улиточной конструкцией, а линия, которую вычерчивает точка S_n , называется улиткой Паскаля порядка n . При $n = 2$ получаем две окружности, и если их радиусы равны, а качение второй по первой происходит без скольжения, то кривая, вычерчиваемая точкой S_1 , является известной улиткой Паскаля, которую исследовал Этьен Паскаль – отец более известного математика Блеза Паскаля.



Рис. 3. Улиточная конструкция

Подобным образом можно построить улиточную конструкцию в пространстве, заменяя построение окружностей на построение сфер.

4. Обобщения тригонометрических функций, связанные со спутниковыми системами на плоскости. Пусть дан многочлен с комплексными коэффициентами $f(z) = a_1z^{p_1} + \dots + a_nz^{p_n}$, где $0 < p_1 < \dots < p_n$ и $|z|=1$. Пусть комплексная переменная z изображается точкой Z на единичной окружности. Если рассматривать единичную окружность как числовую окружность, то z можно трактовать как действительную переменную, которую будем обозначать \hat{z} . Определим новые тригонометрические функции следующим образом:

$$\text{sinus}(\hat{z}, f(z)) = y(f(z)),$$

$$\text{cosinus}(\hat{z}, f(z)) = x(f(z)).$$

Если $f(z) = z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, то $\text{sinus}(\hat{z}, z) = y(z) = \sin \varphi$, $\text{cosinus}(\hat{z}, z) = x(z) = \cos \varphi$. Это дает нам право говорить, что введенные тригонометрические функции являются обобщениями соответственно функций $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ от действительной переменной $\hat{z} = \varphi$. На рисунке 4 построен график обобщенной тригонометрической функции $y = \text{sinus}(\hat{z}, f(z))$ для многочлена $f(z) = a_1z^{p_1} + a_2z^{p_2} + a_3z^{p_3}$.

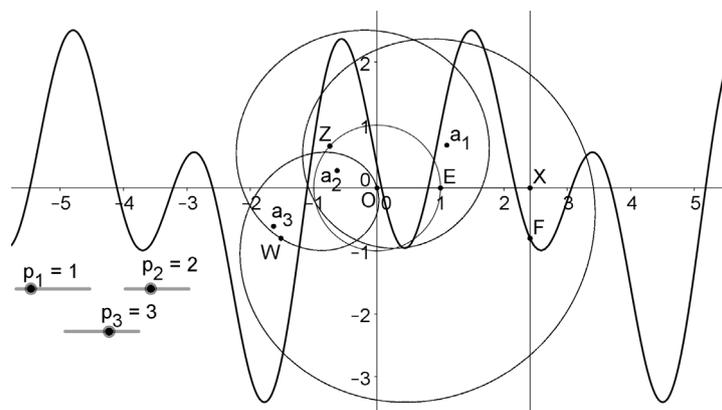


Рис. 4. График функции $y = \text{sinus}(\hat{z}, f(z))$

На рисунке 4 можно поэкспериментировать, изменяя положения точек, изображающих коэффициенты данного многочлена и значения параметров на ползунках. Аналогично строится график обобщенной тригонометрической функции $y = \text{cosinus}(\bar{z}, f(z))$.

Обобщение основного тригонометрического тождества имеет вид: $\text{sinus}^2(\bar{z}, f(z)) + \text{cosinus}^2(\bar{z}, f(z)) = |f(z)|^2$.

Теперь введем обобщения тригонометрических функций tgx и ctgx :

$$\text{tangens}(\bar{z}, f(z)) = \frac{\text{sinus}(\bar{z}, f(z))}{\text{cosinus}(\bar{z}, f(z))},$$

$$\text{cotangens}(\bar{z}, f(z)) = \frac{\text{cosinus}(\bar{z}, f(z))}{\text{sinus}(\bar{z}, f(z))}.$$

Найдена связь между функциями sinus (cosinus) и \sin (\cos): если $f(z) = a_1 z^{p_1} + \dots + a_n z^{p_n}$ и для любого $j = 1, \dots, n$ $a_j = r_j (\cos \alpha_j + i \sin \alpha_j)$, $z = \cos \bar{z} + i \sin \bar{z}$, то $\text{sinus}(\bar{z}, f(z)) = r_1 \sin(\alpha_1 + p_1 \bar{z}) + \dots + r_n \sin(\alpha_n + p_n \bar{z})$; $\text{cosinus}(\bar{z}, f(z)) = r_1 \cos(\alpha_1 + p_1 \bar{z}) + \dots + r_n \cos(\alpha_n + p_n \bar{z})$.

Найдены аналоги формул синуса и косинуса суммы и разности двух аргументов и формул приведения.

5. Методические аспекты. Анимационные рисунки, приведенные выше, эффективно использовались при моделировании изучаемых объектов и поиске закономерностей, а также при проверке полученных формул.

В общем плане анимационные рисунки можно использовать для устранения вычислительных трудностей, поручая вычисления компьютеру, для визуализации математических понятий и утверждений, для реализации алгоритмов, для создания «хороших» примеров, чтобы ученик при их решении получил «хороший» ответ и испытал морально-эстетическое удовлетворение. Они поддерживают исследовательский стиль обучения математике. Для создания тестов можно использовать возможности показать/скрыть объект анимационного рисунка, или показать его в нужный момент, определяемый условиями видимости. Самостоятельное изготовление анимационных рисунков учащимся может стать темой учебно-исследовательской работы.

В какой бы уголок математики мы ни заглянули, всюду можно найти применение анимационным возможностям компьютерных сред. Вместе с тем на первом месте должна стоять математика с ее проблемами и задачами, а анимационные рисунки представляют собой лишь весьма эффективное средство обучения математике [4].

Библиографический список

1. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 244 с.
2. Ларин С.В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде GeoGebra: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2018. 233 с.

3. Ларин С.В. Спутниковые системы как анимационно-геометрические модели полиномов. *Matematica and Informatics. Bulgarian Journal of Educational Research and Practics*. 2020. Volume 63. Number 4. С. 441–452.
4. Ларин С.В. Компьютерная анимация на уроках алгебры и начал математического анализа // Математическое образование в цифровом обществе: материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. 26–28 сентября 2019. С. 100–102.
5. GeoGebra: официальный сайт. URL: <http://www.geogebra.org>

РОЛЬ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

ROLE OF COMPUTER ANIMATION IN THE STUDY CONIC SECTIONS

С.В. Ларин, А.П. Елисова

S.V. Larin, A.P. Elisova

Аналитическая геометрия, конические сечения, кривые второго порядка, анимационные рисунки, среда GeoGebra.

Авторы подготовили к изданию учебное пособие «Аналитическая геометрия с анимационными рисунками». Цель статьи – представить его концепцию, роль и значение анимационных рисунков при изучении аналитической геометрии и кратко изложить содержание главы, посвященной коническим сечениям. В качестве эффективного средства визуализации геометрических понятий выступает интерактивная среда GeoGebra.

Analytic geometry, conic sections, second order curves, animated drawings, the Geogebra environment.

The authors have prepared a textbook «Analytical geometry with animated drawings» for publication. The purpose of the article is to present its concept, the role and significance of animated drawings in the study of analytical geometry, and briefly to describe the content of the Chapter on conic sections. The interactive GeoGebra environment is an effective tool for visualizing geometric concepts.

Анимационные возможности компьютерных сред открывают новые перспективы повышения качества обучения математике в свете цифровизации образования, что востребовано современным обществом, поставившим перед педагогическими вузами задачу подготовки учителей, владеющих этими новыми технологиями, способных воспитать новое поколение школьников, призванных раскрыть свой творческий потенциал в условиях цифровой экономики и цифровизации общественных связей. Эти основополагающие идеи положены в основу подготовленного авторами к изданию учебного пособия «Аналитическая геометрия с анимационными рисунками». Его электронная версия представляет собой учебный текст, сопровождаемый иллюстративными рисунками, причем от каждого рисунка в тексте по гиперссылке можно открыть его анимационный аналог, поэкспериментировать на нем, а затем закрыть, не сохраняя, и вернуться к продолжению чтения. Анимационные рисунки, выполненные в среде GeoGebra [5], не только иллюстрируют рассматриваемые объекты, но и проверяют доказательства, а иногда и заменяют их. При этом мы в полной мере доверяем компьютерным вычислениям и изображениям, выполненным на их основе.

При создании анимационного рисунка мы используем следующие виды анимации [2, 3]: геометрическая анимация, основанная на сохранении последовательности построения чертежа при перемещении его исходных объектов, пол-

зунковая анимация, позволяющая отслеживать изменение объекта (или формулы) при изменении одного из параметров, и обусловленная анимация, которая задает видимость объекта в зависимости от заданных условий. В частности, при организации (само)проверки знаний мы используем встроенный инструмент, позволяющий скрыть/открыть ответ.

Использование анимационных рисунков позволяет сначала продемонстрировать свойства изучаемого объекта, и только потом обосновать аналитически увиденное на компьютерном экране. Это делает аналитические выкладки более мотивированными, осмысленными и целенаправленными.

Вместе с тем подчеркнем, что на первом месте стоит математика (в данном случае геометрия) с ее проблемами и задачами, а анимационные рисунки являются лишь средством обучения, представляющим элементы цифрового образования. Одновременно обучаемый приобщается к компьютерным технологиям, что поможет ему в дальнейшем реализовать свои творческие возможности в условиях цифровой экономики.

По содержанию учебное пособие включает весь традиционный обязательный материал по аналитической геометрии. В качестве примера изложения учебного материала в пособии представим более подробно содержание главы «Конические сечения». Если в превосходном во многих отношениях учебнике [1] конические сечения появляются в конце главы «Аналитическая геометрия на плоскости» (§ 40, с. 128), то мы предлагаем начинать изучать кривые второго порядка с наглядно-геометрического материала о сечениях конуса плоскостью. Демонстрируется анимационный рисунок 1, на котором при анимации точки T точка R рисует коническое сечение, в данном случае гиперболу. Положение секущей плоскости можно изменять перемещением точек M и Z , получая вычерчивание либо эллипса, либо параболы, либо гиперболы.

От этого «пространственного» определения конических сечений мы переходим к их «плоскостным» определениям как множеству точек плоскости, удовлетворяющим определенным условиям. Делается это с помощью сфер Данделена, вписанных в конус и касающихся секущей плоскости в точках, являющихся фокусами конического сечения (рис. 2, который является продолжением рис. 1, лишние линии построения спрятаны).

На основе плоскостного определения каждого конического сечения мы показываем способ его анимационного вычерчивания. Соответствующие рисунки хорошо известны, и мы их здесь не приводим. После вывода канонического уравнения конического сечения нужно доказать обратное, например, что всякое уравнение вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ определяет эллипс. Оставляя аналитическое доказательство для «математических гурманов» (в учебнике [1] это доказательство занимает полторы страницы), предложим для «рядового» студента вполне убедительное анимационно-геометрическое доказательство этого утверждения, представленное на рис. 3. На нем кривая получена вводом уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

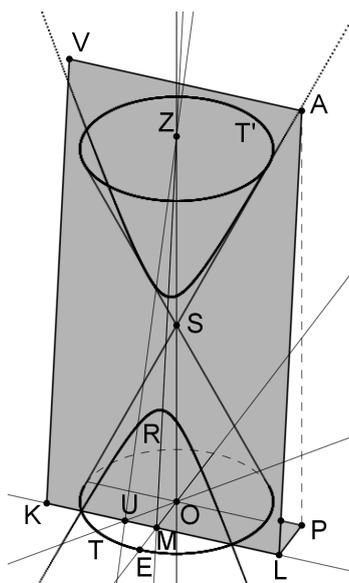


Рис. 1. Определение гиперболы

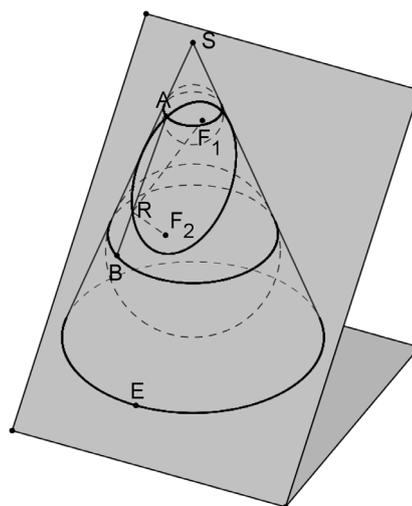


Рис. 2. Определение параболы

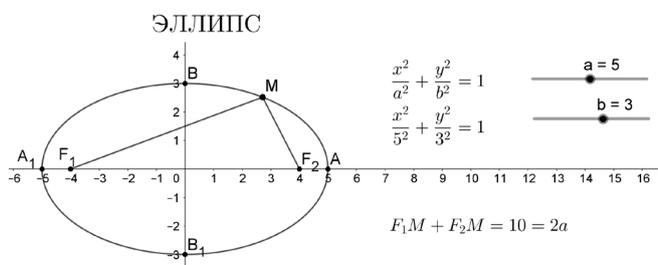


Рис. 3. Эллипс

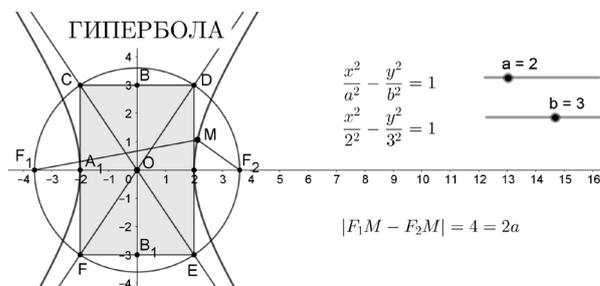


Рис. 4. Гипербола

Параметры a и b заданы ползунками и их можно изменять. Чтобы доказать, что эта кривая является эллипсом, нужно убедиться в выполнении свойства, определяющего эллипс. Вводим число $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ при $a > b$, строим фокусы $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, отмечаем на исследуемой кривой точку M , строим отрезки F_1M , F_2M и вводим их сумму. Убеждаемся, что $F_1M + F_2M = 2a$. Включаем анимацию точки M по эллипсу и убеждаемся, что это равенство сохраняется при любом положении точки M . Следовательно, данная кривая является эллипсом. Рисунок 3 легко трансформируется в рисунок 4: надо только вместо уравнения эллипса ввести уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и ввести $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Для гиперболы соответствующее аналитическое доказательство в учебнике [1] занимает еще полторы страницы, в то время как мы предлагаем использовать готовые анимационные рисунки и тем самым экономить драгоценное время. На анимационных рисунках можно увидеть все свойства соответствующей линии, а потом аналитически доказать их, исследуя каноническое уравнение. Это соответствует исследовательскому стилю обучения: от экспериментов к математическому обоснованию. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду также сопровождается анимационными рисунками, позволяющими формальные преобразования сделать зримыми.

В заключение демонстрируем анимационный рисунок 5, показывающий вид кривой второго порядка в зависимости от эксцентриситета, регулируемого ползунком.

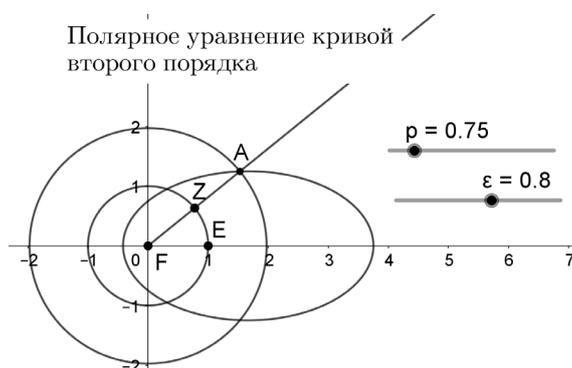


Рис. 5. Полярное уравнение кривой второго порядка

В упражнениях предлагается открыть ggb-файл, ввести ползунками параметры $a > 0$, $\varepsilon \geq 0$ и поэкспериментировать с уравнением $x^2(1 - \varepsilon) + y^2 = a^2(1 - \varepsilon)$, наблюдая, как при изменении эксцентриситета эллипс преобразуется в гиперболу, и обратно.

В качестве дополнительного материала к этой главе выведены формулы площадей сегментов конических сечений [4].

Таким образом, анимационные рисунки становятся основой исследовательского стиля обучения, позволяя от наблюдений перейти к математическому обоснованию увиденного, от экспериментирования – к доказательству теоремы с последующим анимационно-геометрическим моделированием утверждения.

Библиографический список

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1969. 272 с.
2. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с.
3. Ларин С.В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде GeoGebra. 2-е изд., исправ. и доп.: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2018. 233 с.
4. Ларин С.В. Формулы для нахождения площадей сегментов кривых второго порядка // Математика в школе. 2015. № 1. С. 26–35.
5. Официальный сайт программы GeoGebra [Электронный ресурс]. URL: <https://www.geogebra.org/> (дата обращения: 12.10.2020).

МОЖНО ЛИ ОБУЧАТЬ МАТЕМАТИКЕ ДИСТАНЦИОННО?

IS IT POSSIBLE TO STUDY OF MATHEMATICS REMOTELY?

В.Р. Майер

V.R. Mayer

Живая математика, дистанционное обучение, основания геометрии, дифференциальная геометрия.

Исследуются возможности применения системы динамической геометрии Живая математика при дистанционном обучении геометрическим курсам педвуза. В работе обсуждаются авторские методики, посвященные обучению студентов – будущих учителей математики курсам дифференциальной геометрии и основаниям геометрии с использованием электронной информационно-образовательной среды (ЭИОС) вуза в условиях дистанционного обучения.

The Geometer's Sketchpad, remote instruction, the base of geometry, the differential geometry.

Are investigated the possibilities of applying the system of dynamic geometry Living mathematics with the remote instruction in geometric courses of pedagogical institute. In the work are discussed the author's procedures, dedicated to the instruction of the students – of the future teachers of mathematics in the courses of differential geometry and in the bases of geometry with the use of an electronic information-educational medium of Institute of higher education in the conditions for the remote instruction.

О тметим сразу, что в статье не будет дан ответ на риторический вопрос, сформулированный в ее заглавии. Такой заголовок выбран с целью привлечь внимание исследователей к актуальной в наше время проблеме дистанционного обучения. О том, что такая форма обучения должна иметь место, причем «не только как результат реакции на сиюминутные потребности общества, а являться одной из обычных форм работы образовательных организаций», заявила недавно на одном из совещаний с участием представителей образовательного сообщества вице-премьер Правительства РФ Татьяна Голикова.

Как известно, в докомпьютерный период развития общества термин «дистанционное обучение» использовался не так часто и ассоциировал в первую очередь с обучением студентов-заочников, которым отправлялись обычной почтой учебные материалы и задания на бумажных носителях. Что касается современной эпохи, связанной с информатизацией общества и образования, то и здесь не все однозначно. Так, в целом ряде сравнительно небольших по территории стран, даже в тех, которые имеют высокоразвитую IT-индустрию, дистанционные формы обучения применяются лишь в отдельных случаях, причем для тех целевых групп, обучение которых в очной форме трудно реализуемо.

В России сторонников использования дистанционного обучения, особенно после обострения эпидемиологической обстановки, стало существенно больше. Однако тех, кто сомневается в возможности качественной математической подго-

товки школьников и студентов на основе дистанционных форм обучения, меньше не стало. И это понятно. Ведь процент обучающихся, способных самостоятельно освоить ту или иную математическую дисциплину, используя для этого учебники и учебно-методические пособия на бумажных и даже электронных носителях, как и прежде остается небольшим. Один из аргументов, который высказывают противники обучения математике с использованием информационных и сетевых технологий, и с которым трудно не согласиться, можно выразить короткой фразой: «Невозможно качественно обучать математике, если не видишь глаза обучающегося».

До недавнего времени, при выборе ответа на вопрос «Можно ли дистанционно обучать математике?» мы бы выбрали скорее «Нет», чем «Да». Ситуация изменилась после того, как весной и осенью 2020 года нам пришлось прочитать геометрические дисциплины для студентов педвуза, используя дистанционную форму обучения.

Первая дисциплина, обучение которой состоялось в марте–апреле 2020 г. и полностью проходило в дистанционном формате, была дифференциальная геометрия. Особенность ее изучения в педвузе – большое внимание уделяется решению задач, связанных с исследованием линий и поверхностей. Такое направление было сохранено и в условиях дистанционного обучения. В ЭИОС вуза нами кроме электронной версии учебного пособия [2], файлов с лекциями и семинарскими занятиями были выставлены по два индивидуальных задания для каждого студента.

В первом задании каждого из вариантов была задана линия в пространстве конкретной вектор-функцией $\vec{r}(t)$, указана некоторая точка M на этой линии. Требовалось вычислить дифференциально-геометрические инварианты линии в точке M , написать уравнения ребер и граней естественного трехгранника. Кроме этого, необходимо было выяснить строение этой линии, построив ее изображение в некоторой окрестности M , изобразить репер Френе. Во втором задании объектом исследования являлась уже поверхность, заданная вектор-функцией $\vec{r}(u, v)$, указана на этой поверхности точка M . Как и в первом задании, помимо нахождения дифференциально-геометрических инвариантов поверхности и уравнений касательной плоскости и нормали, необходимо было построить изображение поверхности, определить тип точки M и строение поверхности в некоторой ее окрестности, изобразить касательную плоскость и нормаль к поверхности в точке M .

Для изображения объектов и проведения необходимых вычислений студенты могли использовать имеющуюся у них среду Живая математика, учебно-методические рекомендации [1] по ее применению. Преимущество Живой математики перед аналогичными программными средствами заключалось в том, что студенты имели опыт ее применения в основном курсе геометрии. В их распоряжении была коллекция инструментов, разработанных ими в среде Живая математика. Вот неполный перечень таких инструментов: «Подвижный 3D-репер» (он был создан при изучении темы «Методы изображений» курса геометрии), «Точ-

ка в пространстве по ее координатам» (создан при изучении темы «Аксонометрия»), «Откладывание вектора от точки в пространстве», «Векторное произведение векторов» (созданы при изучении темы «Векторы»).

При выполнении обоих заданий с помощью этих и встроенных в среду Живая математика инструментов на ее рабочем поле последовательно строились изображения: подвижного 3D-репера; заданной точки M вместе с ее проекцией на плоскость xOy ; линии или поверхности по вектор-функциям одного или двух скалярных аргументов. Поскольку Живая математика сама ничего не делает, то обучающиеся должны были вручную найти все необходимые производные вектор-функции; используя вычислительные возможности среды, подсчитать значения этих производных в точке M ; найти векторные произведения векторов, нормировать их и отложить от точки M .

На рисунке 1 (а) представлен результат выполнения одного из вариантов первого задания. Построено изображение репера $\{O, E_1, E_2, E_3\}$; кривой, заданной вектор-функцией $\vec{r}(t) = (at; bt^3, c(t^2+4))$ с параметрами $a=b=c=1$; точки M , соответствующей значению переменной $t = 1$; проекции кривой и точки M на плоскость OE_1E_2 ; единичных векторов касательной (\overline{MT}), главной нормали (\overline{MN}) и бинормали (\overline{MB}); соприкасающейся плоскости MNT . Подсветив параметр t и изменяя с помощью клавиш «+» или «-» его значение, можно перемещать точку M вместе с отложенными от нее базисными векторами репера Френе, наблюдая в режиме реального времени за поведением последнего. Помимо представленного на рисунке 1 (а) изображения геометрических фигур на рабочее поле выводились текстовые объекты, содержащие все требуемые уравнения ребер и граней трехгранника Френе, координаты его базисных векторов, кривизна и кручение кривой. Это позволяло при перемещении точки M одновременно отслеживать изменения дифференциально-геометрических инвариантов кривой.

На рисунке 1 (б) представлен результат выполнения одного из вариантов второго задания. Построено изображение подвижного 3D-репера $\{O, E_1, E_2, E_3\}$; поверхности, заданной вектор-функцией $\vec{r}(u, v) = (au^3; bv^3, au+bv)$ с параметрами $a=1, b=0,9$ в виде семейства ее u - и v -линий; точки M , соответствующей значению скалярных переменных $u=0,75, v=1$; проекции на плоскость OE_1E_2 двух u - и v -линий, содержащих точку M ; единичных векторов касательных к u -линии и v -линии, нормали и касательной плоскости. Подсветив одну из переменных u или v , и изменяя с помощью клавиш «+» или «-» ее значение, можно перемещать точку M вместе с проходящими через эту точку u - и v -линиями (на рисунке они выделены полужирным), наблюдая в режиме реального времени за поведением касательной плоскости и нормали. Интерес представляет прохождение M через особые точки, если они есть на поверхности. Помимо изображения геометрических фигур на рабочее поле выводились текстовые объекты, содержащие информацию по всем требуемым дифференциально-геометрическим инвариантам поверхности, включая коэффициенты первой и второй квадратичных форм, среднюю и полную кривизну поверхности, тип точки M .

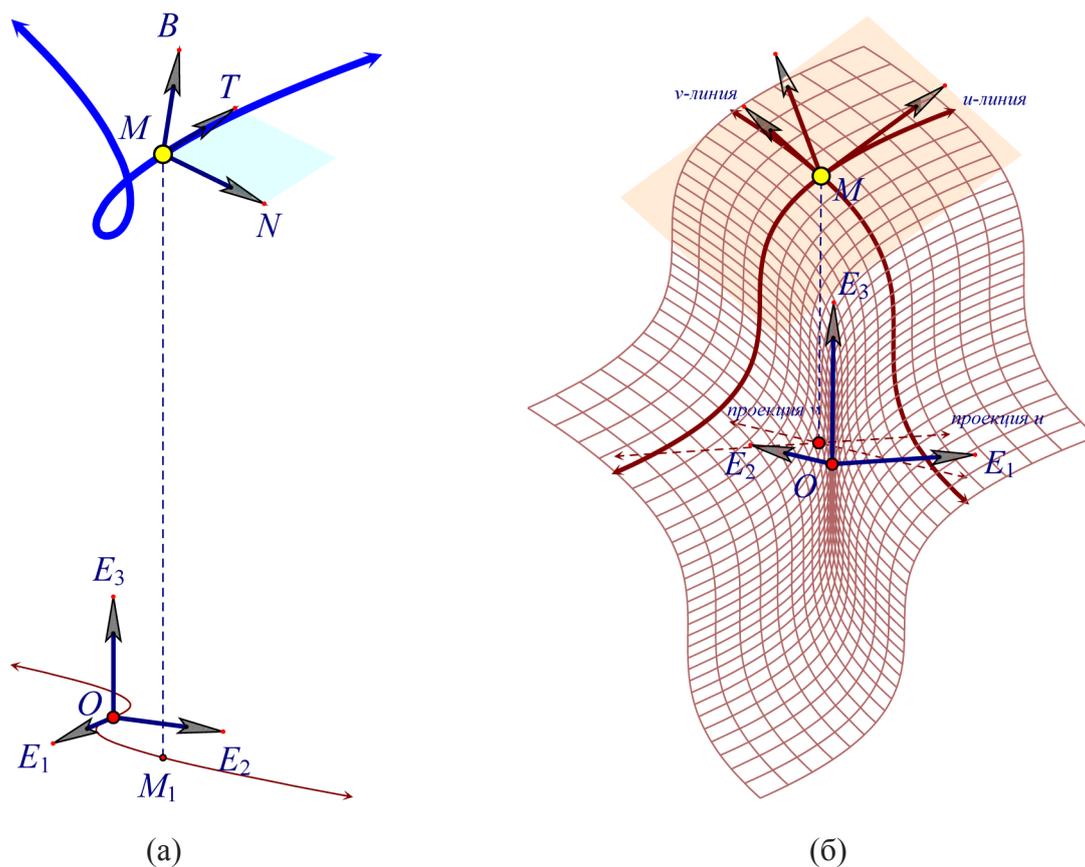


Рис. 1

Следует отметить, что большинство студентов успешно применяли вычислительные возможности используемых программных средств для нахождения дифференциально-геометрических инвариантов линии и поверхности. Однако лишь немногим из них удалось построить требуемые изображения в среде Живая математика, большинство довольствовалось наброском чертежа от руки на листе бумаги. Сказывалось и отсутствие личных контактов между студентом и преподавателем, и небольшое количество часов на этот курс, и самостоятельное освоение теории и практики. Проанализировать все это еще предстоит автору и его магистранту, прошедшему обучение этому курсу в качестве студента.

Отмеченные недочеты были учтены осенью при дистанционном обучении студентов пятого курса дисциплине «Основания геометрии» в течение сентября, октября и первой недели ноября 2020 г. В ЭИОС вуза прикреплялись текстовые файлы лекций, в которых все чертежи были выполнены в среде Живая математика. Учитывая проблемы, возникшие весной при освоении студентами теории, для каждой лекции создавался видеоролик с использованием программы захвата экрана Vändicam, текстового файла лекции и среды Живая математика. Несмотря на то, что продолжительность по времени каждого ролика занимала не более 30 минут, оказалось, что он без больших потерь заменяет полуторачасовую лекцию очного формата. За счет чего удавалось сэкономить учебное время? Прежде всего, за счет того, что при просмотре ролика в распоряжении студента одновре-

менно находился текст комментируемой в ролике лекции, в связи с этим преподавателю не надо было тратить время на его озвучивание, на запись заголовков, определений, формулировок теорем. Ему достаточно было лишь прокомментировать те проблемные разделы, которые могут вызвать затруднения; остановиться на наиболее сложных темах лекции; озвучить то, что не записано в тексте; обратить внимание на вопросы, выносимые на семинар.

Неоценимую помощь лектору при создании ролика может оказать среда Живая математика. При доказательстве очередного утверждения, связанного с использованием чертежа, а в геометрических дисциплинах таких немало, текстовый файл лекции заменяется страницей в среде Живая математика, содержащей подготовленный чертеж. Если создание чертежа не отнимает много времени, то его построение можно выполнить непосредственно при записи ролика. В геометрии Лобачевского чаще всего чертежи достаточно сложные. В этом случае их необходимо готовить заранее. Используя кнопки «скрыть/показать», «анимация», а также встроенные в среду инструменты и инструменты-макрокоманды, чертеж разбивается на последовательность элементарных построений, которые появляются после нажатия соответствующей кнопки. В некотором смысле процесс создания на экране динамической модели чертежа напоминает построение аналогичных рисунков на обычной доске. Но только качество их изображения на порядок выше, чем рисунок фломастером или мелом. Кроме этого, у ролика есть еще одно очевидное преимущество: обучающийся в любой момент может его остановить, осмыслить увиденное и услышанное, самостоятельно выполнить проблемные выкладки или построения, повторно пересмотреть любой фрагмент ролика. Все волнующие вопросы студент задает преподавателю в чате ЭИОС вуза.

Именно такие ролики были созданы к восьми из десяти лекций по основаниям геометрии, выставлены в Облако, ссылки на каждую из них прикреплены вместе с соответствующей лекцией в ЭИОС вуза. Последняя десятая лекция и ролик к ней были выставлены в начале ноября 2020 г. Кроме лекций, к курсу по основаниям геометрии прикреплялись задания к семинарским занятиям. В каждом видеоролике большое внимание уделялось вопросам, связанным с выполнением семинарского занятия по теме лекции, обсуждаемой в этом ролике. Помимо заданий, выносимых на семинарские занятия, каждый студент получил индивидуальное задание, связанное с доказательством эквивалентности аксиомы параллельности и одного из утверждений планиметрии Евклида.

Завершая статью, коснемся вопроса, связанного с нашей оценкой результатов дистанционного обучения студентов курсам дифференциальной геометрии и основаниям геометрии. Формой итогового контроля по каждому из них являлся зачет. Сначала о весеннем зачете по курсу дифференциальной геометрии. Поскольку баллы, набранные студентами в ЭИОС по итогам выполнения заданий текущих семинарских занятий большого доверия не вызывали, было проведено в режиме видеоконференции зачетное собеседование. Студент, вышедший на связь для собеседования, получал вопрос для зачета из фонда оценочных средств

дисциплины. Ему предлагалось открыть лекцию, содержащую материал по его вопросу, и отвечать, имея его перед глазами. Точно такой же файл открывался и преподавателем. Как оказалось, студенты, которые понадеялись на авось и готовились к зачету спустя рукава, не могли ответить на большинство простейших вопросов. Им не удавалось объяснить, на основании чего сделан тот или иной вывод, выполнены те или иные выкладки, осуществлены те или иные построения. Не помогали и традиционные для контроля знаний в условиях дистанционного обучения небольшие хитрости, такие как звонок по телефону: «У нас в деревне нет света. – А телефон работает? – Да! – Конспект лекций или учебник под рукой? – Да. – Открывайте его и отвечайте на свой вопрос. – Я себя плохо чувствую, можно в другой раз?». Большинство студентов, в том числе все те, кто выполнял задание с использованием Живой математики, успешно прошли зачетное собеседование.

Что касается результатов обучения основаниям геометрии, зачет по которому студентам предстоит сдавать в конце декабря 2020 г., то перспективы здесь более радужные. Все текущие задания большинством студентов выполнены на 100 баллов, индивидуальные задания сдавались в очном формате, их результаты хоть и не отличные, но вполне добротные.

Поводя итог, отметим что, несмотря на проблемы, которые остаются не решенными при дистанционном обучении математике, плюсов от его применения явно больше, чем минусов. А самым оптимальным, на наш взгляд, является очное обучение, в котором используется все положительное из дистанционного формата обучения.

Библиографический список

1. Живая математика 5.0: сборник методических материалов / сост.: Г.А. Аджемян и др. М.: ИНТ, 2013. 205 с.
2. Майер В.Р., Абдулкин В.В., Апакина Т.В. Двенадцать лекций по дифференциальной геометрии: учебное пособие / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2016. 112 с.

ПОСТРОЕНИЕ АНИМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

CONSTRUCTION OF ANIMATION MODELS IN THE INTERACTIVE APPLICATION GeoGebra FOR SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS

В.А. Малыхин

V.A. Malykhin

Компьютерная анимация, динамическая модель, GeoGebra, геометрическая задача, обучение математике.

В статье обсуждаются анимационные возможности динамической среды GeoGebra при решении планиметрических задач. Рассматривается планиметрическая задача на нахождение максимума площади прямоугольника, вписанного в параллелограмм, связанная с теоремой Зюсса. В GeoGebra строится динамическая модель, связывающая исследование функции на максимум с геометрической интерпретацией ее значений – построением вписанного прямоугольника соответствующей площади.

Computer animation, dynamic model, GeoGebra, geometric problem, teaching mathematics.

The article discusses the animation capabilities of the interactive application GeoGebra for solving planimetric problems. We consider a planimetric problem to find the maximum area of a rectangle inscribed in a parallelogram, related to the Suss theorem. In GeoGebra, a dynamic model was created that connects the finding of a function maximum with a geometric interpretation of its values that corresponded to an inscribed rectangle of the corresponding area.

Современные информационные технологии позволяют решить практически любую геометрическую задачу с конкретными числовыми данными из школьного курса геометрии [3]. Например, несложно получить решение задачи, используя геометрическую динамическую среду GeoGebra. Сложнее установить взаимосвязи между теми данными, которые указаны в условии задачи. В таком случае необходимо построить математическую модель, в которой требуется найти связи между величинами из условия задачи, которые, как правило, описываются функциями от одной или нескольких переменных. Умение строить математические модели при решении задач – важная составляющая профильной подготовки будущего учителя математики [3; 4; 5].

Процесс моделирования и исследования задачи можно сделать наглядным и удобным для восприятия и проверки полученных результатов, используя динамические приложения, например, GeoGebra [2; 3]. При построении модели для геометрической задачи удобно описать не только функции, устанавливающие зависимость между величинами в условиях, но и получить визуальные изображения геометрических объектов, которые строятся в процессе решения задачи.

Для обучения использованию GeoGebra при построении математической модели целесообразно выбирать такие геометрические задачи, в которых исследование можно свести к исследованию функций (например, отысканию ее максимума или минимума) [4; 5].

Приведем пример геометрической задачи, для решения которой требуется построить не только аналитическую модель, а также требуется получить геометрическую интерпретацию и наглядный динамический чертеж.

Задача. Вписать в параллелограмм $ABCD$ прямоугольник. Найти наибольшую площадь вписанного прямоугольника.

Замечание. Эта экстремальная геометрическая задача связана с теоремой В. Зюсса [1]: какую наибольшую часть от площади данного параллелограмма с большей стороной b , высотой h и проекцией меньшей стороны a на основание b может составлять площадь вписанного в него прямоугольника.

Известно, что для рассматриваемой нами задачи отношение может быть больше, но в общем случае построение искомого прямоугольника циркулем и линейкой невозможно [1].

Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 1). Обозначим большую сторону (основание) $AD = b$, a – проекция стороны DC на основание, h – высота параллелограмма. Пусть искомым прямоугольником $M_0M_1M_3M_2$, k – угловым коэффициентом прямой M_0M_2 .

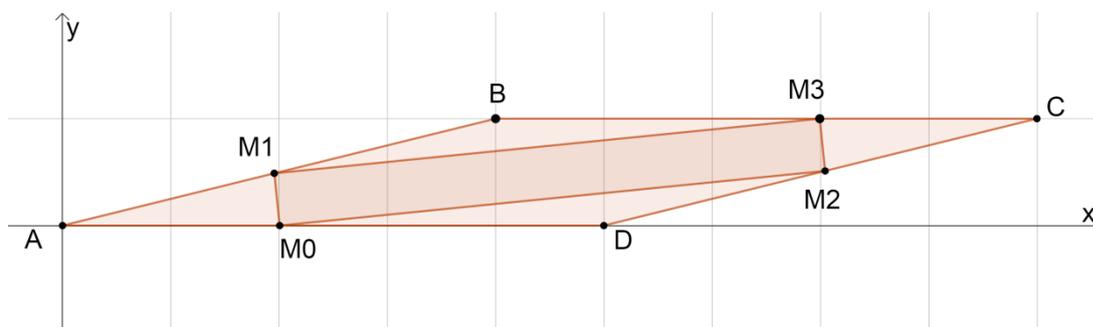


Рис. 1. Прямоугольник $M_0M_1M_3M_2$, вписанный в параллелограмм $ABCD$

Чтобы построить прямоугольник, вписанный в данный параллелограмм, нужно найти координаты вершин этого прямоугольника на сторонах параллелограмма. Используя известные факты аналитической геометрии на плоскости, получим следующие формулы.

Смежные стороны прямоугольника имеют уравнения:

$$M_0M_2: y = k \cdot (x - x_0).$$

$$M_0M_1: y = -\frac{1}{k} \cdot (x - x_0).$$

Координаты всех вершин прямоугольника M_0, M_1, M_3, M_2 выразим через x_0 и k :

$$M_1 \left(\frac{a \cdot x_0}{a + h \cdot k}; \frac{h \cdot x_0}{a + h \cdot k} \right).$$

$$M_2 \left(\frac{b \cdot h - a \cdot k \cdot x_0}{h - a \cdot k}; \frac{h \cdot k \cdot (b - x_0)}{h - a \cdot k} \right).$$

$$M_2 \left(\frac{h^2 \cdot k \cdot (x_0 - b) - a \cdot b \cdot h + a^2 \cdot x_0 \cdot k}{(a \cdot k - h)(a + h \cdot k)}; h \right).$$

Абсциссу точки M_0 можно выразить через a, h, k :

$$x_0 = \frac{(a + h \cdot k) \cdot ((a + b) \cdot k - h)}{h \cdot k^2 + 2 \cdot a \cdot k - h}.$$

Используя полученные формулы, в GeoGebra можно построить динамическую модель вписанного в данный параллелограмм прямоугольника, задав в качестве переменной для ползунка величину углового коэффициента k . Изменяя расположение вершин параллелограмма, мы можем видеть изменение расположения прямоугольника внутри него.

Для нахождения площади прямоугольника выразим длины его смежных сторон M_0M_1, M_0M_2 :

$$|M_0M_1| = \frac{h \cdot (h - (a + b) \cdot k) \sqrt{(1 + k^2)}}{2 \cdot a \cdot k + h \cdot (-1 + k^2)},$$

$$|M_0M_2| = \frac{h \cdot (a - b + h \cdot k) \sqrt{(1 + k^2)}}{2 \cdot a \cdot k + h \cdot (-1 + k^2)}.$$

Тогда решение задачи сводится к исследованию на максимум функции площади искомого прямоугольника. Обозначим ее $S(k)$. После преобразований произведения $M_0M_1 \cdot M_0M_2$ эта функция примет вид:

$$S(k) = \frac{h^2 \cdot (h - (a + b) \cdot k) \cdot |a - b + h \cdot k| \cdot (1 + k^2)}{(2 \cdot a \cdot k + h \cdot (-1 + k^2))^2}.$$

В GeoGebra можно построить график и исследовать функцию на максимум.

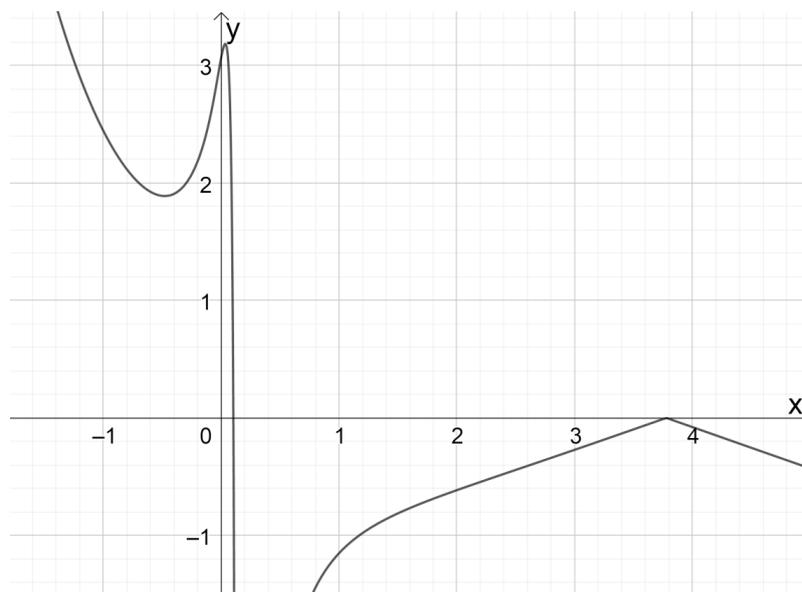


Рис. 2. График функции $S(k)$

Используя график функции $S(k)$, можно найти максимальное значение площади прямоугольника. Для того чтобы решение было более наглядным, можно построить динамическую модель, связывающую данную функцию с вписанным в параллелограмм прямоугольником, соответствующей значениям функции площади. Для этого в GeoGebra построим график функции $S(x_0)$, используя формулу для x_0 , полученную ранее. Таким образом, можно построить интегрированную модель, в которой по конкретной точке графика функции $S(x_0)$ можно получить изображение вписанного прямоугольника конкретной площади (рис. 3, 4).

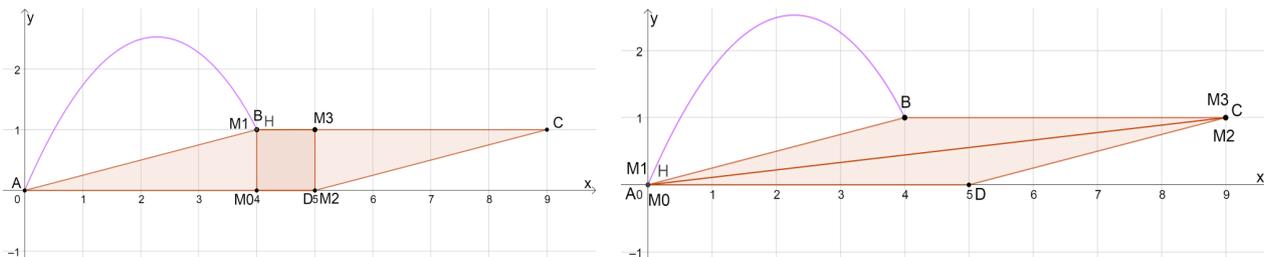


Рис. 3. Примеры расположения точки H на графике функции площади и соответствующие ей изображения прямоугольников (слева H совпадает с B , справа H совпадает с A)

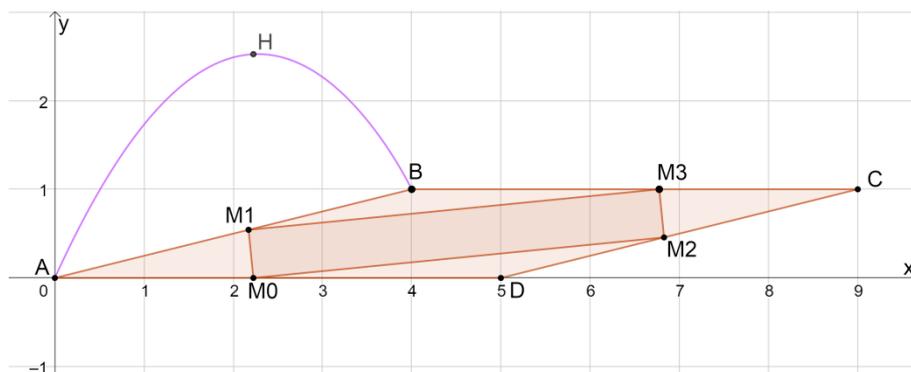


Рис. 4. Точке H соответствует максимальная площадь прямоугольника $M_0M_1M_3M_2$

Аналитическое решение этой задачи требует нахождения нулей производной. Нули производной этой функции являются корнями многочлена четвертой степени:

$$a_0 \cdot k^4 + a_1 \cdot k^3 + a_2 \cdot k^2 + a_3 \cdot k + a_4 = 0,$$

где

$$\begin{cases} a_0 = 3a^2 \cdot h + 4a \cdot b \cdot h + b^2 \cdot h + h^3, \\ a_1 = 2a^3 - 2a \cdot b^2 - 6a \cdot h^2 - 8b \cdot h^2, \\ a_2 = -6a^2 \cdot h + 6b^2 \cdot h + 6h^3, \\ a_3 = -2a^3 + 2a \cdot b^2 + 6a \cdot h^2 - 8b \cdot h^2, \\ a_4 = 3a^2h - 4a \cdot b \cdot h + b^2 \cdot h + h^3. \end{cases}$$

В общем случае корни этого уравнения нельзя построить циркулем и линейкой при заданных значениях a, h . Тогда и точку также нельзя построить. И как следствие, задача неразрешима с помощью циркуля и линейки.

Таким образом, динамическая среда GeoGebra обладает мощным набором инструментов и является эффективным средством для построения анимационных моделей при решении геометрических задач.

Библиографический список

1. Suss W. Über Parallelogramme und Rechtecke, die sich ebenen Eibereichen einbeschreiben lassen // Rend. Mat. e Appl. 1955. № (5) 14. P. 338–341.
2. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra / Есаян А.Р. и др. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2017. Ч. I.
3. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону: Легион, 2015.
4. Майер В.Р., Семина Е.А. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – будущих учителей математики. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2014.
5. Нигматулин Р.М., Вагина М.Ю. Математическое моделирование в учебных проектах бакалавров по профильным математическим дисциплинам // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 10. С. 216–220.
6. Нигматулин Р.М., Мартынова Е.В. Использование системы динамической геометрии GeoGebra для организации исследовательской деятельности бакалавров педагогического образования в курсе геометрии // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева. 2019. С. 193–197.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

THE DYNAMIC MODELS OF VECTORS IN THE SPACE

В.В. Мартынов, А.В. Вебер,
В.Р. Майер

V.V. Martynov, A.V. Veber,
V.R. Mayer

Живая математика, собственные инструменты, вектор, линейная комбинация векторов, разложение вектора по базисным векторам.

Исследуются возможности применения среды Живая математика при изучении тех разделов и тем школьного и вузовского курсов геометрии в пространстве, которые связаны с понятием «вектор». Разработаны собственные инструменты пользователя, позволяющие выполнять в пространстве необходимые операции над векторами, строить линейные комбинации векторов, разлагать вектор по трем некопланарным векторам, оказывать компьютерное сопровождение обучению векторным методам исследования свойств фигур в пространстве.

The Geometer's Sketchpad, its own tools, vector, the linear combination of vectors, resolving of vector in terms of the basic vectors.

Are investigated the possibilities of applying the Living mathematics during the study of those divisions and by the fact the school and higher educational courses of geometry in the space, which are connected with the concept vector. Their own tools of user, which make it possible to perform the necessary operations above the vectors, in the space to build the linear combinations of vectors, to decompose vector along three noncoplanar vectors, to render computer tracking are developed instruction in the vector methods of the study of the properties of figures in the space.

Как известно, обучение многим дисциплинам естественнонаучного цикла невозможно без умения обучающихся свободно выполнять в евклидовом пространстве необходимые процедуры и манипуляции с таким объектом, как вектор. Знакомиться с методом координат и простейшими свойствами векторов в пространстве школьники начинают в 10 классе. К этому времени у них за плечами курс планиметрии с элементами координатного и векторного методов на плоскости. Визуальной поддержке этих методов, созданию динамических моделей векторов на плоскости с использованием среды Живая математика [1] посвящена статья [2]. Возможна ли аналогичная поддержка и векторного метода в пространстве и насколько при этом будет естественен переход от плоскости к пространству?

Как это и следовало ожидать, алгоритмы построения динамических моделей векторов в пространстве существенно отличаются от плоского случая. В чем принципиальное отличие? Ведь, как и на плоскости, вектор в пространстве определяется заданием двух точек: начала вектора и его конца. Оказалось, что уже на этапе построения ученик испытывает определенный дискомфорт, связанный с изображением вектора. Если любой направленный отрезок на листе бумаги как части плоскости однозначно определяет в этой плоскости и длину вектора, и его направление, то аналогичное изображение такого же отрезка на таком же листе бумаги, являющимся уже плоскостью изображения фигур пространства, не опре-

деляет ни длину вектора, ни его направление. Чтобы изображение вектора выполняло возлагаемую на него функцию, оно должно быть полным. Для этого достаточно указать его проекцию еще на одну плоскость. Если на листе бумаги изобразить оси координат $Oxyz$ в пространстве, то в качестве такой плоскости выбирают одну из координатных плоскостей, чаще всего xOy .

Ясно, что создание динамических моделей векторов пространства следует начинать с изображения подвижного 3D-репера, затем – точки, и только после этого – вектора. Изображать такой репер будем с помощью созданного нами в среде Живая математика собственного инструмента «Подвижный 3D-репер». При его разработке использовался алгоритм, описание которого приведено в [3]. Динамизм репера реализуется с помощью двух круговых ползунков, позволяющих вращать репер вокруг оси аппликата, а также поворачивать его вокруг горизонтальной прямой, проходящей через начало координат. Кроме этого, имеется масштабная точка, позволяющая изменять размеры репера.

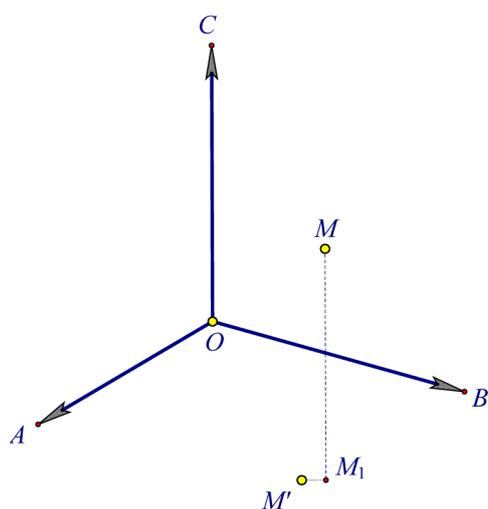


Рис. 1. Точка и ее проекция

Создадим инструмент «Точка в пространстве и ее проекция». Для этого сначала построим репер $\{O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ (рис. 1), затем изобразим произвольные точки M и M' , проведем через M прямую, параллельную прямой OC , далее построим еще одну прямую, проходящую через M' и перпендикулярную построенной прямой, найдем пересечение M_1 этих прямых. Наконец, спрячем прямые, заменив их на пунктирные отрезки MM_1 и $M'M_1$. Точка M' будет играть вспомогательную роль регулятора проекции, перемещая ее с помощью мыши, мы будем изменять проекцию M_1 точки M на плоскости OAB . Меняя положение M_1 , можно продемонстрировать, как точка

M , оставаясь внешне неподвижной, меняет свое расположение по отношению к реперу. Чтобы создать инструмент, подсветим сначала точки O и C (из четырех точек репера только они участвовали в создании данного инструмента), затем – точки M и M' и, наконец, точку M_1 и оба пунктирных отрезка MM_1 и $M'M_1$. Затем заходим в меню, позволяющее создавать новые инструменты, выбираем опцию «Создать новый инструмент...», присваиваем ему имя. Инструмент готов.

Для создания инструмента «Вектор в пространстве и его проекция» опять изобразим динамический 3D-репер $\{O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$. Далее, применяя инструмент «Точка в пространстве и ее проекция», построим сначала точку M (вместе с ее проекцией M_1 и регулятором M'), начало вектора, затем – точку N (вместе с точками N_1 и N'), конец вектора. Используя инструмент «Вектор», соединим точки M и N направленным сплошным отрезком, а точки M_1 и N_1 – пунктирным направленным отрезком (рис. 2). Как и в предыдущем случае, подсвечивая точки O и C , затем точки M, M', M_1, N, N', N_1 , проектирующие отрезки и оба вектора, создадим требуемый инструмент. Используя этот динамический чертеж, можно,

перемещая с помощью регуляторов точки M_1 и N_1 (и не меняя M и N), изменить не только направление вектора \overline{MN} , сделав его, например, параллельным координатной плоскости ABO , но и его длину.

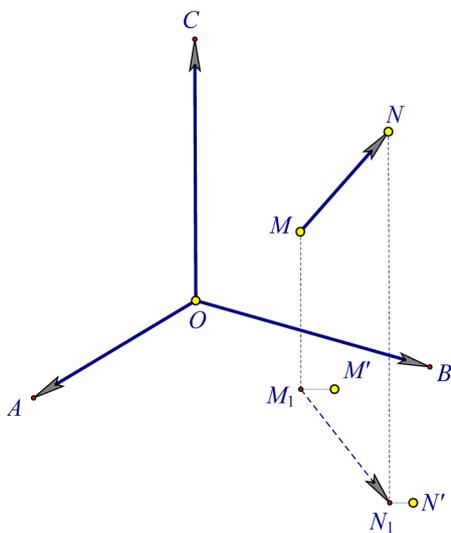


Рис. 2. Вектор и его проекция

Теперь для того, чтобы откладывать от любой точки пространства вектор, равный данному вектору, складывать и вычитать векторы, умножать вектор на число, находить скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, разлагать произвольный вектор пространства по трем некопланарным векторам, нам потребуется инструмент, позволяющий находить координаты вектора относительно выбранного репера.

Перед его разработкой мы должны по изображению 3D-репера, а также некоторой точки и ее проекции научиться находить декартовы координаты изображенной точки относительно этого репера. Поскольку данную процедуру мы вынуждены будем выполнять неоднократно, то целесообразно создать инструмент, назовем его «Точка в пространстве и ее координаты». Его создание опять начнем с построения репера $\{O, \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\}$, обозначим его \mathbf{R}_3 . Используя инструмент «Точка в пространстве и ее проекция», построим точку M и ее проекцию M_1 вместе с регулятором M' . Находить пространственные координаты точки M относительно репера \mathbf{R}_3 будем с помощью двумерных координат точек O, A, B, C, M и M_1 относительно встроенной в среду Живая математика прямоугольной системы координат плоскости, обозначим \mathbf{R}_2 соответствующий репер. Выведем на рабочее поле систему координат среды Живая математика. Применяя команды «Абсцисса (x)», «Ордината (y)» меню команд «Измерения», найдем координаты отмеченных выше шести точек.

Используя встроенный графический калькулятор, вычислим координаты векторов $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OM_1}$ и $\overline{M_1M}$ относительно репера \mathbf{R}_2 . Найдем коэффициенты разложения вектора $\overline{OM_1}$ по базисным векторам \overline{OA} и \overline{OB} плоскости OAB . Обозначим через x и y искомые коэффициенты, получим векторное равенство $\overline{OM_1} = x\overline{OA} + y\overline{OB}$. Перепишем это векторное равенство в координатной форме, приравняем соответствующие координаты, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y . Используя правило Крамера, найдем x и y . Для нахождения третьей координаты z достаточно вектор $\overline{M_1M}$ разделить на коллинеарный ему базисный вектор \overline{OC} . Для создания собственного инструмента теперь необходимо подсветить не только точки O, A, B, C, M и M' , но и вычисленные значения x, y и z , присвоить инструменту имя.

Создадим, наконец, инструмент «Вектор в пространстве и его координаты». Построим на рабочем поле среды Живая математика динамический репер $\mathbf{R}_3 = \{O, \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\}$. С помощью инструмента «Вектор в пространстве и его проекция» построим вектор $m = \overline{MN}$, его проекцию $\overline{M_1N_1}$ и точки M' и N' , регулируя

ющие положение точек M_1 и N_1 . С помощью инструмента «Точка в пространстве и ее координаты» определим координаты x_M, y_M, z_M точки M и координаты x_N, y_N, z_N точки N в репере R_3 . Используя встроенный графический калькулятор, вычислим координаты m_1, m_2, m_3 вектора $\vec{m} = \overrightarrow{MN}$. Для создания инструмента подсветим последовательно точки O, A, B, C, M, M', N, N' и найденные координаты m_1, m_2, m_3 вектора $\vec{m} = \overrightarrow{MN}$. Выберем опцию «Создать новый инструмент...», присвоим инструменту имя.

Перейдем к описанию алгоритма по созданию инструмента, позволяющего вычислить коэффициенты разложения произвольного вектора пространства по трем некомпланарным векторам. Изобразим динамический репер $R_3 = \{O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$. Используя инструмент «Вектор в пространстве и его проекция», изобразим последовательно четыре произвольных вектора, обозначим их $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и \vec{d} . С помощью инструмента «Вектор в пространстве и его координаты» определим координаты каждого из них: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$ и $\vec{d} = (d_1; d_2; d_3)$. Для создания искомого инструмента необходимо найти коэффициенты x, y, z разложения вектора \vec{d} по некомпланарным векторам \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} . Распишем векторное равенство $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ в координатной форме и приравняем соответствующие координаты. Получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решая эту систему по правилу Крамера, находим искомые коэффициенты x, y и z . Создаем инструмент «Коэффициенты разложения вектора по 3 некомпланарным».

Создадим, наконец, итоговый инструмент «Разложение вектора по 3 базисным векторам», позволяющий произвольный вектор \vec{d} пространства разложить по трем некомпланарным векторам \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} , при этом вывести на экран не только коэффициенты x, y и z разложения $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, но и от произвольной точки M пространства отложить все четыре вектора, построить координатный параллелепипед $MD_xD_yD_z$ (рис. 3), для которого отрезок MD служит диагональю, а ребра $\overrightarrow{MD_x}, \overrightarrow{MD_y}$ и $\overrightarrow{MD_z}$, выходящие из точки M , коллинеарны соответственно векторам \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} .

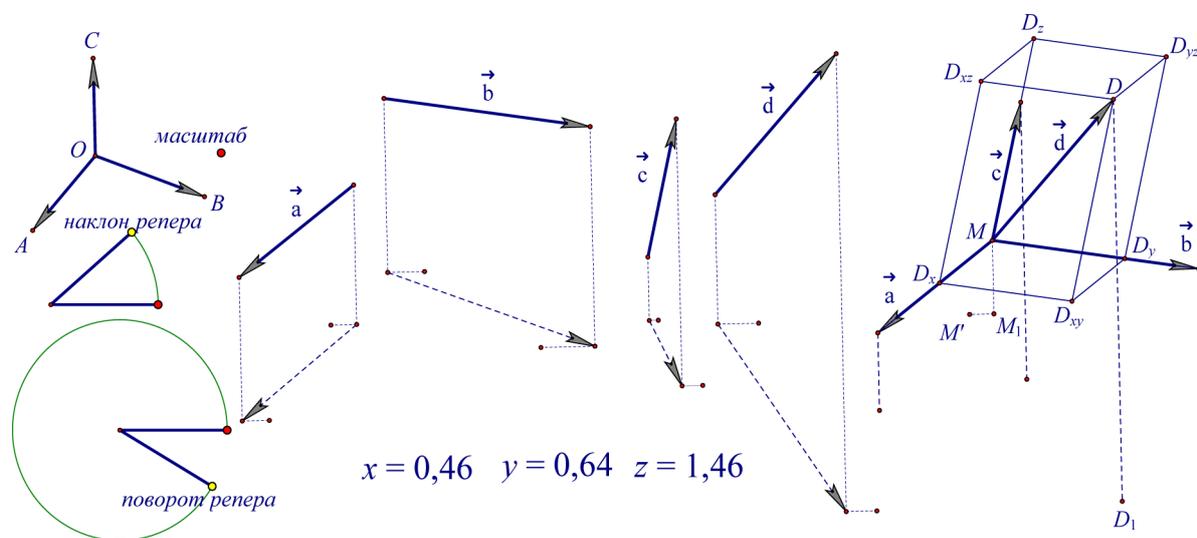


Рис. 3. Разложение вектора по трем базисным векторам

Укажем алгоритм создания такого инструмента.

1. С помощью инструмента «Подвижный 3D-репер» изображаем репер $R_3 = \{O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$, с ползунками наклона и поворота репера.

2. С помощью инструмента «Вектор в пространстве и его проекция» строим произвольные векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} , первые три из которых не должны быть компланарными.

3. Используя инструмент «Коэффициенты разложения вектора по 3 некопланарным», находим и выводим на экран коэффициенты x , y , z разложения вектора \vec{d} по некопланарным векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

4. С помощью инструмента «Точка в пространстве и ее проекция» строим произвольную точку M , ее проекцию M_1 на плоскость OAB вместе с регулирующей точкой M_2 . Откладываем от точки M векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} .

5. Изображаем координатный параллелепипед. Для этого откладываем от точки M векторы $x\vec{a}$, $y\vec{b}$ и $z\vec{c}$, получим точки D_x , D_y и D_z . Оставшиеся три вершины D_{xy} , D_{xz} и D_{yz} параллелепипеда $MD_x D_{xy} D_y D_{xz} D_{yz} D_z$ можно получить с помощью подходящих параллельных переносов. Строим изображения ребер параллелепипеда.

7. Подсветим последовательно вершины репера, концы и начала векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} , затем – точку M и ее координатный параллелепипед и, наконец, найденные коэффициенты x , y и z , присваиваем имя инструменту. Построение завершено.

Подводя итог, отметим, что разработанные инструменты, описание которых приведено в работе, успешно использовались авторами в 2020 г. при создании видеороликов в условиях дистанционного обучения:

– учеников 10 класса гимназии № 14 для их подготовки к Единому государственному экзамену по математике (В.В. Мартынов, А.В. Вебер);

– студентов 5 курса КГПУ им. В.П. Астафьева по курсу дифференциальной геометрии (В.Р. Майер).

Библиографический список

1. Живая математика 5.0: Сборник методических материалов / сост.: Г.А. Аджемян, В.Н. Дубровский и др. М.: ИНТ, 2013. 205 с.
2. Мартынов В.В., Вебер А.В., Майер В.Р. Динамические инструменты линейных комбинаций векторов на плоскости // Материалы VIII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием «Информационные технологии в математике и математическом образовании»: в 2 ч. Красноярск, 13–14 ноября 2019 г. Ч. 1. С. 82–87. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41450077>
3. Дубровский В.Н. Стереометрия с компьютером // Компьютерные инструменты в образовании. № 6. М., 2003. С. 3–11.

АНИМАЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA В ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

ANIMATION POSSIBILITIES OF THE GEOGEBRA COMPUTER ENVIRONMENT IN TRAINING SOLUTION OF SQUARE INEQUALITIES

Е.О. Некрасова, М.А. Кейв

E.O. Nekrasova, M.A. Keiv

Компьютерная среда GeoGebra, компьютерная анимация, квадратные неравенства, решение квадратных неравенств.

В статье рассматривается использование анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra при решении квадратных неравенств в школьном курсе математики.

GeoGebra computer environment, computer animation, inequalities, inequality solution.

The article substantiates and demonstrates the possibilities of using the GeoGebra computer environment when solving inequalities in a school mathematics course.

Обучение школьников цифрового поколения (поколение Z) невозможно представить без использования компьютерных технологий. Актуальным становится использование в обучении математике различных компьютерных сред, поскольку их анимационные возможности представляют собой новую часть современной дидактики образования.

Анимационные рисунки (чертежи) делают математические понятия и утверждения наглядными, что способствует их пониманию и более успешному усвоению материала [1]. Их можно использовать на разных этапах обучения: как наглядный дидактический материал при изучении нового материала, как инструмент для проведения обучающего эксперимента и как средство контроля учебных достижений обучающихся.

В рамках данной статьи рассмотрим использование анимационных возможностей компьютерной среды GeoGebra при решении квадратных неравенств в школьном курсе математики.

Представим анимационные возможности среды GeoGebra на примере решения квадратных неравенств.

Построим анимационный рисунок для решения неравенства $ax^2 + bx + c < 0$, $a \neq 0$. Для этого выполняем следующий ряд шагов построения:

1 шаг. Создаем ползунки для параметров a, b, c и вводим функцию $y = ax^2 + bx + c$ (строкой ввода). На экране появляется ее график. Заметим, что область значений параметра на соответствующем ползунке можно изменить.

2 шаг. Отмечаем точки A и B пересечения графика функции с осью абсцисс (где A левее B) и вводим числа $x_1 = x(A)$, $x_2 = x(B)$.

3 шаг. Вводим дискриминант d и делаем надписи: 1) « $x_1 < x < x_2$ », с условием видимости $a < 0 \wedge d > 0$; 2) « x – любое» с условием видимости $a < 0 \wedge d < 0$; 3) « $x < x_2$ или $x > x_1$ » с условием видимости $a > 0 \wedge d > 0$; 4) «решения нет» с условием видимости $a > 0 \wedge d < 0$.



Рис. 1

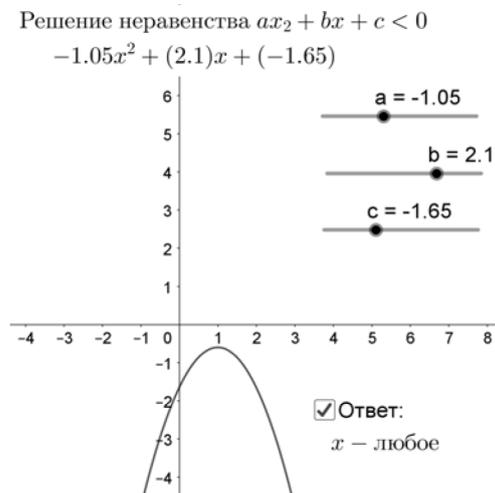


Рис. 2



Рис. 3

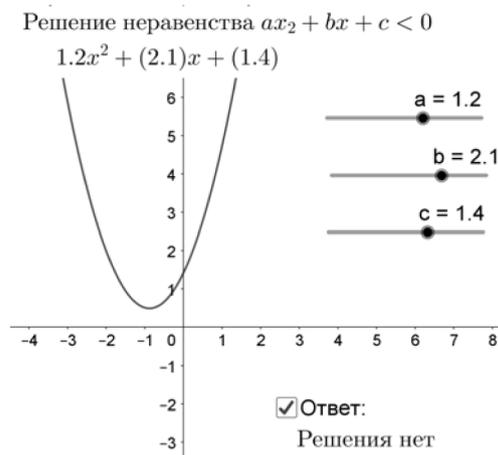


Рис. 4

При использовании созданного анимационного рисунка для решения данного квадратного неравенства устанавливаем на ползунках значения коэффициентов и видим графическое решение и ответ, который можно открыть/скрыть, что позволяет применять анимационный рисунок и для тестирования или самоконтроля.

На основе практики применения анимационного рисунка формулируем следующий алгоритм решения неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ при $a \neq 0$.

1. Находим дискриминант $d = b^2 - 4ac$.

2. Если $d = 0$, то парабола касается оси абсцисс, и если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх и решения нет. Если же $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз и x – любое, отличное от точки касания (корня уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

3. Если $d < 0$, то парабола не пересекает ось абсцисс, и если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх и решения нет (рис. 4). Если же $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз и x – любое (рис. 2).

4. Если $d > 0$, то парабола пересекает ось абсцисс в двух различных точках. Находим эти точки, решая уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Пусть x_1 и x_2 его корни. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх и если $x_1 < x_2$, то решением данного квадратного неравенства является двойное неравенство $x_1 < x < x_2$ (рис. 3). Если же $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз и если $x_2 < x_1$, то ответом будет $x < x_2$ или $x > x_1$ (рис. 1).

Заметим, что на анимационном рисунке дополнительно можно ввести неравенство $ax^2 + bx + c < 0$, чтобы получить закрашивание областей, соответствующих решению.

Для закрепления алгоритма решения квадратных неравенств, помимо упражнений из учебника и задачника, целесообразно рассмотреть задачи из тренировочных вариантов ОГЭ и ЕГЭ по математике. Для примера, рассмотрим задание 1, которое предлагается обучающимся в рамках итоговой аттестации по математике.

Задание 1. Укажите неравенство, которое не имеет решений [2]:

- 1) $x^2 + 3x - 5 > 0$,
- 2) $x^2 + 3x - 5 < 0$,
- 3) $x^2 + 3x + 5 > 0$,
- 4) $x^2 + 3x + 5 < 0$.

Понятно, что ученик на экзамене должен выполнить задание, пользуясь сформулированным алгоритмом. Вместе с тем при подготовке к экзамену полезно решение по алгоритму сопроводить демонстрацией решения на анимационном рисунке.

Чтобы воспользоваться анимационным рисунком для случая 1), первое неравенство заменяем на $-x^2 - 3x + 5 < 0$ и вводим $a = -1$, $b = -3$, $c = 5$. Видим, что решения есть (рис. 5). В случае 4) дискриминант $d = -11 < 0$, а так как $a = 1 > 0$, то ветви параболы направлены вверх, а значит решения нет. Это подтверждает рис. 6.

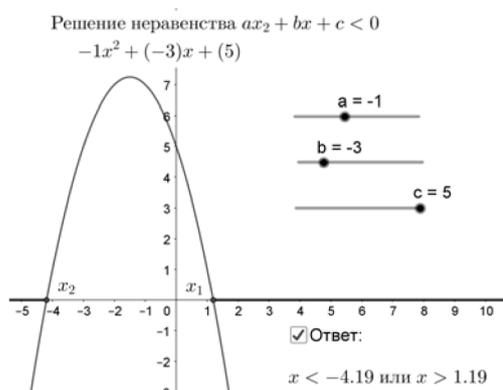


Рис. 5

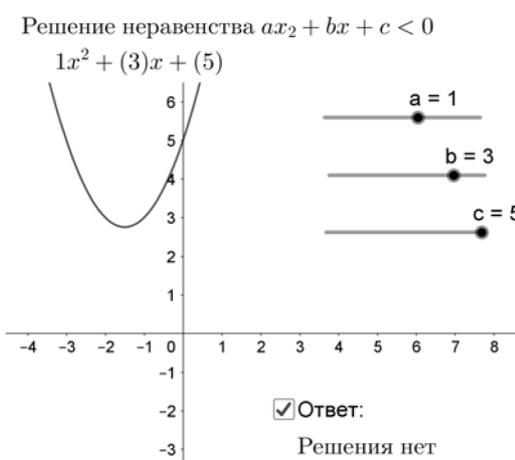


Рис. 6

В качестве учебно-исследовательской задачи можно предложить учащемуся самостоятельно построить по аналогии анимационный рисунок для решения неравенства $ax^2 + bx + c < 0$, $a \neq 0$ или $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0$.

Описанные в статье анимационные возможности компьютерной среды GeoGebra могут быть полезны практикующим педагогам: «живые» чертежи делают математические понятия и утверждения наглядными, что способствует их пониманию и более успешному усвоению материала.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015.
2. ОГЭ и ЕГЭ по математике. URL: <https://alexlarin.net/> (дата обращения: 20.10.2020).

РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНЫХ ЗАДАНИЙ В СИСТЕМАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

DESIGNING OF INTERACTIVE TASKS WITH DYNAMIC GEOMETRY SOFTWARE ENVIRONMENT FOR MATHEMATICAL EXPERIMENTS

Р.М. Нигматулин, Е.В. Мартынова

R.M. Nigmatulin, E.V. Martynova

Интерактивные задания, компьютерные эксперименты, системы динамической геометрии, DESMOS, обучение математике.

В статье обсуждаются возможности использования систем динамической геометрии для разработки интерактивных заданий по математике и проведения математических экспериментов. Приводятся примеры разработки интерактивных заданий для проведения учебного эксперимента по математике в приложении Desmos Classroom Activities.

Interactive tasks, computer experiments, systems of dynamic geometry, DESMOS, teaching mathematics.

The article discusses the possibilities of using dynamic geometry systems for the designing of interactive tasks in mathematics and for conducting mathematical experiments. Presents examples of interactive mathematical tasks developed in the Desmos Classroom Activities application for execution a studying experiment.

Современное образовательное пространство испытывает на себе постоянное воздействие динамично меняющихся информационных технологий и цифровизации. Поэтому эффективное обучение математике уже невозможно представить без активного использования систем динамической геометрии, например, таких как GeoGebra или Desmos [4; 6]. Такие приложения обеспечивают не только наглядность при обучении математике, но и создают возможности для проведения компьютерных математических экспериментов и формирования навыков учебной исследовательской деятельности, как у школьников, так и у студентов [1; 3]. Использование динамических чертежей и компьютерной анимации принципиально меняет подходы к решению задач, связанных с геометрическими фигурами или графиками функций и их преобразованиями [2]. Взаимодействие между пользователем приложения и геометрической фигурой или графиком теперь заключается не в вычерчивании статического изображения, а в конструировании динамического чертежа и в использовании компьютерной анимации.

Поэтому в процесс подготовки студентов – будущих учителей математики необходимо включать использование систем динамической геометрии как для организации математических экспериментов при изучении профильных дисциплин, так и их применение для разработки интерактивных учебных заданий для проведения уроков в период педагогической практики в школе [2].

Применению системы динамической геометрии GeoGebra посвящено большое количество работ. Однако опыт использования системы GeoGebra для разработки интерактивных заданий в форме апплетов представлен не так широко [5]. Можно заметить, что за последние несколько лет другое приложение – Desmos превратился из графического калькулятора в полноценную систему динамической геометрии, но только на плоскости, с аналогичными GeoGebra инструментами и функциями. Однако существенный скачок в развитии функционала Desmos связан с приложением Desmos Classroom Activities (<https://teacher.desmos.com/>). Возможности этого приложения для разработки интерактивных заданий и проведения математических экспериментов еще не оценены в полной мере.

Цель нашей статьи – представить возможности приложения Desmos Classroom Activities для разработки интерактивных заданий по математике и проведения учебных математических экспериментов.

Для полноценного использования всего функционала приложения Desmos Classroom Activities необходимо создать аккаунт на сайте <https://teacher.desmos.com/>. В личном кабинете можно использовать как уже разработанные интерактивные задания для проведения уроков математики, так и создать свои новые.

Кратко опишем основные инструменты, позволяющие создавать интерактивные задания в приложении Desmos Classroom Activities.

Основой для разработки задания является пустой слайд (задание может располагаться на нескольких слайдах, связанных кнопками перехода). На слайде можно разместить блоки нескольких типов данных: графические, текстовые, формульные, медиа (рисунки, видео, звук), поле для построения графиков или геометрических фигур и др. (рис. 1). Также есть готовые формы для разработки тестовых заданий разного типа (рис. 1).

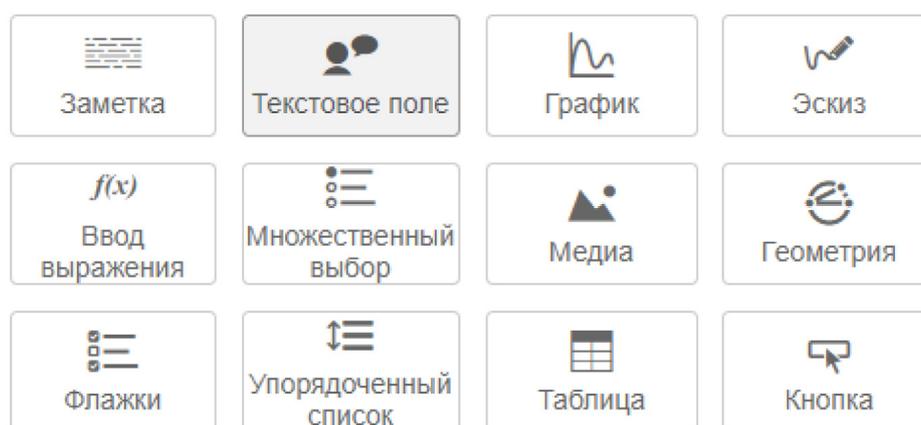


Рис. 1. Основные инструменты создания интерактивных заданий в Desmos Classroom Activities

Выбирая соответствующие инструменты и размещая на слайде блоки, получим макет будущего задания (рис. 2).

Далее в блоке «Заметка» записывается задание для учащегося и инструкции при необходимости. Блок «График» дает возможность ученику интерактивно выполнять построения графика искомой функции, используя привычные ин-

струменты простых графических редакторов (карандаш, отрезок, ластик). Блок «Ввод выражения» позволяет проконтролировать, какой конкретно график был получен учеником. После выполнения задания ученик отправляет результат на проверку, работа отображается в личном кабинете учителя.

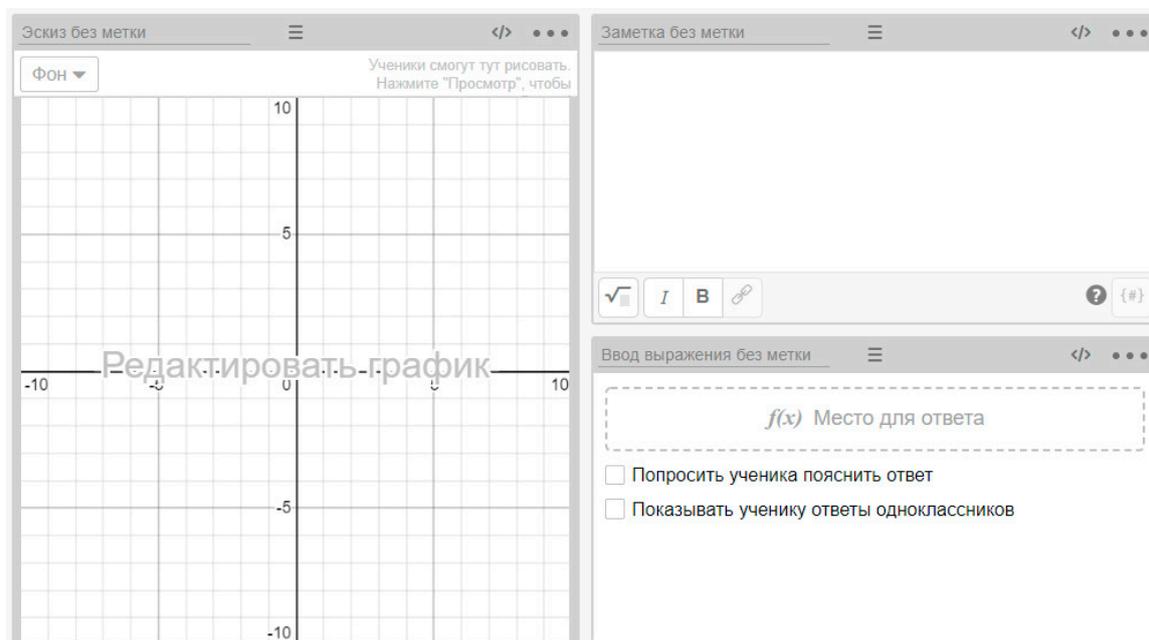


Рис. 2. Макет интерактивного задания, содержащий блоки «График», «Заметка», «Ввод выражения» (ввод формулы) в Desmos Classroom Activities

На рис. 3 показан пример математической задачи, созданный на основе шаблона на рис. 2. Интерактивность при выполнении этого задания обеспечивается за счет рисования, редактирования графика и чертежа в целом (мышкой на компьютере или пальцем на планшете), ввода формулы для контроля, наличия обратной связи с учителем.

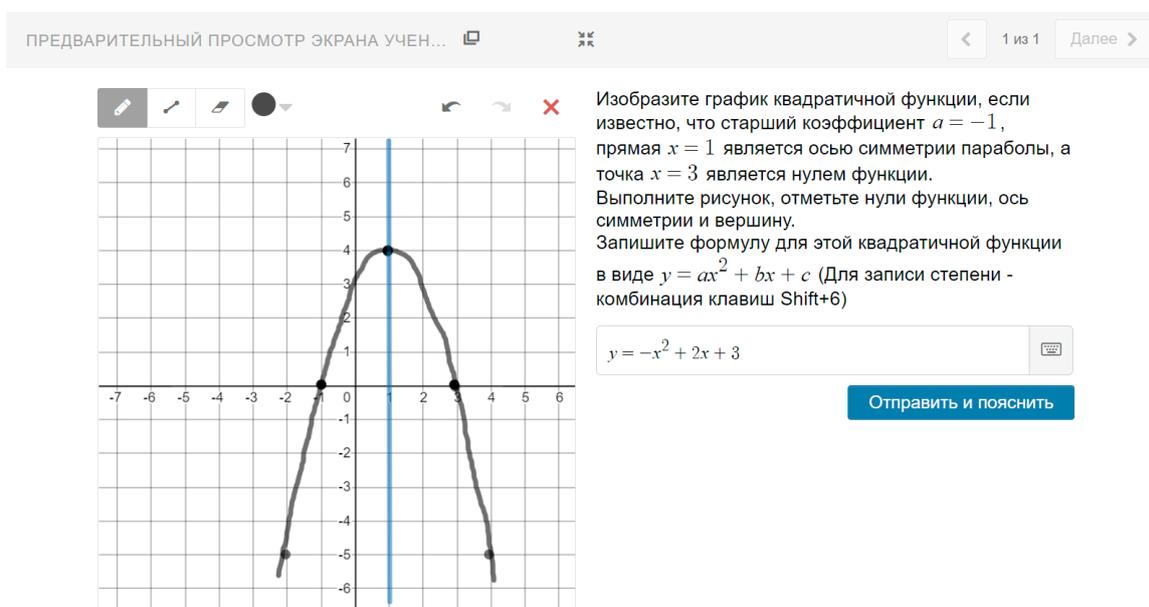


Рис. 3. Пример интерактивного задания и его выполнения в Desmos Classroom Activities

На рис. 4 показан пример интерактивного задания с использованием ползунковой анимации. Интерактивность при выполнении этого задания обеспечивается за счет работы с ползунками и динамическим изменением графика.

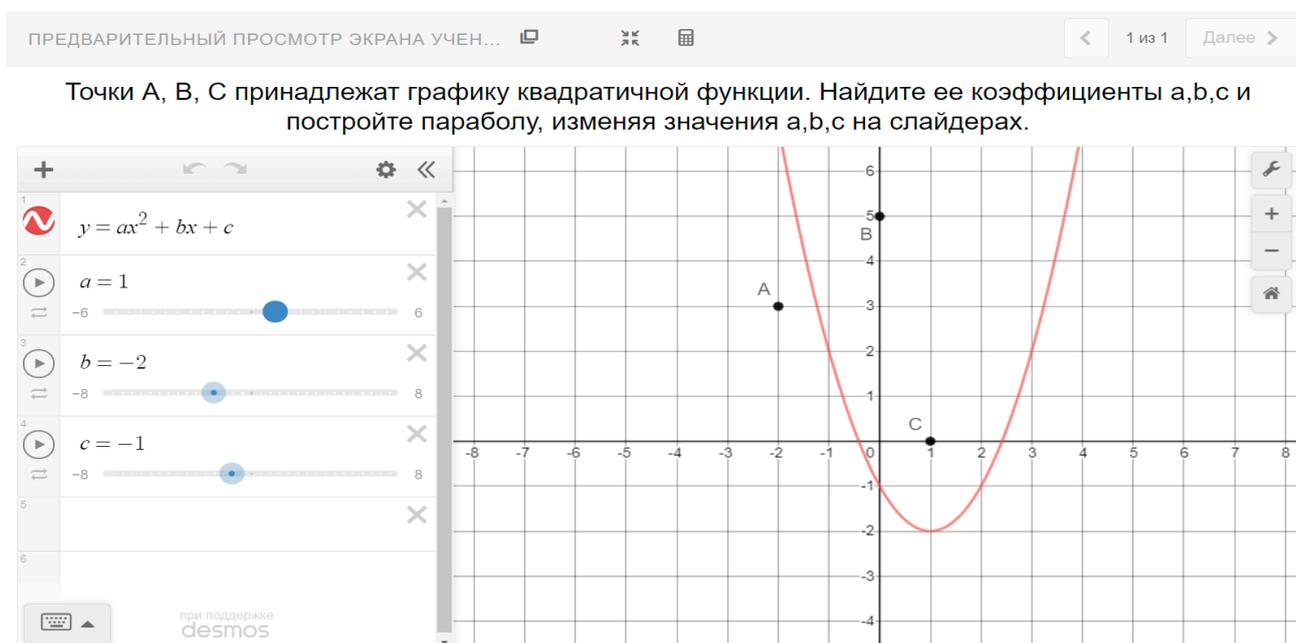


Рис. 4. Пример интерактивного задания с ползунковой анимацией в Desmos Classroom Activities

Таким образом, рассмотренные инструменты приложения Desmos Classroom Activities позволяют разрабатывать интерактивные задания по математике, используя компьютерную анимацию и разнообразный функционал. Выполнение таких заданий повышает интерес и мотивацию изучения математики у учащихся, создает условия для организации учебно-исследовательской деятельности, предоставляет учителю возможности организации математических экспериментов. Поэтому изучение и использование приложения Desmos Classroom Activities необходимо для подготовки будущих учителей математики, повышения их ИКТ-компетентности.

Библиографический список

1. Вендина А.А., Киричек К.А. Математический эксперимент в программе GeoGebra как одна из форм реализации интерактивного метода обучения (на примере подготовки студентов педагогического вуза) // Мир науки, культуры, образования. 2019. № 1 (74). С. 272–276.
2. Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе / Абдулкин В.В. и др. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2019.
3. Майер В.Р. Компьютерные исследования и эксперименты при обучении геометрии // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2012. № 4. С. 22–27.
4. Нигматулин Р.М., Вагина М.Ю., Кипнис М.М. Особенности использования графических онлайн-калькуляторов в процессе математической подготовки бакалавров педагогического образования // Информатизация образования и методика электронного обучения: мате-

риалы III Международной научной конференции. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2019. С. 256–261.

5. Применение современных информационных технологий на уроках математики: сборник материалов творческой лаборатории / авт.-сост. Ю.А. Скурихина; КОГОАУ ДПО «ИРО Кировской области». 2019. 127 с.
6. Шумакова Е.О., Севостьянова С.А., Вагина М.Ю. Особенности применения динамических графических приложений в процессе математической и методической подготовки бакалавров педагогического образования // Информация и образование: границы коммуникаций INFO'20: сборник научных трудов. Горно-Алтайск, 2020. № 12 (20). С. 78–81.

ПРИМЕНЕНИЕ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ «ПЕРЕВЕРНУТЫЙ КЛАСС» ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ LMS MOODLE

APPLICATION OF PEDAGOGICAL TECHNOLOGY «FLIPPED CLASSROOM» IN THE STUDY OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS USING LMS MOODLE

О.В. Пашковская

O.V. Pashkovskaya

«Перевернутый класс», дистанционное обучение, LMS Moodle, вычислительная математика. В настоящее время стремительно развивается дистанционное обучение. Эта форма побуждает к поиску новых подходов к преподаванию. При изучении дисциплины «Вычислительная математика» в Сибирском государственном университете науки и технологий используется педагогическая технология «перевернутого обучения», внедренная с помощью электронной образовательной платформы, построенной в системе LMS Moodle. Инструменты этой платформы позволяют автоматизировать образовательный процесс и организовать взаимодействие преподавателя с обучающимися.

Flipped classroom, distance learning, LMS Moodle, computational mathematics.

Distance learning is currently developing rapidly. This form encourages the search for new approaches to teaching. When studying the discipline Computational Mathematics at the Siberian State University of Science and Technology, the pedagogical technology of “flipped learning” is used, implemented using an electronic educational platform built by the LMS Moodle system. The tools of this platform allow you to automate the educational process and organize the interaction of the teacher with the students.

«**П**еревернутый класс – это одна из моделей, применяемая при смешанном обучении. Эта модель была предложена преподавателями Джонатаном Бергманом (Jonathan Bergman) и Аароном Сэмсом (Aaron Sams) в 2007 г., которые сначала придумали, как обеспечить своими лекциями спортсменов, часто пропускающих занятия, а затем развили эту идею в новое образовательное направление [2]. Технология перевернутого обучения предполагает самостоятельное изучение (с элементами помощи преподавателя) и совместное выполнение практических заданий. Современные подходы и цифровизация общества поднимают эту методику на новый уровень [3].

Аналитика сервиса Google показывает, что востребованность в мировой практике перевернутого обучения (flipped learning) постоянно растет (рис. 1), особенно начиная с весны 2020 г., когда большинство высших учебных заведений мира вынуждены были перейти на дистанционное обучение.

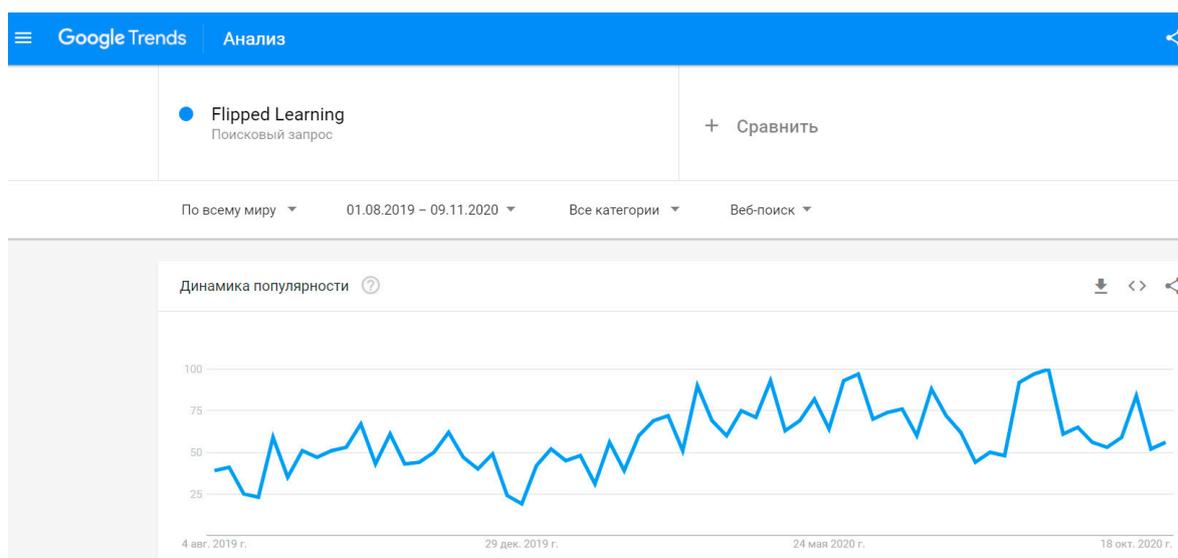


Рис. 1. Динамика запросов «flipped learning», 01.08.2019–09.11.2020

Широко используется модель «Перевернутый класс» и в ведущих зарубежных вузах. Например, в университете Лесли (Кембридж, Массачусетс), опираясь на опыт своих соотечественников, активно применяют данную технологию. Сеть Flipped Learning Network сообщает, что 67 % опрошенных преподавателей отметили улучшение результатов тестов студентов после использования перевернутой модели обучения, а 80 % сообщили об улучшении мотивации студентов. Учителя сообщили, что перевернутая модель обучения приносит пользу широкому кругу учащихся, от академически продвинутых до людей с особыми потребностями. От этого выигрывают и сами учителя. Согласно тому же опросу, 88 % преподавателей с перевернутым обучением сообщили о повышении удовлетворенности работой после применения этой методики в классах, а 99 % заявили, что они будут использовать эту методологию снова в следующем году [4].

Весной 2020 г. наш университет, как и большинство университетов мира, вынужден был перейти на дистанционную форму обучения. В университете созданы электронная образовательная среда и успешно функционирует портал электронно-дистанционного обучения, современные инструменты которого, созданные на платформе LMS Moodle [1], позволяют организовать взаимодействие с обучающимися (рис. 2).

Однако при изучении дисциплин математического цикла «Исследование операций», «Математическая экономика», «Вычислительная математика» и др.) мы столкнулись не только с низкой мотивацией студентов, перешедших в «онлайн», но и с отсутствием живого отклика на лекциях и практических занятиях, а большинство лабораторных работ так и оставались невыполненными до последних дней перед зачетом. Поэтому с начала осеннего семестра при изучении дисциплины «Вычислительная математика» использовала все современные инструменты педагогической технологии «перевернутый класс» (начиная от обычных

текстовых материалов и заканчивая пре-водкастами и видеороликами с разбором трудных мест) (рис. 3–5) и к настоящему времени довольна результатами обучения: совместное выполнение лабораторных работ мотивирует к предварительному изучению теоретического материала (рис. 6).

The screenshot shows the Moodle interface for a course. At the top left is the SibGU logo. The main header reads 'Кафедра ИЭС - Вычислительная математика (09.03.03) ~3'. A search bar is on the right. The navigation menu includes 'Главная', 'Личный кабинет', 'События', 'Мои курсы', and 'Этот курс'. A 'Режим редактирования' button is visible. The breadcrumb trail shows 'Мои курсы > ВМ (09.03.03)'. On the left sidebar, there is a search box for forums, a 'Предстоящие события' section with a lab work announcement, and a navigation menu. The main content area is titled 'Вычислительная математика' and lists resources: 'Метаданные' (250.9Кбайт), 'Методические рекомендации по работе с дистанционным курсом' (with a note for students to read them before starting), and 'Общий форум'.

Рис. 2. Дистанционный курс в системе Moodle

The screenshot shows the Moodle interface for a specific topic. The breadcrumb trail is 'Мои курсы > Этот курс'. The page title is 'Тема 4 "Численное интегрирование"'. The content area lists several resources: 'Численное интегрирование (теоретический материал)' (411.4Кбайт), 'Численные методы интегрирования (презентация)' (241.8Кбайт), 'Zoom-встреча', 'Численные методы интегрирования' (0 из 29 попыток), 'Подготовка к занятию (пре-водкаст)', 'Выполнение лабораторной работы', 'Лабораторная работа №5' (до 19 ноября 2020, 0 из 28 отправлено), 'Численные методы интегрирования', and 'Тест для самоконтроля по теме "Численное интегрирование"' (до 19 ноября 2020, 0 из 28 попыток). A note at the bottom states that the test can only be taken once.

Рис. 3. Подготовка к изучению темы «Численное интегрирование»

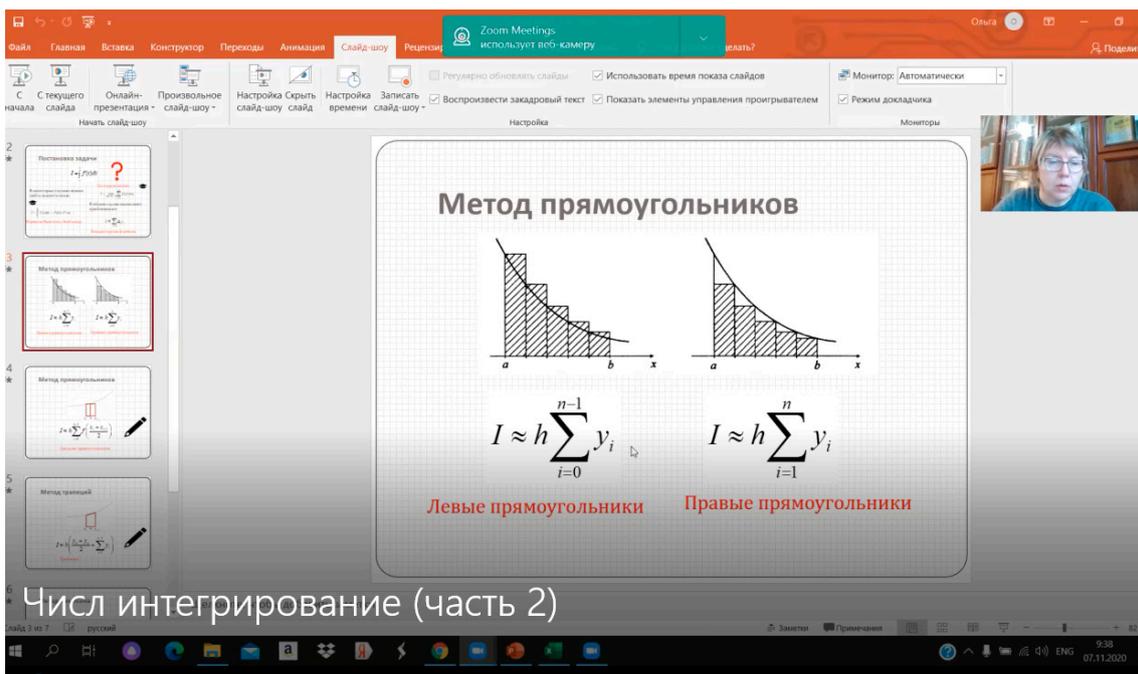


Рис. 4. Пре-водкаст по теме «Численные методы интегрирования»

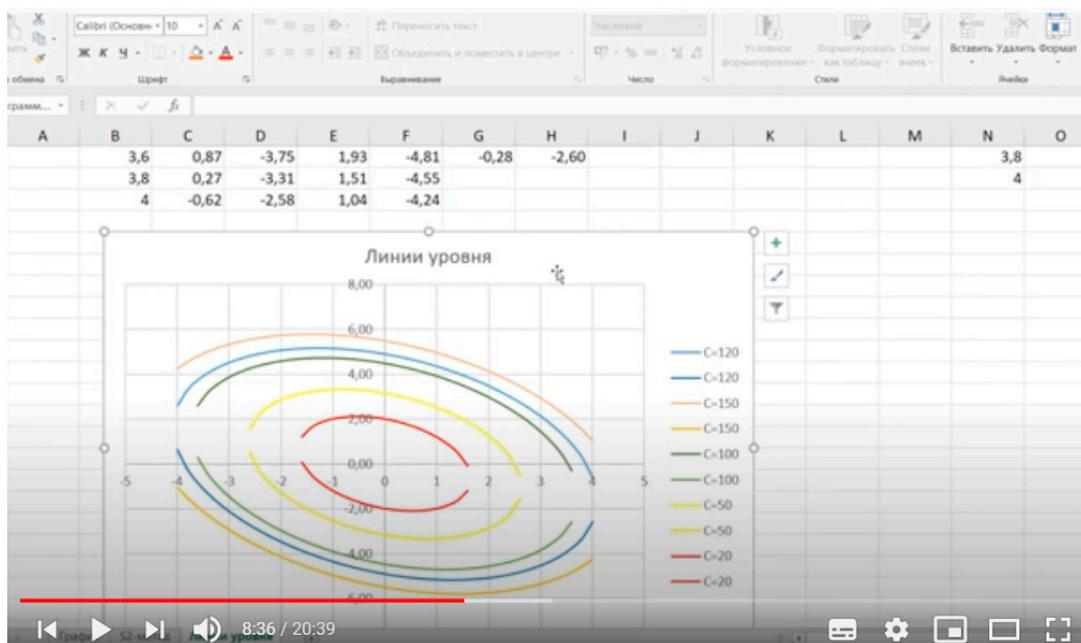


Рис. 5. Видеоролик «Линии уровня» (разбор сложных моментов)

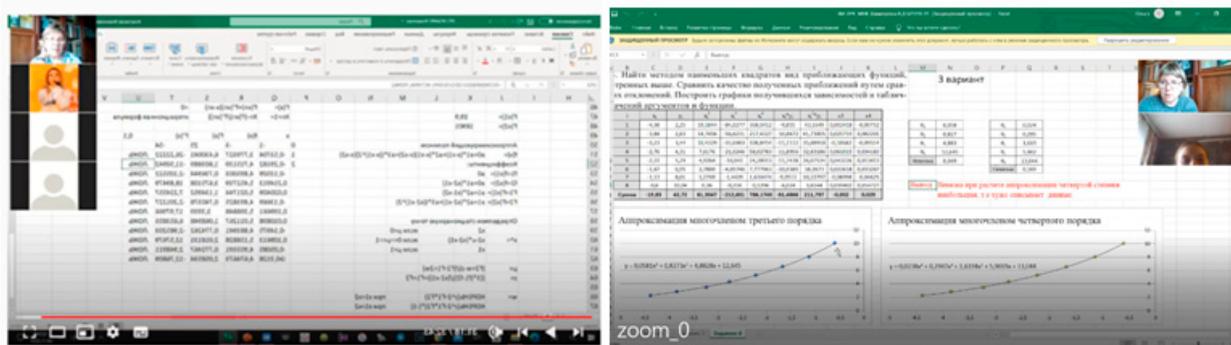


Рис. 6. Совместное выполнение лабораторных работ онлайн

Педагогическая технология «перевернутого обучения» идеально подходит к использованию в сложившихся современных условиях и позволяет активизировать образовательную деятельность обучающихся. А современные образовательные платформы помогают отслеживать посещаемость и активность работы студентов, сделать систему оценки прозрачной, построить индивидуальную образовательную траекторию каждого участника процесса.

Библиографический список

1. Кравченко Г.В., Волженина Н.В. Работа в системе Moodle: руководство пользователя: учеб. пособие. Барнаул: АлтГУ, 2012.
2. Перевернутый класс: технология обучения XXI века. URL: <https://www.ispring.ru/elearning-insights/perevernutyi-klass-tekhnologiya-obucheniya-21-veka#> (дата обращения: 07.11.2020).
3. Современные образовательные технологии / под ред. Е.Н. Ашаниной. [Электронный ресурс]. URL: <https://urait.ru/bcode/438985> (дата обращения: 06.11.2020).
4. An Introduction to Flipped Learning. URL: <https://lesley.edu/article/an-introduction-to-flipped-learning> (дата обращения: 09.11.2020).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ НА КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ВЫСШЕМ УЧЕБНОМ ЗАВЕДЕНИИ

THE USE OF COMPUTER MATHEMATICS SYSTEMS IN THE COURSE OF MATHEMATICAL ANALYSIS IN A HIGHER EDUCATIONAL INSTITUTION

Н.В. Потапова

N.V. Potapova

Математическое образование, информационные технологии, системы компьютерной математики, Scilab, Maxima.

В статье рассматривается применение систем компьютерной математики на практических занятиях по математическому анализу. Данная практика актуальна для студентов высших учебных заведений, обучающихся по различным направлениям подготовки.

Mathematical education, information technology, computer mathematics systems, Scilab, Maxima.

The article discusses the use of systems of computer mathematics in practical lessons in mathematical analysis. This practice is relevant for students of higher educational institutions studying in various areas of training.

В условиях реализации программ цифровой экономики в Российской Федерации модернизируются и развиваются различные общественные сферы жизни. Образование как ключевая составляющая светского государства также не осталось без внимания. Перед высшими учебными заведениями встает огромное количество задач, решение которых помогут нам достичь цели, а именно сделать образование еще более доступным и актуальным для «нового» времени. В приоритетах реализации цифровой экономики ставится подготовка кадров, обладающих навыками для занятия достойных позиций на современном рынке труда, поэтому конкурентоспособный вуз должен быть действительно гибким для внедрения инноваций в соответствии с вызовами современности. Гибкость выражается в готовности применять новые методы работы, не забывая про качество образования и его значимость в будущей профессиональной жизни выпускника. В условиях стремительного технологического прогресса крайне сложно сохранять этот баланс.

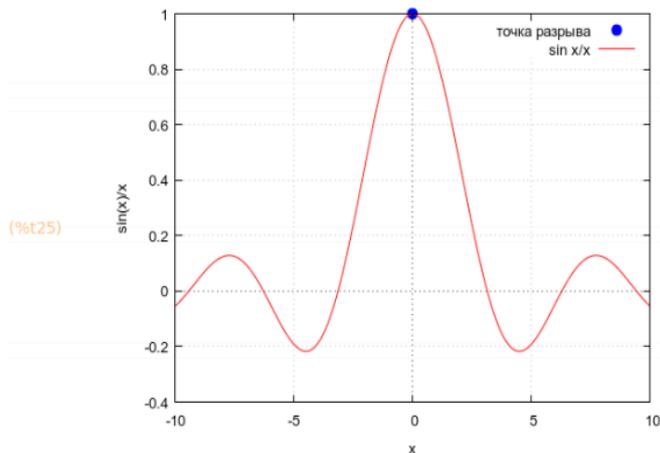
В Кубанском государственном университете мы совместными усилиями создаем новый формат образования, сочетающий и теорию с практикой, и старые добрые академические традиции с цифровыми технологиями. Этот опыт хорошо отражен в реализации классического курса математического анализа для студентов экономического факультета, с использованием систем компьютерной математики.

Пример 1. Построить график функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ и вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Решение задачи средствами пакета Maxima представлено на рис. 1.

```
(%i25) wxplot2d([[discrete,[0],[1]],sin(x)/x], [x,-10,10],[style,points,lines],[point_type,bullet],[legend,"точка разрыва","sin x/x"],
[gnuplot_postamble,"set grid;"],[xlabel,"x"], [ylabel,"sin(x)/x"])$
```

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.



```
→ 'limit(sin(x)/x,x,0);
```

```
(%o23) lim sin(x)
x→0 x
```

```
(%i24) limit(sin(x)/x,x,0);
```

```
(%o24) 1
```

Рис. 1. Реализация решения примера 1

Пример 2. Графически решить уравнение $\sin 2x = x - \frac{\pi}{2}$. Для графического решения уравнения необходимо построить графики функций и найти их точку пересечения. Код программы на Scilab и график приведен на рис. 2.

```
function u=f(x)
    u=sin(2*x)
endfunction
xn=0
xk=%pi
hx=%pi/100;
x=xn:hx:xk+0.01
//Построение графика функции
plot(x, f(x), 'r', x, x-%pi/2, 'b');
//Вертикальные линии
for k=0:2
    plot([k*%pi/2, k*%pi/2], [-2, 2], 'b:');
end
//Линии сетки
xgrid();
//Подписи на графике
xtitle("ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ SIN(2X)=X-PI/2", "x",
"Y");
//Изменяем толщину линий.
pl=gca();
pl1= pl.children.children(4);pl1.thickness = 3;
pl1= pl.children.children(5);pl1.thickness = 3;
legend("SIN(2X)", "X-PI/2")
```

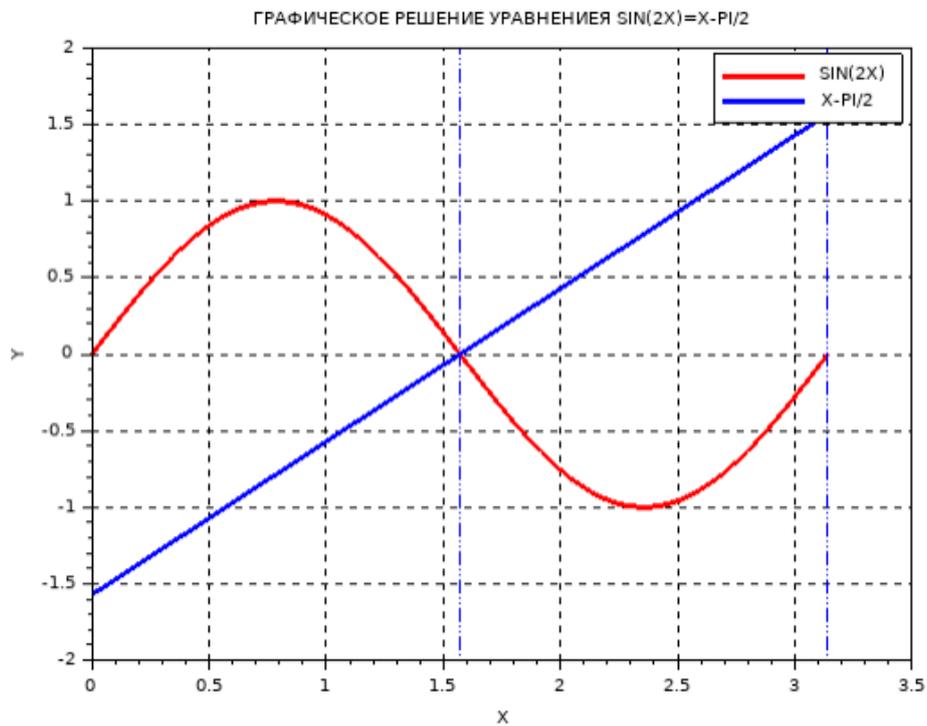


Рис. 2. Реализация решения примера 2

Пример 3. Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Решение задачи средствами пакета Maxima представлено на рис. 3.

```
(%i53) 'integrate(sqrt(1-x^2),x,-1,1);
(%o53)  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 

(%i54) integrate(sqrt(1-x^2),x,-1,1);
(%o54)  $\frac{\pi}{2}$ 
```

Рис. 3. Реализация решения примера 3

Благодаря своей открытости, Maxima и Scilab достаточно широко используются и активно развиваются как в плане расширения круга и сложности решаемых задач, так и в плане модернизации интерфейса пользователя. Это позволяет нам эффективно усваивать и закреплять знания, получаемые студентами при изучении общих и специальных математических дисциплин, а также использовать возможности компьютерной математики для выполнения самостоятельных научно-исследовательских работ, подготовке курсовых и дипломных проектов по различным дисциплинам.

Библиографический список

1. Акишин Б.А., Черкесова Л.В., Галабурдин А.В. и др. Решение математических задач с помощью пакета Maxima: учебное пособие. Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2015. 100 с.
2. Алексеев Е.Р. Свободные математические пакеты в курсе математики старшей школы: учебное пособие для учителей и студентов педагогических специальностей (учителя математики) университетов. Краснодар: Издательский центр КубГУ, 2019. 286 с.
3. Чичкарев Е.А. Компьютерная математика с Maxima: руководство для школьников и студентов. М.: ALT Linux, 2012. 384 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СРЕДЫ GEOGEBRA ДЛЯ РАЗВИТИЯ НАВЫКОВ САМОСТОЯТЕЛЬНОСТИ У УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

USE OF THE GEOGEBRA ENVIRONMENT TO DEVELOP STUDENT SELF-CAPACITIES WHEN LEARNING TO MATHEMATICS

С.К. Саая

S.K. Saaya

GeoGebra, обучение математике, самостоятельность, развитие, воспитание, самовоспитание, личность, практическая деятельность, визуализация.

При обучении математике проблема самостоятельности не новая, она остается актуальной по настоящее время. Самостоятельность и проявление навыка самостоятельности становится устойчивой у учащихся в результате индивидуального старания, проявления определенных усилий и затраты времени. Воспитание самостоятельности происходит постепенно в течение всего периода обучения. Учитель математики принимает непосредственное участие в организации самостоятельной работы на разных стадиях урока, направленного на практическую деятельность, при этом ему огромную помощь оказывает динамическая среда GeoGebra.

GeoGebra, instruction in mathematics, independence, development, training, self-education, personality, practical activity, visualization.

In teaching mathematics, the problem of independence is not new, it remains relevant to the present. Independence and the manifestation of the skill of independence becomes stable among students as a result of individual efforts, the manifestation of certain efforts and the expenditure of time. Education of independence occurs gradually throughout the entire period of study. The mathematics teacher is directly involved in organizing independent work at different stages of the lesson, aimed at practical activity, while the dynamic GeoGebra environment is of great help.

Личность человека имеет различные качества и свойства. Для достижения поставленной определенной цели при помощи своих собственных сил человеку помогает один из ее основных качеств – самостоятельность. По мере взросления у каждого ребенка параллельно формируется и самостоятельность, имея свои особенности.

Самостоятельность развивается с каждым этапом или периодом взросления ребенка, имея свои особенности и состоящие в принятии самостоятельных действий, самостоятельной деятельности и другие. К примеру, в подростковом периоде развитие самостоятельности наиболее осложняется, так как подростки воспринимают ее как полную независимость от мнения своих родителей, педагогов и т.д. Несмотря на возрастные кризисы, самостоятельность развивается и формируется у большинства детей.

Самостоятельность как обобщенное свойство личности появляется наряду с чувством личной ответственности за свою деятельность и поведение, а также

она связана с активной работой мысли, чувств и воли. Самостоятельность может послужить необходимым и важным условием для самореализации личности, для творческих возможностей.

Как известно, учащиеся хорошо и надежно усваивают то, на что они больше потратили свои индивидуальные усилия, старания, или проявили навыки самостоятельности. Поэтому, самостоятельность является и результатом воспитания, самовоспитания. Воспитание самостоятельности происходит понемногу в течение всего периода обучения, предусматривает способность полноценно аргументировать, выделять главное, существенное, умение рассуждать, доказывать, находить рациональные пути выполнения заданий, делать соответствующие выводы, обобщать и применять их при решении конкретных вопросов [4].

При обучении математике проблема самостоятельности у учащихся имела место быть, и она остается до сих пор актуальной, так как самостоятельность играет огромную роль для успешного получения среднего образования, а также для продолжения обучения в высших учебных заведениях. Математика является одним из основных предметов для развития творческих способностей учащихся, способствующих усвоению логики построения предмета и закреплению знаний четкой системой упражнений. Формированию творческой активности, развитию интеллекта больше всего способствует правильно организованная самостоятельная работа учащихся, выполненная в основном без непосредственного участия учителя и способствующая развитию творческого мышления, стимулируя поиск новых, оригинальных решений. Каждый учитель должен уметь организовать того или иного вида самостоятельную работу, используя существующие различные подходы к их классификации [3].

Обучение математике является творческим процессом, искусством, которое направлено в большинстве на каждого ученика класса, учитывающим такие индивидуальные особенности обучающихся, как трудолюбие, заинтересованность, желание добывать новые знания, ответственное отношение к учебному предмету, к своему труду и другие. Зачастую возникают трудности в усвоении математики из-за ее абстрактности. Поэтому учителю-предметнику следует нетривиальные факты этой дисциплины максимально увязывать с окружающей действительностью, использовать все возможности для визуализации сложных математических понятий.

Одним из путей визуализации математики, внесения в процесс ее обучения движения предоставляет система динамической математики GeoGebra. Эта среда мотивирует обучающихся к заинтересованному и эффективному освоению изучаемого материала. GeoGebra пользуется огромной популярностью во многих странах, в том числе среди учителей российских школ. Имеется немалое количество учебно-методических разработок, коллекций динамических моделей, готовых для использования любым желающим. Интерфейс программы понятен и прост для учащихся. Имеется много возможностей для решения геометрических задач школьного курса геометрии для создания различных конструкций из точек, векторов, отрезков, прямых, для построения графиков элементарных функций,

перпендикулярных и параллельных прямых, серединных перпендикуляров, биссектрис углов, касательных, окружностей, для определения длины отрезков, площади многоугольников, радиуса окружности и т.д. На панели объектов есть возможность для работы с параметрами, аналитического задания кривых, построения их изображений.

GeoGebra помогает учителю математики подготовить наглядные учебные модели геометрических чертежей, различные таблицы и диаграммы, графики основных функций, на основании которых можно составить задачи для индивидуального решения, чтобы развивать навык самостоятельности у учащихся. Например, при подготовке к государственной итоговой аттестации девятиклассников для успешного решения задания 11 по графикам функций, можно заранее провести эвристическую беседу с учащимися с указанием учебной проблемы, предоставив готовые модели графиков функций:

– линейной функции $y = k \cdot x + b$ (рис. 1):

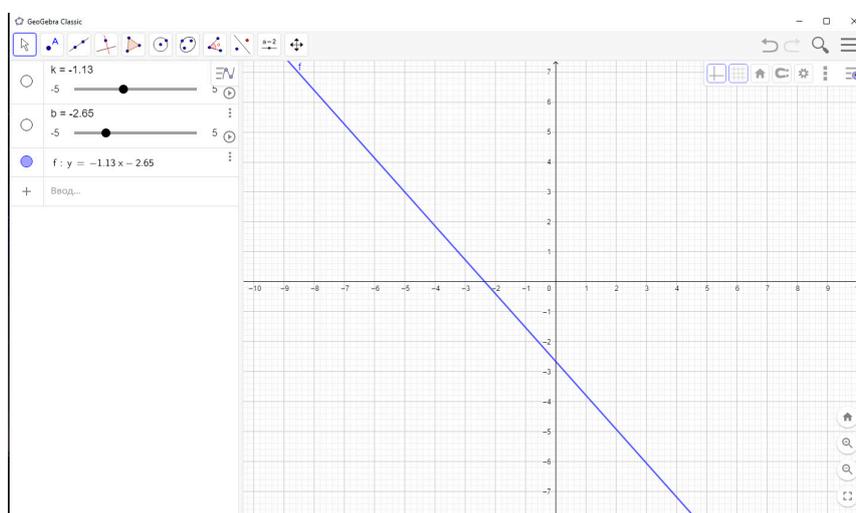


Рис. 1. Прямая

– обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$, (рис. 2):

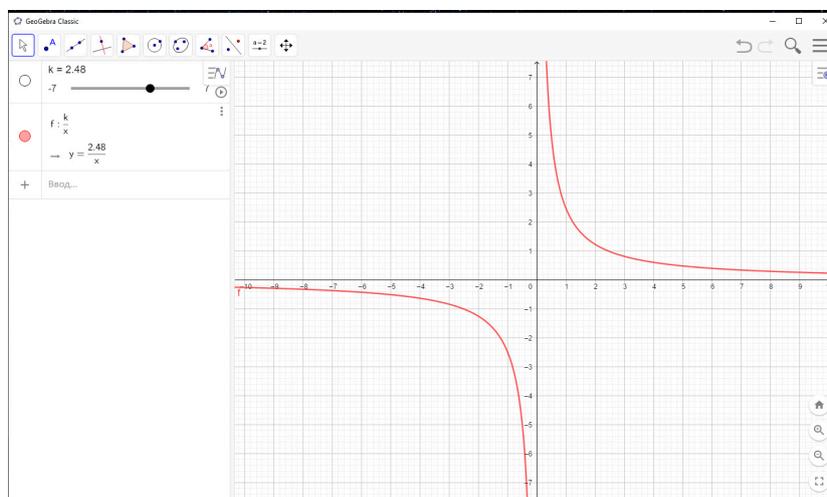


Рис. 2. Гипербола

– квадратичной функции $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (рис. 3):

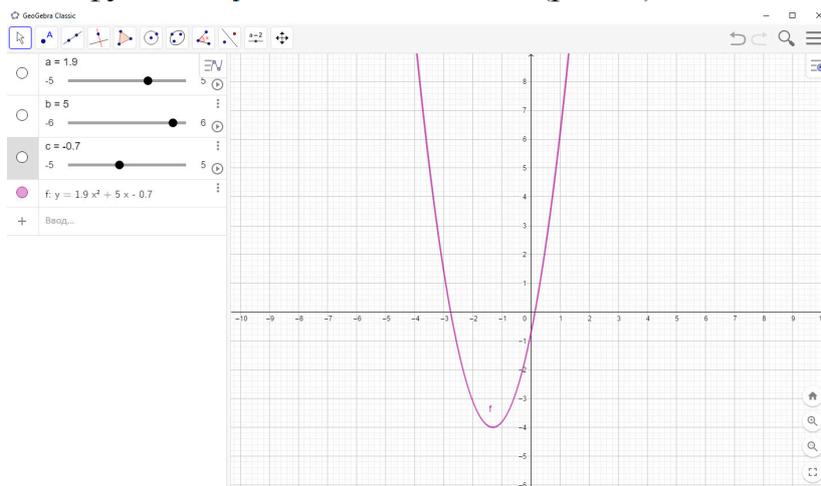
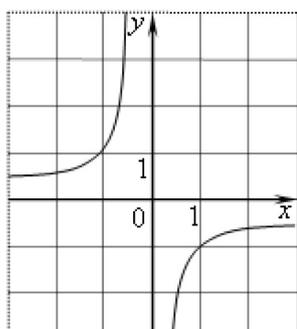


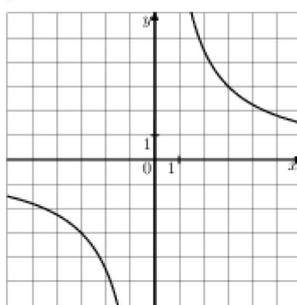
Рис. 3. Парабола

При традиционной форме урока преобладает объяснительно-иллюстративное обучение, построения выполняются на меловой доске, и на это затрачивается немало времени [2]. Как элемент цифровизации образования на помощь приходит применение анимационных рисунков, изготовленных в среде GeoGebra. Для проверки навыка самостоятельного выполнения заданий можно предложить следующие задания:

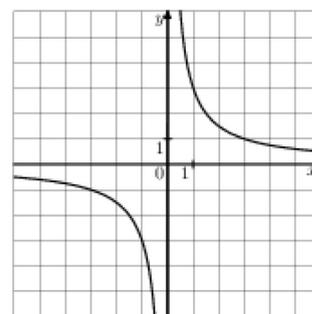
Задание № 1. Используя среду GeoGebra, построить графики заданных функций и определить значение k по графику функции $y = \frac{k}{x}$, изображенных на рисунках а), б), в).



а)



б)



в)

Задание № 2. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

Графики

| А) | Б) | В) |
|------------|------------|------------|
| | | |
| решуегэ.рф | решуегэ.рф | решуегэ.рф |

Формулы

1) $y = -\frac{1}{2}x$

2) $y = -\frac{1}{x}$

3) $y = -x^2 - 2$

4) $y = \sqrt{x}$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

| А | Б | В |
|---|---|---|
| | | |

Объявляя учащимся о подготовке к соответствующей теме урока, можно дать на дом практическое задание скачать программу GeoGebra на свой компьютер для изготовления нужного апплета по теме. На уроках математики введение новых понятий, новых терминов, функции, геометрических фигур целесообразно сопровождать использованием готовых анимационных рисунков, а также посвящать занятия их изготовлению и экспериментированию на рисунках. Для формирования у учащихся прочных знаний, умений и навыков нужна практическая деятельность. Учащимся будет интересно конструировать с помощью среды GeoGebra свои апплеты и экспериментировать на готовых моделях, при этом развивается у них навык самостоятельности, повышается интерес к математике, формируется исследовательский подход к решению различных математических задач [5].

Среда GeoGebra позволяет создавать чертежи, которые можно использовать на разных стадиях изучения учебного материала, от чертежей иллюстративного характера до исследовательских чертежей [1]. В процессе создания рисунка учащиеся занимаются самообразованием и развитием самостоятельности.

Библиографический список

1. Сафонов В.И., Бакаева О.А., Тагаева Е.А. Потенциальные возможности интерактивной среды GeoGebra в реализации преемственности математического образования «школа–вуз» // Перспективы науки и образования. 2019. № 1 (37). С. 431–444.
2. Есаян А.Р., Добровольский Н.Н., Седова Е.А., Якушин А.В. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2017. Ч. 1. 417 с.
3. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / под ред. Е.С. Полат и др. М.: Академия, 2005. 272 с.
4. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. М.: Легион, 2015. 192 с.
5. Альшова Н.С. Использование программы GeoGebra на уроках математики. URL: <http://www.gramota.net/materials/1201/1/5.html>

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИКТ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

USE IKT ON THE LESSONS OF MATHEMATICS IN THE CONDITIONS FOR THE REMOTE LEARNING

Р.Ж. Сарсембаева, А.Р. Байтурова

R.Zh. Sarsembaeva, A.R. Baiturova

Дистанционное обучение, информационно-коммуникационные технологии (ИКТ), скайп-уроки, онлайн-обучение.

В статье рассмотрены некоторые платформы ИКТ, которые используются на уроках математики в условиях дистанционного обучения, представлены практические рекомендации для учителей.

Remote instruction, information-communication line technologies (IKT), skype-lessons, on-line learning.

The article discusses some of the ICT platforms that are used in mathematics lessons in distance learning and provides practical recommendations for teachers.

Переход на дистанционное образование стал вызовом для современной образовательной системы. Многие педагоги растеряны: то, что раньше было привычным и понятным, в нынешних условиях не работает. Теперь нужно выстраивать новую траекторию обучения. И по-прежнему крайне важно, чтобы каждый учитель находил способ увидеть, чему учатся их ученики.

Независимо от того, используем ли мы синхронные или асинхронные уроки, называем ли мы это дистанционным или удаленным обучением, мы все должны организовать эффективное образование на расстоянии. Этот тип обучения не является чем-то новым, но он является новым для многих из нас и заставил быстро изменить повседневную педагогическую практику.

Основная задача, которую мы ставили перед собой – эффективное построение учебного процесса на любой ступени обучения, учитывающее разноуровневую подготовку учащихся, развитие их познавательных способностей, формирование у них основных приемов умственной деятельности: анализ, синтез, абстрагирование, обобщение, сравнение. Целью работы считаем не только дать ученику определенную сумму знаний, но и научить учиться, развивать интерес к учению. Одним из путей решения этих проблем является OnlineMekter, представляющую собой тренинг-систему, созданную для онлайн-обучения детей. Благодаря данному ресурсу подавляющее большинство учащихся школ Казахстана получают образование в период карантинных мер. OnlineMekter включает в себя возможность просмотра видеурока с помощью средств самой платформы. После просмотренного урока учащиеся закрепляют на практике свои знания, которые оцениваются соответствующим количеством баллов, и все это

в рамках функционала платформы. Данная платформа хорошо защищена от взлома, и родители уверены, что их дети в рамках этой платформы получают качественные знания. Каждый урок в OnlineMekter сделан по алгоритму адаптивного обучения и имеет 3 уровня и 9 подуровней заданий. Все уроки разработаны большинством преподавателей интеллектуальных школ. Если ребенок не до конца усвоил материал, можно вернуться к уроку и пересмотреть его в записи. Видеосвязь, хорошо организованная на OnlineMekter, позволяет напрямую или с помощью удобного чата задавать вопросы учителю.

Также большинство коллег с энтузиазмом и большим интересом используют платформу Zoom. Zoom – удобный и простой сервис для дистанционного обучения, онлайн-конференций и т.д. Использовать сервис Zoom можно как на персональном компьютере, так и на смартфоне с помощью официального мобильного приложения. Во время проведения видеоконференции можно не только разговаривать, но и писать сообщения в чат, обмениваться файлами, включать демонстрацию экрана и оставлять на нем заметки с помощью встроенных инструментов.

Данная платформа имеет целый ряд преимуществ, отметим некоторые из них:

- бесплатная возможность проведения онлайн-мероприятия с ограничением по времени 40 минут;
- бесперебойность работы при стабильном Интернете у пользователей;
- возможность участия в онлайн-мероприятии с любых устройств (мобильный телефон, планшет, компьютер);
- наличие виртуальной доски и функции демонстрации экрана, позволяющей показывать презентации, заходить на обучающие сайты на онлайн-уроке, просматривать видео совместно с участниками онлайн-мероприятия;
- управляемость пользователями со стороны организатора (включать/выключать звук, опускать руку);
- возможность записи онлайн-урока.

Указанные выше преимущества позволили организовать проведение онлайн-уроков в понятной и доступной форме.

Усовершенствовать систему дистанционного обучения в условиях самоизоляции помогают уроки в Skype. Коммуникацию с помощью веб-камеры в Skype можно организовать до 25 человек с ограничением времени звонка 100 мин, чем не может похвастаться ни один другой бесплатный мессенджер. Урок по Skype не нужно проводить в режиме лекции или длительного объяснения нового материала. Для этого можно записать отдельное видео, например, в режиме «скринкаст». У ученика остается своеобразный видеоконспект пройденного материала. Из материала занятий можно делать ролики для своего сайта с наиболее интересными моментами материала. Важно только не забыть скачать необходимые видео или аудио.

Также преподаватель и ученики могут обмениваться текстовыми сообщениями в ходе разговора. Прямо в чат Skype также легко целиком отправить файлы, электронные книги, изображения, видео, просто перенеся с рабочего стола

на компьютере мышкой. Можно настроить программу, что все переданные материалы сохранятся в отдельную папку на компьютере, и ученику будет проще к ней постоянно возвращаться, не осуществляя заново поиск нужных документов по истории чата.

Основная цель скайп-урока – ответы на вопросы, разъяснение непонятных моментов, разбор сложных примеров и другие виды деятельности, требующие интерактивного взаимодействия. Важным моментом является поддержка групповой динамики между учениками, которой не хватает при асинхронном обучении.

Функции Skype, которые используют учителя в формате дистанционного обучения: видеозвонки, чаты, обмен материалами, фотография экрана диалогового окна, видео и голосовая почта, демонстрация экрана и т.д.

Таким образом, использование ИКТ на уроках в условиях дистанционного обучения является одним из эффективных механизмов, который позволяет личности самореализоваться, а учителю создать такую «развивающую среду», в которой у каждого ученика будут сформированы определенные компетенции. Дистанционное обучение только развивается, ищет свои формы и методы. Но уже сегодня трудно переоценить тот вклад, который может сделать данное направление работы в деле развития единого информационного пространства.

Библиографический список

1. Пинаевская Т.А. Использование ИКТ-технологий на уроках математики // Педагогическое мастерство: материалы II междунар. науч. конф. М.: Буки-Веди, 2012.
2. Старцева Н.А. Информационные технологии на уроках математики.
3. Полат Е.С., Бухаркина М.Ю. Современные педагогические и информационные технологии в системе образования: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М.: Академия, 2007.
4. Гузеев В.В. Образовательная технология XXI века: деятельность, ценности, успех. М.: Центр «Педагогический поиск», 2004.

АНИМАЦИОННО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРОПЕДЕВТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ФУНКЦИОНАЛЬНУЮ ЗАВИСИМОСТЬ

ANIMATION-GEOMETRIC TRANSFORMATION OF PROPEDEUTIC PROBLEMS FOR FUNCTIONAL DEPENDENCE

Е.А. Сивухина

E.A. Sivukhina

Пропедевтическая задача, функциональная зависимость, анимационный рисунок, программа GeoGebra, алгебра 7 класса.

Особенностью пропедевтических задач на функциональную зависимость является происхождение их из наблюдаемых явлений жизни. Эти явления можно моделировать анимационными рисунками на экране компьютера, например, в среде GeoGebra, что значительно облегчает понимание задачи и ее решение. Использование анимационных рисунков является частью цифровых технологий в обучении математике и особенно востребовано в свете цифровизации образования. Цель статьи – на конкретных примерах продемонстрировать возможности, роль и значение анимационных рисунков при рассмотрении пропедевтических задач на функциональную зависимость.

Propedeutic problem, functional dependence, animation drawing, GeoGebra program, 7th grade algebra.

A feature of propaedeutic tasks for functional dependence is their origin from the observed phenomena of life. These phenomena can be simulated by animation drawings on a computer screen, for example, in the GeoGebra environment, which greatly facilitates the understanding of the problem and its solution. The use of animated drawings is part of digital technology in math education and is particularly in demand in light of the digitization of education. The purpose of the article is to demonstrate the possibilities, role and importance of animated drawings in case of propedeutic tasks on functional dependence.

Систематическое изучение функций начинается в алгебре 7 класса [3]. В основе данной статьи лежит книга специалиста в области методики преподавания математики, в прошлом декана математического факультета Красноярского государственного педагогического института (ныне университета им. В.П. Астафьева) Роберта Адольфовича Майера «Задачи по формированию функциональных понятий» [2]. На конкретных примерах, взятых из этой книги (на которых сам автор акцентирует внимание читателей во введении), мы покажем, как трансформируются эти задачи и их решения с использованием анимационных рисунков, изготовленных в среде GeoGebra [4], [5]. С анимационными возможностями этой среды можно познакомиться, например, по книге [1].

В инструментарии GeoGebra эффективно используется встроенный инструмент под названием «Ползунок». Он представляет собой отрезок с точкой на нем,

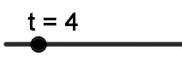
изображающей параметр в границах его изменения. Мы используем также команду «Анимировать», которая заставляет точку перемещаться по линии, на которой она построена. Условия видимости позволяют создавать эволюционируемые изображения для демонстрации этапов решения задачи.

На анимационном рисунке 1 представлена формулировка задачи 50 из [1], в которой спрашивается: «сколько часов следует спать ежедневно: 1) 4-летнему ребенку, 2) 12-летнему ребенку, 3) каждому из ваших братьев и сестер».

Текст задачи есть словесное задание функции, полученная формула является ее аналитическим заданием. Сообщаем ученикам, что буква t обозначает независимую переменную, а буква h зависимую переменную. Значение переменной t можно изменять с помощью ползунка. Текст, помеченный «птичкой» (результаты вычислений), можно скрыть/открыть. Предполагается, что ученик сначала выполнит задание при скрытом ответе, а потом откроет ответ для проверки своих вычислений.

Нормальное число часов сна человека до 18 лет определяется врачами по следующему правилу: к 8 часам прибавляют половину разности между 18 и возрастом в годах.

Составьте формулу и найдите по ней, сколько часов h следует спать человеку данного возраста t .

Формула: $h = 8 + \frac{1}{2}(18 - t)$ 

$$h = 8 + \frac{1}{2}(18 - 4) = ?$$

Ответ: $h = 15$

Рис. 1

Наш анимационный рисунок к задаче 50 позволяет не только ответить на поставленные в задаче вопросы, но и найти все значения функции при $0 < t < 18$, составить таблицу для всех целых значений t с проверкой.

На анимационных рисунках 2а, 2б, 3а, 3б представлена следующая задача 76 из [1]. В треугольнике ABC сторона $AC = 50$ см, сторона $AB = 30$ см, отрезок BD перпендикулярен к основанию AC . Требуется, обозначив длину отрезка DC буквой x , а длину стороны BC – через y , вывести формулу, выражающую y через x (найти аналитическое задание функции), установить, какие значения может принимать x (область определения функции), построить график зависимости y от x и по графику ответить на некоторые дополнительные вопросы. В геометрической части задачи система координат никак не участвует и формула зависимости y от x записывается из чисто геометрических соображений – работает теорема Пифагора. Используя масштаб 1:10, строим анимационный рисунок 2а при $n = 1$ с удаленными осями коор-

динат и выводим формулу $y = \sqrt{DC^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + b^2 - (a-x)^2} = \sqrt{2ax + b^2 - a^2}$. В частности, при значениях параметров на ползунках $a=5$, $b=3$ получаем $y = \sqrt{10x - 16}$. Заглядываем в ответ и убеждаемся, что наш ответ не совпадает с ответом в книге. В чем дело? Вспоминаем, что мы использовали масштаб, и для перехода к сантиметрам нужно заменить x на $10x$, a на $10a$ и b на $10b$. После замены получаем формулу $y = 10\sqrt{2ax + b^2 - a^2}$ и при $a=5$, $b=3$ получаем $y = 10\sqrt{x - 16}$, как в книге.

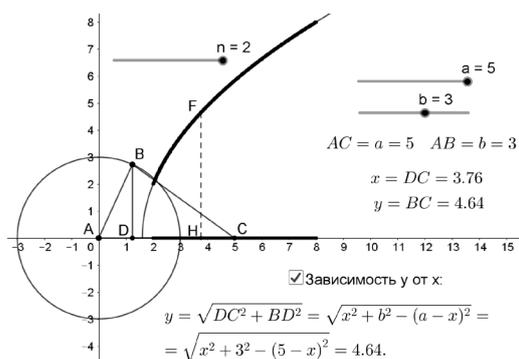


Рис. 2a

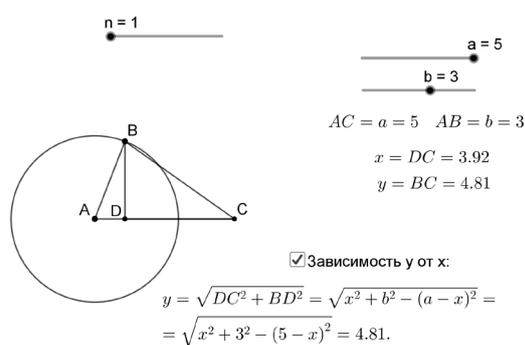


Рис. 2b

Теперь на анимационном рисунке возвращаем оси координат, устанавливаем $n=2$ и появляется рис. 2b, на котором видим изображение графика функции $y = \sqrt{2ax + b^2 - a^2}$. Он построен в результате записи в строку ввода этого аналитического выражения y через x без связи с треугольником. Область определения этой функции $2ax + b^2 - a^2 \geq 0$, $x \geq \frac{a^2 - b^2}{2a}$. При $a=5$, $b=3$ получаем $x \geq 1.6$.

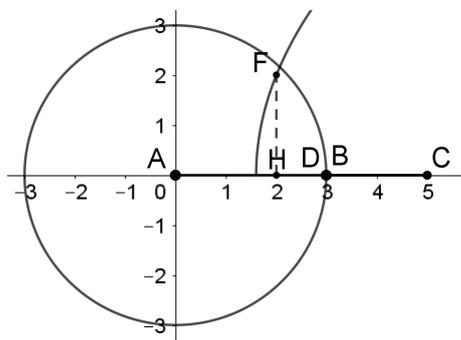


Рис. 3a

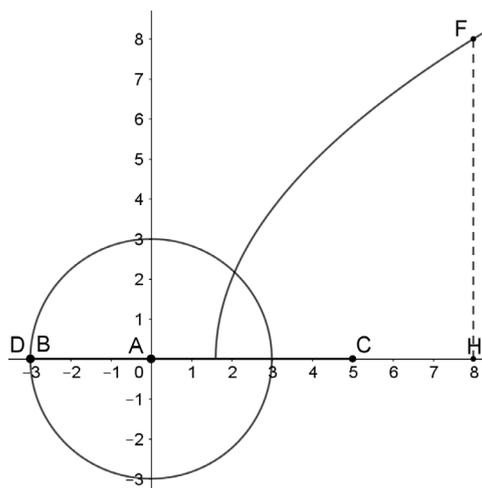


Рис. 3b

Для перехода к функции, когда $x = DC$, строим на оси абсцисс точку H с этой абсциссой и через нее проводим перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком функции в точке F . Заставляем точки H и F оставлять следы и включаем анимацию точки B . Точки H и F , оставляя следы, вычерчивают соответственно

область определения и множество значений функции, отвечающей условиям задачи. При анимации точки B видим, что наименьшее (наибольшее) значение независимая переменная $x = DC$ принимает, когда точка B попадает на ось абсцисс и совпадает с точкой D справа (рис. 3a). (слева, рис. 3b) от начала координат.

Отсюда следует, что наименьшее значение $x = DC = AC - AB = a - b$, а наибольшее $x = DC = AC + AB = a + b$. Соответственно получаем наименьшее $y = a - b$, а наибольшее $y = a + b$. При $a = 5$, $b = 3$ получаем $2 \leq x \leq 3$ и $2 \leq y \leq 3$. В задаче предлагается: «зная, что длина отрезка BC равна 35 см, найдите длину стороны DC ». В переводе этого задания на язык функций нужно по данному $y = 3.5$ найти соответствующее x . На рис. 2b перемещаем точку H в положение, когда ордината точки F равна 3.5 и получаем ее абсциссу равной примерно 2.83. Заметим, что для достижения нужной точности можно использовать колесико мышки для изменения масштаба. Аналогично с переводом на язык функций выполняются остальные задания в этой задаче.

Внесение наглядности существенно помогает в осмыслении задачи и ее решения. В частности, обнаруживается две функции: общая функция, заданная формулой, и функция, связанная с треугольником, которая получается из первой при сужении области определения.

В заключение рассмотрим задачу 137 из главы, посвященной линейным функциям. Спирально-цилиндрическая пружина длиной в 20 см под действием груза в 300 г растягивается до 23 см. Вторая пружина длиной 15 см под действием груза в 200 г растягивается до 19 см. Существует ли груз, при котором обе пружины будут иметь одинаковую длину?

Эта задача легко решается как аналитически, так и графически нахождением точки пересечения графиков двух линейных функций. Построение анимационного рисунка, моделирующего эту задачу и ее решение, является хорошей учебно-исследовательской задачей для учащихся 10 классов.

Заметим, что эта задача похожа на задачу о движении вдогонку двух шаров. Дело в том, что график линейной функции $y = kx + b$ задает вертикальное движение точки (шара) $F = (0, y)$ по оси ординат. Анимационный рисунок, изображающий растягивающуюся пружину при добавлении определенного груза, строится в среде GeoGebra несколько труднее.

Таким образом, главная цель использования компьютерных технологий состоит в визуализации математики, в моделировании на экране компьютера жизненных явлений и задач, подлежащих математическому решению, что способствует пониманию, позволяет экспериментировать, поддерживает исследовательский стиль обучения, открывает новую учебно-исследовательскую тематику построения анимационных рисунков по изучаемой математикой теме.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Ларину Сергею Васильевичу за внимание к работе и ценные рекомендации при подготовке статьи.

Библиографический список

1. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону: Легион, 2015.
2. Майер Р.А. Задачи по формированию функциональных понятий: пособие для учителей 5–8 классов. М.: Просвещение, 1965. 112 с.
3. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Феоктистов И.Е. Алгебра. 7 класс: учебник. 13-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2013. 336 с.
4. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>.
5. GeoGebra: официальный сайт. URL: <http://www.geogebra.org>

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ СРЕДЫ MOODLE ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ

THE USE OF THE ELECTRONIC ENVIRONMENT MOODLE WHEN TEACHING MATHEMATICS TO STUDENTS

М.В. Танзы

M.V. Tanzy

Дистанционные образовательные технологии, цифровизация образования, электронная среда Moodle, дистанционный курс, математика, студенты.

В данной статье рассматривается эффективность использования дистанционных курсов, разработанных преподавателями кафедры математики и методики преподавания математики в учебном процессе студентов очной и заочной форм обучения. Внедрение дистанционных курсов в учебный процесс студентов будет способствовать повышению качества усвоения учебного материала.

Distance learning technologies, digitalization of education, electronic environment Moodle, distance learning, mathematics, students.

This article discusses the effectiveness of using distance courses developed by teachers of the Department of mathematics and methods of teaching mathematics in the educational process of full-time and part-time students. The introduction of distance learning courses in the educational process of students will help to improve the quality of learning material.

В настоящее время актуальным стал вопрос внедрения цифровых технологий в промышленность, культуру, государственное управление, здравоохранение, в том числе и в образование. Возможность цифровизации образования предусмотрена нормативными правовыми актами РФ.

Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» [5] является главным законом, регулирующим цифровизацию в образовании, предусматривающий право образовательных организаций осуществлять реализацию образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий [4].

В связи с этим актуальным становится вопрос о реализации электронного обучения через внедрение в преподавание учебных дисциплин дистанционных форм обучения, в частности разработки дистанционных курсов по учебным дисциплинам кафедры математики и методики преподавания математики Тувинского государственного университета (ТувГУ). Оно дает значительное расширение возможности традиционного аудиторного обучения [8].

Для разработки и реализации дистанционных курсов в учебном процессе студентов в качестве программной среды была выбрана система дистанционного обучения LMS Moodle. В настоящее время она является одной из наиболее популярных электронных систем поддержки учебного процесса дистанционного образования [1; 2; 3; 6].

Преподавателями кафедры математики и методики преподавания математики ТувГУ для студентов очной и заочной форм обучения физико-математического

факультета были разработаны дистанционные курсы «Дискретная математика. Модуль 2. Булевы функции», «Производные и их применение», «Методика обучения математике», «Кривые второго порядка». Для студентов нематематических направлений подготовки был разработан дистанционный курс «Математика».

Особенностью дистанционных курсов является возможность конструирования процесса обучения на основе авторских материалов с учетом потребностей обучаемых. Это дает возможность использования различных форм представления учебных материалов (тесты, презентации, скрайбпрезентации, ментальные карты, инфографика, скринкасты, аудио- и видеоматериалы, ссылки на полезные ресурсы Интернета и т.д.). Есть организация контроля и самоконтроля знаний и умений обучающихся. Каждый дистанционный курс имеет солидный банк тестовых заданий (в среднем около 250 заданий). После изучения каждого модуля курса студент проходит контрольное тестирование. При изучении любой темы студент имеет возможность с помощью обучающихся тестов самостоятельно проконтролировать свои знания.

Система Moodle автоматически проверяет тесты и проводит подробный анализ по каждому студенту. При этом преподаватель не тратит время на проверку и анализ тестов. Студенты, которые проходят регулярно тестирование по каждому модулю, показывают результаты, существенно более высокие, чем студенты, обучающиеся по традиционной методике [7].

Интерактивные возможности дистанционных курсов реализуются с использованием форумов, чатов, опросов, совместной работой над учебными и научными проектами, базами данных и др. Это позволяет обеспечивать обратную связь между участниками учебного процесса. Доступ к материалам курса возможен с любого гаджета, имеющего выход в Интернет, в том числе и с мобильных телефонов.

Дистанционные образовательные технологии начали применяться в ТувГУ, начиная с 2016 г., когда был создан Центр дистанционного обучения. В 2019–2020 учебном году с марта 2020 г. в ТувГУ была введена дистанционная форма обучения. Перед преподавателями встал вопрос об эффективной организации обучения студентов с использованием возможностей дистанционных образовательных технологий. Когда университет перешел на работу в удаленном режиме, необходимость применения разработанных преподавателями кафедры математики и методики преподавания математики дистанционных курсов не вызывало сомнений. Дистанционные курсы уже успешно использовались в учебном процессе студентов очной и заочной форм обучения физико-математического, экономического, инженерно-технического, сельскохозяйственного, филологического факультетов и Кызылского педагогического института. Преподавателям не пришлось разрабатывать электронные версии материалов дисциплины. Все уже было сделано (лекции, тесты, задания) и выставлены в дистанционных курсах. Хочется отметить, что качественная организация учебного материала в дистанционном курсе (модульность, логичность, интерактивность) позволила студентам получить достаточно эффективное обучение.

В условиях самоизоляции дистанционное обучение позволило организовать обучение более 300 групп студентов университета (около 2,5 тыс. студентов). Преподаватели и студенты взаимодействуют в одном виртуальном пространстве, при этом физически находясь за своими компьютерами в удаленных друг от друга местах.

В настоящее время пользователей системы дистанционного обучения ТувГУ более 7 тыс. (студенты очной и заочной форм обучения, преподаватели и сотрудники ТувГУ, слушатели программ дополнительного профессионального образования, повышения квалификации и профессиональной переподготовки, обучающиеся Центра довузовской подготовки университета).

Студенты Тувинского государственного университета уже давно привыкли работать в дистанционных курсах, поэтому, когда университет перешел на удаленное обучение, то больших трудностей с обучением они не испытывали. Они имели доступ ко всем лекциям и заданиям, знали сроки сдачи этих заданий, всегда видели оценки и комментарии преподавателя. Внедрение дистанционных курсов в учебный процесс студентов показывают их высокую результативность повышения качества усвоения учебного материала.

Анализ обучения студентов на дистанционных курсах показал, что реализация электронного обучения с применением дистанционных образовательных технологий позволяет Тувинскому государственному университету обеспечить полноценный учебный процесс в сложный период самоизоляции и реализовать учебный план в полном объеме.

Библиографический список

1. Вайнштейн Ю.В., Шершнева В.А., Есин Р.В., Зыкова Т.В. Адаптация математического образовательного контента в электронных обучающих ресурсах // Открытое образование. 2017. № 4. С. 4–12.
2. Вайнштейн Ю.В., Носков М.В., Танзы М.В. Адаптация образовательного контента при обучении математике в условиях двуязычия // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: материалы IV Международной научной конференции: в 2 ч. Красноярск, 2020. С. 64–68.
3. Зыкова Т.В., Сидорова Т.В., Кытманов А.А., Шершнева В.А. и др. О возможностях веб-ориентированной среды MOODLE при создании курса математического анализа // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2014. № 2 (28). С. 67–70.
4. Касаткина Н.П. Цифровизация образования. Опыт внедрения. Elibrary_42315386_87784249.pdf
5. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» // Российская газета. № 303. 31.12.2012.
6. Танзы М.В., Куулар Л.Л., Троякова Г.А., Саая С.К. Технология дистанционного обучения математике студентов в электронной среде MOODLE // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2019. № 1 (47). С. 35–41. DOI: <https://doi.org/10.25146/1995-0861-2019-47-1-101>
7. Танзы М.В. Применение электронного образовательного ресурса при обучении математике студентов сельскохозяйственных направлений // Современные наукоемкие технологии. 2016. № 2-1. С. 167–170.
8. Чехонина О.Б., Кузнецова С.А., Никифорова Е.В. Цифровизация образования в конкретных примерах. Elibrary_42574995_40847909.pdf

РАЗВИТИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ СРЕДСТВАМИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA

DEVELOPMENT OF SPATIAL THINKING OF STUDENTS GEOGEBRA DYNAMIC ENVIRONMENT TOOLS

Г.А. Троякова

G.A. Troyakova

Математическое образование, обучение стереометрии, тела вращения, пространственное мышление, анимация, интерактивная геометрическая среда GeoGebra, профессиональные компетенции учителя.

В статье рассматривается проблема формирования пространственного мышления школьников при использовании системы динамической математики GeoGebra. Исследуется вопрос о влиянии подвижных и оперативных пространственных образов на формирование способностей решать стереометрические задачи.

Mathematical education, stereometry training, body of revolutions, spatial thinking, animation, interactive geometric environment GeoGebra, professional skills of the teacher.

In this article the problem of formation of spatial thinking of school students when using a system of dynamic mathematics of GeoGebra is considered. The question of the influence of mobile and operative spatial images on the formation of abilities to solve stereometric problems is investigated.

Из аналитических обзоров результатов ЕГЭ по Республике Тыва видно, что с задачами геометрического содержания повышенного уровня сложности справляются лишь 2–4 % участников экзамена, а в 2020 г. 0,7 % [1]. В рамках данной статьи мы затронем только проблему изучения тел вращения, цилиндр и конус и обучения решению задач. Проблема тесно связано с особенностями развития пространственного мышления. Владение пространственными представлениями и наличие пространственного воображения является одним из основных критериев образованности обучающихся в области математики, задача формирования этого вида мышления традиционно считается одной из основных задач математического образования.

С другой стороны, информационные технологии сегодня проникают во все сферы общественной жизни, что есть основная черта современного этапа развития общества и в первую очередь охватывает образовательные процессы разного уровня: от школы до вуза. В данной ситуации акцент делается на использование интерактивной геометрической среды GeoGebra [3; 4].

Под пространственным мышлением будем понимать способность представлять предметы в пространстве, мысленно ощущать их расположение и характеристики, манипулировать ими. При этом пространственные образы должны быть подвижными, оперативными. Именно таковы образы, например, тел вращения при их реализации в динамической среде GeoGebra.

В 10 классе на материале стереометрии проводилось наблюдение за формированием способности учащихся работать с воображаемыми пространственными телами (призма, пирамида и т.д.). Проведено исследование в данном направлении в виде тестирования (10 вопросов), где каждый вопрос представлен в виде особой модели, представление о которой можно составить по заданию ниже с ответом.

Пример задания 1.

Слева (рис. 0) даны три вида (проекции) неплоской ломаной линии, не имеющей самопересечений. Найдите эту ломаную и нарисуйте ее изображение в кубе справа. В ответе укажите имя ломаной, начиная с начала ломаной в нижнем основании куба. Если начало и конец, оба, в нижнем или верхнем основании, ориентироваться на алфавитный порядок.

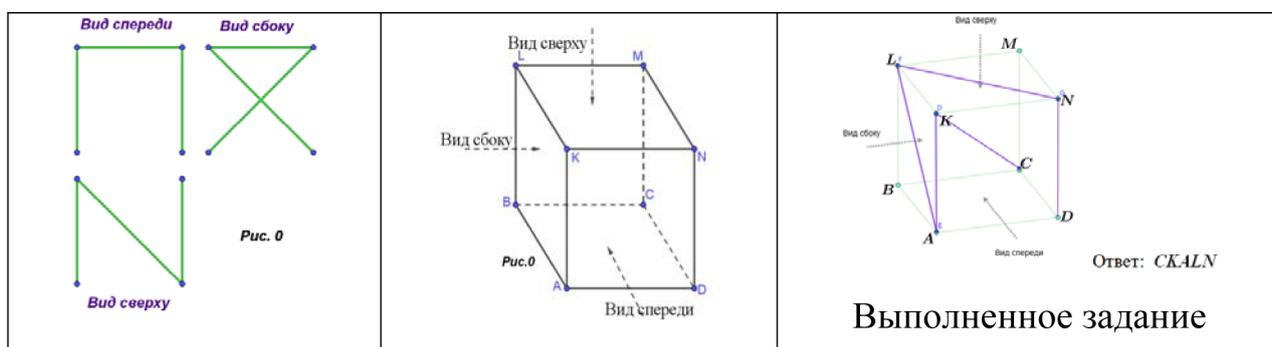


Рис. 0

По итогам тестирования выведен средний коэффициент $k_{\text{ср.}} = 2,8$ для данного класса (подсчет осуществлялся по формуле $k = m/17 + n$). Здесь: 17 – число учеников в классе, m – количество правильно решенных заданий, n – количество неправильно решенных заданий. Очевидно, лучшая ситуация, если $k_{\text{ср.}} = 1$. К ней и надо стремиться.

Изучение новой темы «Тела вращения» начинается с введения определения, чему способствует движущаяся модель (рис. 1, 3, 4). Как и при изучении многогранников, учащиеся в качестве домашнего задания изготавливают модели из листа бумаги: конус и цилиндр. Эти модели постоянно используются во время урока.

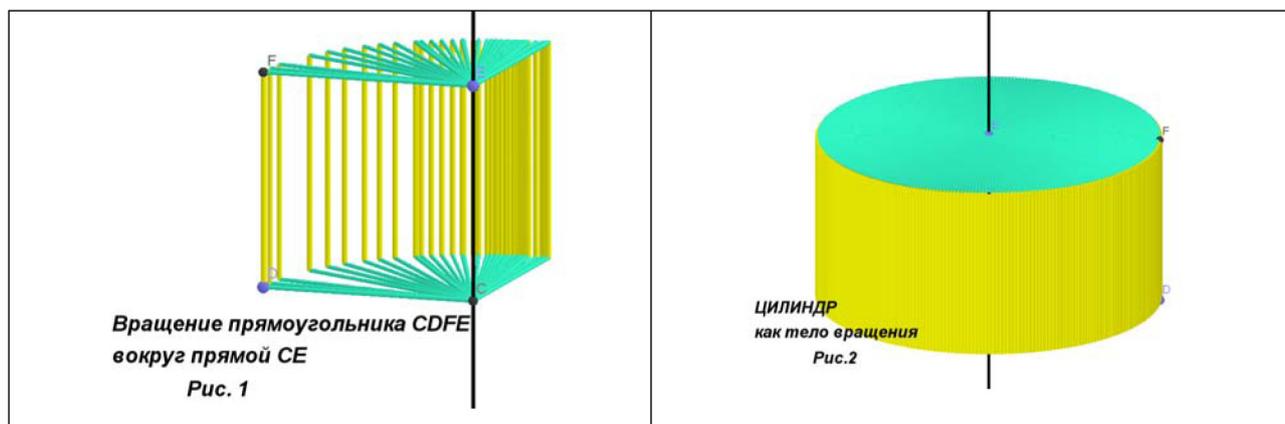


Рис. 1, 2

Представленный динамический рисунок позволяет тщательно отработать определение цилиндра, изучить его элементы (рис. 1, 2), познакомиться с его характеристиками и доказать ряд свойств.

Конус как тело вращения прямоугольного треугольника FHG вокруг катета HG (рис. 3, 4).

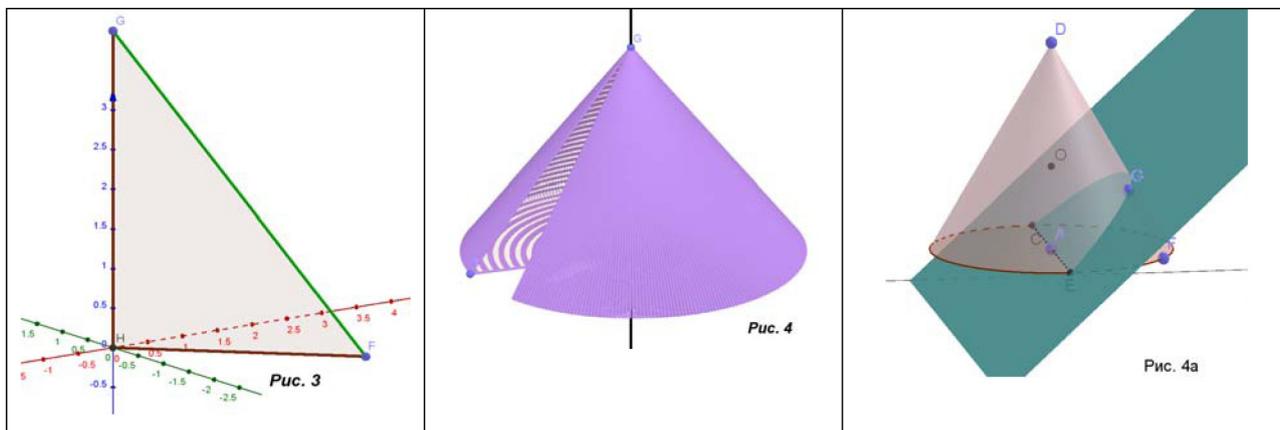


Рис. 3, 4, 4а

В представленной ситуации ученик – активный субъект педагогического процесса. Разные ситуации моделирования объектов с привлечением кратких записей и рисунков «от руки, схематично» в тетради, теоретически обоснованных учащимися комментарий позволяют вовлечь учеников в активный процесс изучения материала, доказательство тезисов и продуманное, аргументированное решение задач.

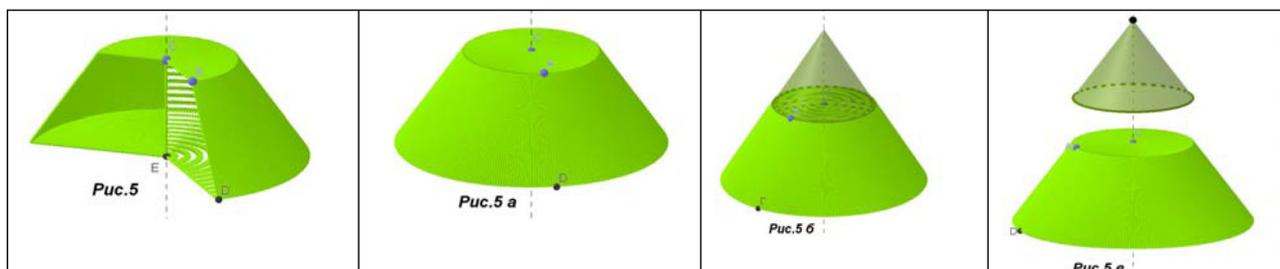


Рис. 5, 5а, 5б, 5в

Учащимся предлагается задача:

а) Образующая конуса равна 1 м и наклонена к плоскости основания под углом 45° . Найдите высоту равностороннего цилиндра, вписанного в конус.

б) Можно ли в равносторонний конус, образующая которого равна 1 м, вписать равносторонний цилиндр? Если можно, то найдите радиус основания такого цилиндра.

Решение данной задачи с привлечением реальных конструкций (рис. 6) позволяет быстро найти ход решения, проговорить основные аргументы для обоснования и неукоснительно прививать культуру выполнения геометрических рисунков. Особо полезным в данной задаче является возможность исследования пункта б). Учащиеся реально убеждаются в возможности заявленной ситуации.

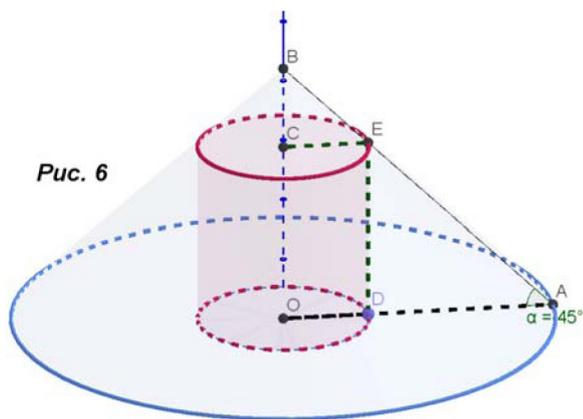


Рис. 6

Рис. 6

Наша проблема состоит в исследовании возможностей по формированию пространственных представлений, реализации плоских рисунков пространственных образов школьниками. Констатация сформированности этих характеристик, естественно, наблюдается при решении задач, тестов и ответах учеников.

Исследование сечений бесконечного конуса плоскостью, продемонстрированной в среде GGB, вызывает неподдельный интерес у школьников (рис. 7).

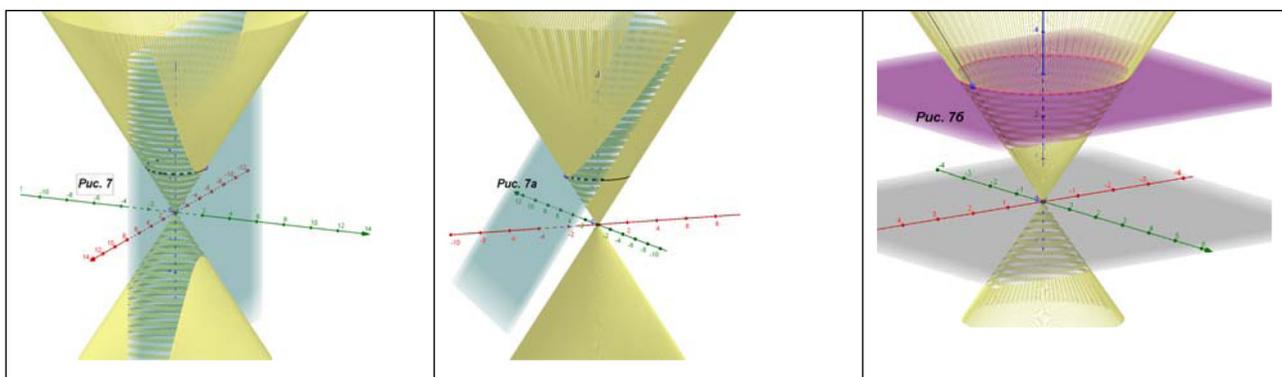


Рис. 7, 7а, 7б

Результаты контрольных мероприятий в формате тестов, самостоятельной и домашней работы свидетельствуют о хорошем понимании материала школьниками. При этом, несмотря на все усилия, 2 ученика часто демонстрируют парадоксальные результаты, свидетельствующие о непонимании соотношений пространственных объектов с их плоскими рисунками.

Библиографический список

1. Результаты государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования в Республике Тыва в 2020 году // Сборник статистических материалов. Кызыл: Государственное бюджетное учреждение «Институт оценки качества образования Республики Тыва», 2020. 83 с.
2. Атанасян Л.С. Геометрия. 10–11 классы: учебник. М.: Просвещение, 2013.
3. Мерзляк А.Г. и др. Математика. Геометрия. Углубленный уровень. 11 класс: учебное пособие. М.: Вентана-Граф, 2019. 241 с.
3. Троякова Г.А. Технология использования динамической среды GeoGebra в преподавании стереометрии // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VIII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием, посвященной 80-летию профессора Ларина Сергея Васильевича. Красноярск, 2019. С. 173–178.
4. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 192 с.

ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОЕКТНОМ МЕТОДЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES IN THE PROJECT METHOD OF TEACHING MATHEMATICS

Е.Р. Туктамышева

E.R. Tuktamysheva

Информационно-коммуникационные технологии, метод проектов, математическое образование, информатизация математической подготовки.

В статье описывается актуальность внедрения информационно-коммуникационных технологий (далее – ИКТ) в проектный метод математической подготовки будущих специалистов. Рассмотрены особенности применения ИКТ в математическом образовании. Применение данных технологий позволит развить у студентов уровень заинтересованности в математической подготовке и поможет перейти от знаниевой парадигмы к компетентностному подходу в обучении.

Information and communication technologies, project method, mathematical education, Informatization of mathematical training.

The article describes the relevance of the introduction of information and communication technologies (ICT) in the project method of mathematical training of future specialists. The features of the use of ICT in mathematical education are considered. The use of these technologies will allow students to develop a level of interest in mathematical training and help them move from the knowledge paradigm to a competency-based approach to learning.

В настоящее время образовательные организации столкнулись с довольно сложной задачей развития образовательной среды в информационном поле. Сама жизнь ускорила информатизацию обучения. Практически каждый педагог столкнулся с проблемами дистанционного обучения, среди которых: снижение посещаемости уроков студентами; непонимание учебного материала у части обучающихся; проблемы контроля сформированных знаний, умений и компетенций. Но и эти проблемы решаемы при должном подходе.

В моей практике применение проектного метода в обучении математике в совокупности с ИКТ помогло решить большую часть вышеописанных проблем, поскольку данный метод универсален, так как его можно применять, работая с учащимися разного уровня подготовки, на любых этапах обучения, на любом расстоянии и при изучении материала различной степени сложности.

В процессе обучения математике, применяя метод проектов, перед педагогом поставлены следующие цели.

1. Формирование заинтересованности и потребности в изучаемом предмете, а также развития творческой деятельности в процессе обучения, (*мотивационно-потребностный аспект*).

2. Овладение систематизированными математическими знаниями, осознание социальной и личной значимости исследовательской деятельности в сфере мате-

матики и прикладных знаний, стремление и умение разрешать проблемные ситуации (*когнитивный аспект*).

3. Развитие следующих умений:

- распознавать, формулировать, обследовать и разрешать проблемные ситуации из области математики, используя знания из других дисциплин;
- самостоятельно, критически мыслить;
- прогнозировать результаты;
- устанавливать причинно-следственные связи;
- применять полученные знания (*деятельностно-практический аспект*).

В дистанционном обучении без применения ИКТ достигнуть эти цели довольно проблематично. Ведь только с внедрением данных технологий мы на расстоянии можем оперативно выдать обучающимся необходимую информацию, поставить перед ними цель направлять и контролировать их деятельность.

Для достижения этих целей в дистанционном режиме педагогу необходимо решить следующие задачи:

- максимально доступно и понятно изложить новую информацию в электронном виде, ведь обучающимся итак не просто. И тут пригодятся примеры практической направленности. В своей практике, для группы каменщиков с ОВЗ при изучении темы «Пропорции, проценты», для большего понимания мной были составлены и разобраны задачи на пропорции приготовления штукатурных, бетонных смесей. Тем самым была показана прикладная ценность изучения математики, а это способствует возникновению и развитию устойчивого интереса к сфере математических знаний, достижению поставленных дидактических целей и задач;

- обозначить проблемные ситуации из математики в сочетании с профессиональным профилем, например, такими как составление и решение систем линейных уравнений с несколькими неизвестными при расчете сложных электрических цепей, или применение теории комплексных чисел при расчете электрических цепей с переменным током, для студентов – будущих электриков и электромехаников;

- организовать познавательную, исследовательскую деятельности своих учеников, используя разнообразные виды самостоятельной деятельности учащихся, ориентированных на приоритет деятельности исследовательского, поискового и творческого характера. Это может быть, как индивидуальная подготовка доклада для семинара в онлайн-режиме, так и групповая работа над проектом с последующим обсуждением и презентацией на вебинаре для команд по 4–5 человек с коллективной ответственностью.

Решение раннее поставленных задач в процессе обучения студентов математике методом проектов в дистанционной среде поможет создать электронный учебно-методический комплекс дисциплины «Математика», доступный для понимания любого студента, который будет не один на один с монитором, а вместе с коллективом и преподавателем выявлять и формулировать проблемы в области математики. В онлайн-режиме иметь возможность обсуждать, исследовать и на-

ходить решения поставленных проблем, а также анализировать, обобщать результаты и делать выводы. Как следствие, ученики рефлексиируют собственные знания, учатся содержательно оценивать собственную деятельность.

Таким образом, даже в дистанционном режиме у проектного метода изучения математики, как и любой другой дисциплины, есть преимущество, которое заключается в том, что ученик в море готовой информации может занимать активную позицию в получении знаний и навыков, что воспитывает его как личность.

Библиографический список

1. Баталина И.К., Игнатъев М.В. Метод проектов в математике и развитие нестандартного мышления у детей // Вестник московского городского педагогического университета. Сер.: Информатика и информатизация образования. 2006. № 6. С. 17–20.
2. Громова Т., Быкова О. Проектная деятельность в учебном процессе // Учитель. 2006. № 4. С. 17–20.
3. Кальней В.А. Структура и содержание проектной деятельности / В.А.Кальней, Т.М. Матвеева, Е.А. Мищенко, С.Е. Шишов // Стандарты и мониторинг в образовании. 2004. № 4. С. 21–26.
4. Кострова Ю.С. Метод проектов на занятиях по высшей математике в контексте компетентностного подхода // Молодой ученый. 2011. Т. 2. № 8. С. 114–117.
5. Ратт Т.А. Концептуальные основы реализации компетентностного подхода в современном образовательном пространстве.
6. Романовская М.Б. Метод проектов в образовательном процессе. М.: Центр «Педагогический поиск», 2006.
7. Пахомова Н.Ю. Метод учебного проекта в образовательном учреждении: пос. для учителей и студ. пед. вузов. изд. 3. М.: Аркти, 2009. 112 с.
8. URL: <http://www.academy.edu.by/sites/logoped/kommtechno.htm>
9. URL: <http://sandbox.openclass.ru/wiki-pages/79809>

АНИМАЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ANIMATION CAPABILITIES OF INTERACTIVE APPLICATION GEOGEBRA FOR EXPERIMENTAL SOLUTION OF GEOMETRIC PROBLEMS

В.О. Чупин

V.O. Chupin

Компьютерная анимация, GeoGebra, геометрические задачи, экспериментальное решение, сплиттеры треугольника.

В статье рассмотрены анимационные возможности динамической среды GeoGebra и использование ее инструментов для экспериментального решения геометрических задач. Выполнено экспериментальное решение задачи о построении сплиттеров треугольника, проходящих через его произвольную точку, с помощью инструментов анимации динамической среды GeoGebra.

Computer animation, GeoGebra, geometric problems, experimental solution, splitters of a triangle.

This paper is devoted to the animation capabilities of the interactive application GeoGebra and to the use of its instruments for experimental solution of geometric problems. The experimental solution to the problem about constructing splitters of a triangle through its arbitrary point has been realized using animation instruments of the interactive application GeoGebra.

Эффективное обучение геометрии невозможно без активного использования наглядности и визуальных представлений [2; 5]. Большие возможности для этого основаны на использовании современных информационно-коммуникационных технологий, компьютерной анимации [2; 3; 4]. Среди современных приложений, позволяющих использовать анимационные инструменты для изучения геометрии, можно выделить динамическую геометрическую среду GeoGebra. Она обладает большим образовательным потенциалом как для обучения школьников, так и для подготовки студентов – будущих учителей математики [2; 4; 5].

Экспериментальные подходы к решению геометрических задач используются не часто. По-видимому, это объясняется и традициями преподавания геометрии в российской школе, и недостаточной сформированностью компетенций в области использования (динамично меняющихся) ИКТ у учителей математики, и недостаточным набором геометрических задач, в которых экспериментальное решение позволит установить интересные закономерности или факты.

Эти проблемы могут быть решены как за счет активного использования анимационных возможностей среды GeoGebra в учебном процессе вуза при подго-

товке будущих учителей математики [3; 4; 5], так и при использовании той же среды на уроках математики в школе [2].

Анимационные возможности, которыми располагает динамическая среда GeoGebra, не так часто используются для изучения геометрии. В GeoGebra для выполнения анимации используют две основные функции (рис. 1).

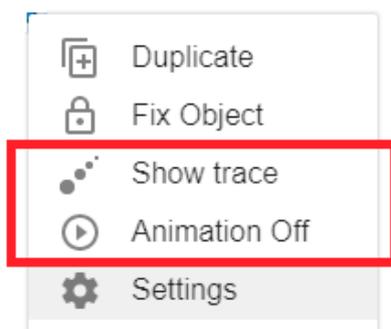


Рис. 1. Анимационные возможности среды GeoGebra

Функция «Оставлять след» (Show trace) позволяет выбранной геометрической фигуре замечать множество точек в процессе ее движения.

Функция «Анимация» (Animation) осуществляет движение выбранной точки (или фигуры, связанной с этой точкой построениями) по заданной прямой или кривой.

Приведем пример демонстрации использования анимационных возможностей среды GeoGebra для вычерчивания траекторий движения точек, а также для изображения множества точек плоскости, получаемых заметанием движущейся геометрической фигуры.

Пример. На данной окружности с центром в точке A фиксируется точка B и выбирается произвольная точка C . Построим две окружности: первую – с центром в точке B и радиусом BC , и вторую – с центром в точке C и радиусом AC . Точки пересечения двух последних окружностей обозначим D и E .

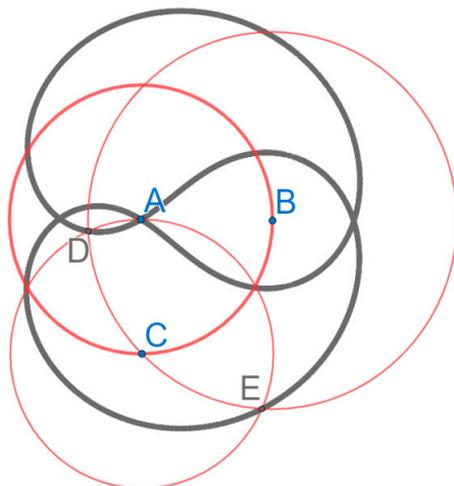
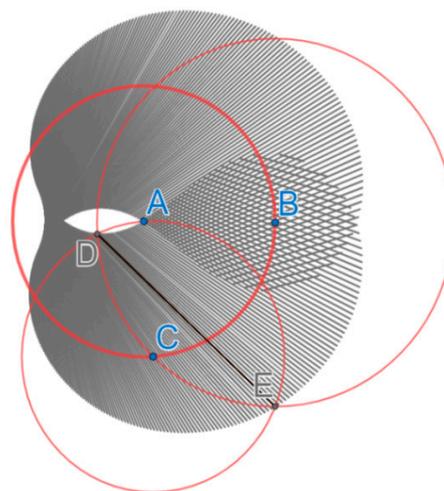
1) Построим траекторию движения точек D и E , когда точка C движется по данной окружности.

Для решения задачи применяем функцию «Оставлять след» для точек D и E и функцию «Анимация» для точки C . Траектория движения точек D и E изображена на рис. 2.

2) Изобразим множество точек плоскости, которое замечает отрезок DE при движении точки C по данной окружности.

Для решения задачи используем функцию «Оставлять след» для отрезка DE и функцию «Анимация» для точки C . Множество точек, которые замечает отрезок DE , изображено на рис. 3.

С помощью анимационных инструментов среды GeoGebra можно проводить визуальные геометрические эксперименты и легко и наглядно получать линии и изображения множеств, аналитическое описание которых является достаточно сложным.

Рис. 2. Траектории движения точек D и E Рис. 3. Множество точек, которые заметает отрезок DE

Сформулируем геометрическую задачу, экспериментальное решение которой основано на активном использовании анимационных инструментов динамической среды GeoGebra.

Задача. *Внутри треугольника выбирается произвольная точка. Через нее нужно провести все прямые, которые делят периметр треугольника пополам. Как разбиваются внутренние точки треугольника по этому свойству?*

Замечание. Для треугольника известно много замечательных точек и отрезков. Среди них есть точки и отрезки, которые связаны с делением периметра треугольника пополам.

Кливер – это отрезок, который проходит через середину стороны и делит периметр пополам. Все кливеры треугольника пересекаются в одной точке – *точке Шпикера* [1].

Сплиттер – это отрезок, который проходит через вершину и также делит периметр пополам. Известно, что сплиттер треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой касания вневписанной окружности на противоположной стороне. Сплиттеры треугольника пересекаются в одной точке, которая называется *точкой Нагеля* [1].

Будем называть все прямые, которые делят периметр треугольника пополам, *сплиттерами*.

Решение. Построим произвольный $\triangle ABC$ и его сплиттеры AF и CM (с помощью вневписанных окружностей). Известно, что отрезки касательных, проведенных к вневписанной окружности произвольного $\triangle ABC$ из его вершин, равны полупериметру. Тогда $AH = AG = \frac{P_{ABC}}{2}$ и $CO = CN = \frac{P_{ABC}}{2}$ (рис. 4).

Отметим точку P на стороне AC . Чтобы на стороне AB найти точку Q , такую, что PQ будет сплиттером, нужно от точки M отложить отрезок, равный CP (рис. 5).

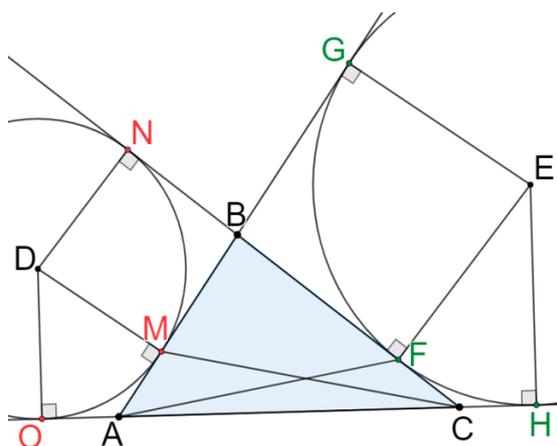


Рис. 4. AF и CM – сплиттеры $\triangle ABC$;
 $AH = AG = CO = CN = \frac{P_{ABC}}{2}$

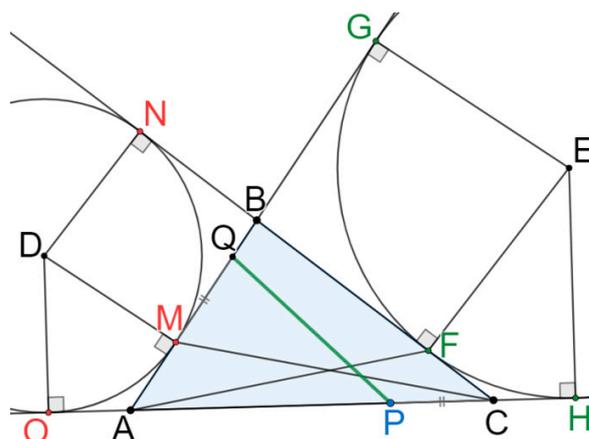


Рис. 5. $CP = MQ$; PQ – сплиттер $\triangle ABC$

Изменяя положение точки P по направлению от C к A , получим множество точек $\triangle ABC$, заметаемых сплиттером PQ . Следовательно, через каждую такую точку можно провести хотя бы один сплиттер. Через точки, не попавшие в это множество, нельзя провести сплиттер такого типа. Кроме того, рассмотрим движение точки P вне отрезка AC до точки H .

Применим функции «Оставлять след» к отрезку PQ и «Анимация» к точке P по отрезку AH , получим множество точек, заметаемых PQ (рис. 6). Можно заметить, что при таком движении вычерчивается контур огибающей, касательные к которой будут являться сплиттерами (рис. 7).

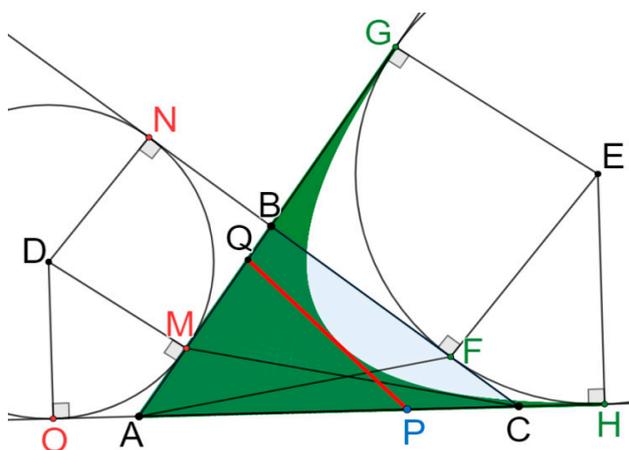


Рис. 6. Множество точек, заметаемых сплиттером PQ

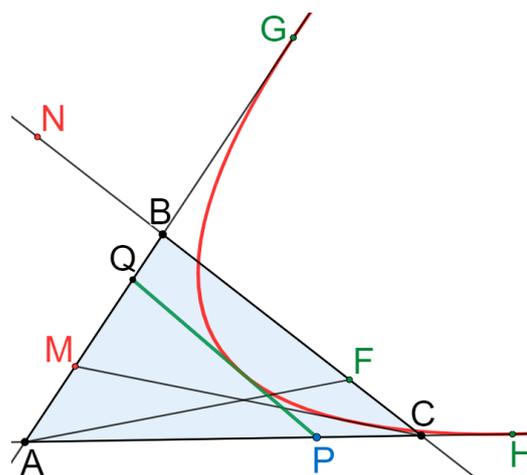


Рис. 7. Контур огибающей множества точек, заметаемых сплиттером PQ

Таким образом, чтобы провести сплиттер в $\triangle ABC$, пересекающий стороны AB и AC , нужно построить касательную к этой огибающей.

Выполним аналогичные анимационные построения в GeoGebra для сплиттеров, пересекающих пары сторон AB и BC , AC и BC (рис. 8).

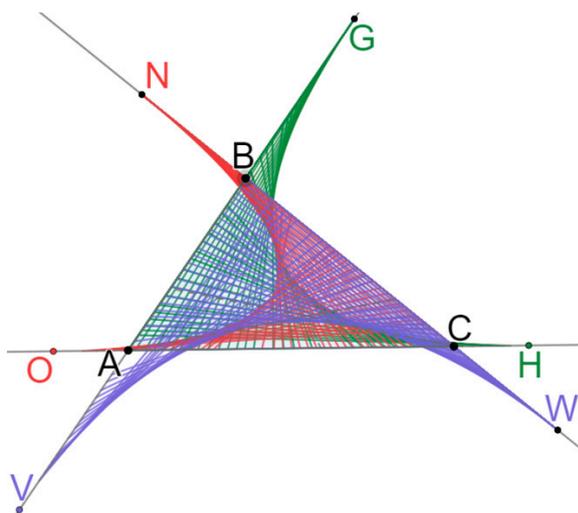


Рис. 8. Множества точек, замечаемых сплиттерами $\triangle ABC$

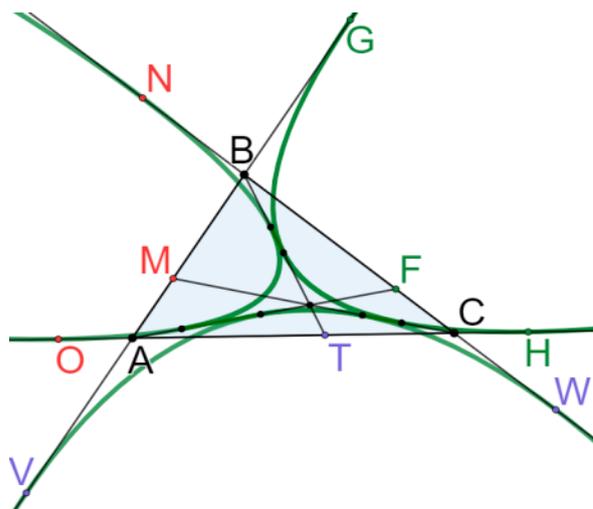


Рис. 9. Контуры огибающих множеств точек, замечаемых сплиттерами $\triangle ABC$

Можно заметить (рис. 8), что сплиттеры $\triangle ABC$ замечают все множество внутренних точек $\triangle ABC$. Следовательно, через любую точку внутри треугольника можно провести хотя бы один сплиттер треугольника. Кроме того, внутри треугольника все три множества точек, замечаемых сплиттерами $\triangle ABC$, пересекаются и при этом образуют «криволинейный треугольник», образованный контурами огибающих множеств точек, замечаемых сплиттерами $\triangle ABC$, и сплиттерами $\triangle ABC$, проведенными из его вершин (рис. 8, 9). Значит, максимальное количество сплиттеров треугольника, которые можно провести через одну точку, будет равно трем.

Зная, что сплиттеры треугольника – это касательные к соответствующим контурам огибающих (по построению множеств точек, замечаемых сплиттерами треугольника) (рис. 7, 9), можно предположить, что если произвольная точка находится вне «криволинейного треугольника» или в его вершинах, то через нее проходит только 1 сплиттер (рис. 10); если произвольная точка лежит на сторонах «криволинейного треугольника» (и отлична от его вершин), то через нее проходят 2 сплиттера (рис. 11); если произвольная точка – внутри «криволинейного треугольника», то через нее проходят 3 сплиттера (рис. 12).

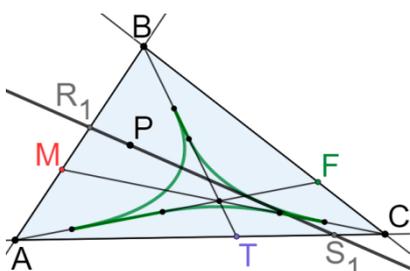


Рис. 10. Пример точки P , через которую проходит только 1 сплиттер

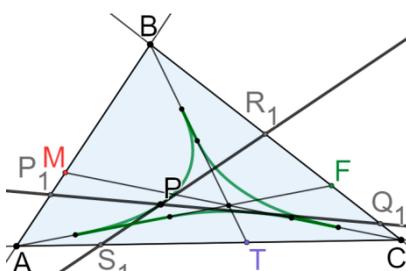


Рис. 11. Пример точки P , через которую проходят ровно 2 сплиттера

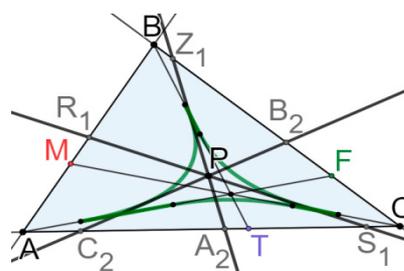


Рис. 12. Пример точки P , через которую проходят ровно 3 сплиттера

Таким образом, мы показали, что с помощью анимационных инструментов среды GeoGebra можно получить экспериментальное решение геометрической задачи. В результате построено разбиение множества точек треугольника в зависимости от количества сплиттеров, которые через них можно провести. На основе полученного экспериментального решения можно проверить, что контуры огибающих множеств точек, заметаемых сплиттерами треугольника, являются кривыми Безье, построенными по трем точкам: по вершине данного треугольника и двум точкам касания вневписанной окружности продолжений сторон треугольника, выходящих из этой вершины (рис. 7, 9).

Библиографический список

1. Honsberger R. Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1995.
2. Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе / Абдулкин В.В. и др. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2019.
3. Ларин С.В. Использование компьютерной анимации при решении исследовательских задач // Информатизация образования и методика электронного обучения: материалы II Международной научной конференции. Сибирский федеральный университет, 2018. С. 139–143.
4. Майер В.Р., Семина Е.А. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – будущих учителей математики. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2014.
5. Нигматулин Р.М., Мартынова Е.В. Использование системы динамической геометрии GeoGebra для организации исследовательской деятельности бакалавров педагогического образования в курсе геометрии // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. КГПУ им. В.П. Астафьева, 2019. С. 193–197.

О ПОДГОТОВКЕ УЧАЩИХСЯ АРХАНГЕЛЬСКОЙ ОБЛАСТИ К ОЛИМПИАДАМ И КОНКУРСАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

ABOUT PREPARATION OF PUPILS OF THE ARKHANGELSK REGION FOR OLYMPIADS AND COMPETITIONS IN MATHEMATICS

Т.С. Ширикова, М.М. Никитин

T.S. Shirikova, M.M. Nikitin

Олимпиады и конкурсы по математике, модель подготовки талантливых школьников по математике, олимпиадные задачи.

Одной из задач, поставленных государством перед системой образования, является выявление и развитие талантов и способностей подрастающего поколения. Традиционно основным инструментом выявления математически одаренных учащихся осуществляется путем проведения многоэтапных олимпиад и конкурсов. Главной среди них является Всероссийская олимпиада школьников, которая позволяет отобрать лучших из лучших, так как ее участники проходят четырехступенчатый отбор.

Одной из проблем такой системы выявления талантов является низкая успешность в многоступенчатых олимпиадах учащихся, проживающих в малых городах и селах. В них нет специалистов и возможностей организации дополнительного образования для подготовки олимпиадников.

Цель статьи – представить опыт решения данной проблемы в Архангельской области РФ. В статье описывается работа областной интеллектуальной школы «Созвездие». Определяются направления дальнейшего ее развития на основе анализа международного опыта.

Olympiads and competitions in mathematics, model of training talented students in mathematics, preparing students.

One of the tasks set by the state for the education system is to identify and develop younger generation talents and abilities. Traditionally, the main way to identify mathematically gifted students is through multi-stage Olympiads and competitions. The main among them is the all-Russian Olympiad for schoolchildren. It allows you to select the best of the best, as its participants go through a four-stage selection process.

One of the problems of such a system of talent identification is the low success rate in multi-stage Olympiads of students living in small towns and villages. They do not have specialists and opportunities to organize additional education for the preparation of Olympiads.

The purpose of the article is to present the experience of solving this problem in the Arkhangelsk region of the Russian Federation. The article describes the work of the regional intellectual school “Constellation”. The directions of its further development are determined based on the analysis of international experience.

Одной из главных задач общего образования в РФ является раскрытие и развитие способностей каждого ученика, оказание ему помощи в самоопределении. Это закреплено в Концепции общенациональной системы выявления и развития молодых талантов [2].

Олимпиады и конкурсы по математике являются средством выявления одаренности школьников в этой области.

На сегодняшний день в России в среднем в год проводится около 70 олимпиад различных масштабов и уровней [5]. Главной из них является Всероссийская олимпиада школьников (ВсОШ) [3]. На сегодняшний день в этой олимпиаде ежегодно принимают участие более шести миллионов учащихся разных образовательных учреждений [6].

Участникам Всероссийской олимпиады необходимо преодолеть четыре этапа: школьный, муниципальный, региональный и всероссийский (заключительный). Отличительной особенностью ВсОШ является последовательный отбор участников последующего этапа среди победителей и призеров предыдущего. Это накладывает серьезные требования на подготовку участников как с предметной, так и психологической точки зрения.

Во Всероссийской олимпиаде по математике участвуют школьники начиная с 4 класса. При этом для 4–6 классов в настоящее время проводится только школьный этап, а для 7 и 8 классов – только школьный и муниципальный этапы. В восьмом классе роль регионального и заключительного этапов ВсОШ играет олимпиада им. Леонарда Эйлера [4].

В 9–11 классах формат Всероссийской олимпиады становится полным – присутствуют все четыре этапа. Муниципальный этап проходит в заранее установленный органами местного самоуправления единый день. Предлагается пять-шесть задач различной степени сложности. Задания разрабатываются муниципальными предметно-методическими комиссиями, основаны на содержании образовательных программ основного общего и среднего общего образования углубленного уровня и соответствующей направленности (профиля). По своему содержанию эти задачи мало чем отличаются от задач, присутствующих в школьных учебниках.

Пример задач муниципального этапа ВсОШ

1. По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд, когда же они едут в одном направлении, то один настигает другого каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров? (9 класс, 2016).

Решение: Если скорость первого велосипедиста x , то в 10 секунд он проезжает $10x$ метров. Второй же, двигаясь ему навстречу, проезжает от встречи до встречи остальную часть круга, т. е. $170 - 10x$ метров. Если скорость второго y , то это составляет $10y$ метров; итак, $170 - 10x = 10y$.

Если же велосипедисты едут один вслед другому, то в 170 секунд первый проезжает $170x$ метров, а второй $170y$ метров. Если первый едет быстрее второго, то от одной встречи до другой он проезжает на один круг больше второго, т. е. $170x - 170y = 170$. После упрощения этих уравнений получаем: $x + y = 17$, $x - y = 1$, откуда $x = 9$, $y = 8$ (метров в секунду).

2. Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих чисел (10 класс, 2014).

Решение: Сумма данных чисел равна 150. Так как все числа различны, то сумма девяти наименьших из них не меньше, чем $1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Следовательно, наибольшее число не может быть больше, чем 105. Например: $(1 + 2 + \dots + 9 + 105) : 10 = 15$.

На этих этапах для продвижения в задаче достаточно прочных знаний программного материала: свойств линейных и квадратичных функций; основ теории чисел; приемов и методов решения уравнения и неравенства; теорем планиметрии и стереометрии, основ математического анализа и формул комбинаторики.

Региональный и заключительный этапы проходят по единой схеме: первый день и второй день. Задания разрабатываются центральными предметно-методическими комиссиями. Несмотря на то, что предлагаемые ими задачи также основаны на содержании образовательных программ основного общего и среднего общего образования углубленного уровня и соответствующей направленности (профиля), решение их требует от учащихся привлечения достаточно большого количества оригинальных идей и владения достаточно большим арсеналом эвристических приемов и методов.

Пример задач регионального этапа ВсОШ

1. Назовем *расстоянием* между двумя клетками клетчатой доски наименьшее количество ходов, за которое шахматный король может добраться от одной из них до другой. Найдите наибольшее количество клеток, которое можно отметить на доске 100×100 так, чтобы среди них не нашлось двух клеток, расстояние между которыми равно 15 (11 класс, первый день, 2019).

2. Два приведенных квадратных трехчлена $f(x)$ и $q(x)$ таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства $f(1) = q(2)$ и $q(1) = f(2)$. Найдите сумму всех четырех корней этих трехчленов (9 класс, первый день, 2019).

В каждый из этих дней предлагается по пять задач (региональный этап) или по четыре задачи (заключительный этап).

Практика показывает, что участниками регионального и всероссийского этапов становятся чаще всего учащиеся, проживающие в хорошо известных культурных центрах: Москва, Санкт-Петербург, Новосибирск и т.п.

Учащиеся малых городов и сел, ставшие призерами муниципальных этапов, не набирают достаточно баллов для прохождения на последующие этапы. Дело в том, что их подготовкой занимаются школьные учителя, многие из которых никогда не принимали участие в олимпиадах и не имеют достаточного уровня математической и методической подготовки для подготовки олимпиадников.

Все это в большой степени характерно для Архангельской области, территория которой в 5 раз больше Болгарии. Для решения этой проблемы Министерством образования и науки Архангельской области в декабре 2017 г. было инициировано создание региональной интеллектуальной школы «Созвездие» (Школа), в которой подготовка победителей и призеров школьного и муниципального этапов осуществляется с использованием Цифрового образовательного кольца Архангельской области. Проект «Цифровое образовательное кольцо Архангельской области» был реализован при содействии Министерства образования и нау-

ки Архангельской области с целью повышения эффективности коммуникаций с использованием современных технических средств и технологий.

Данный ресурс сделал доступным качественную подготовку к олимпиадам и конкурсам учащихся из самых отдаленных уголков Архангельской области. Преподавание в дистанционной интеллектуальной школе ведут тренеры из Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова, они же проверяют работы учащихся. Принять участие в работе этой дистанционной школы может практически любой желающий, по рекомендации учителя. Для этого от школы лишь должны быть поданы заявки на зачисление.

Занятия проводятся раз в неделю в послеурочное время. Основными формами организации учебного процесса являются: лекции в режиме видеоконференцсвязи (ВКС); домашние работы; итоговая контрольная работа. Следует отметить, что все лекции доступны и в записи. А также в рамках лекционных занятий преподаватели дают разбор домашних заданий и Итоговой контрольной работы. Ученики 8 и 10 классов, успешно закончившие курсы Дистанционной интеллектуальной школы и имеющие опыт успешного участия на различных этапах ВсОШ, приглашаются для продолжения обучения на очную летнюю школу. Поезд к месту проведения школы, проживание учащихся и обучение в ней осуществляется за счет средств областного бюджета.

Для победителей и призеров регионального этапа (учащихся 9–11 классов) дополнительно организуются весенние сборы, которые проходят также в очном формате.

Тренеры, работающие с олимпиадниками в школе «Созвездие», прошли специальную подготовку в федеральном образовательном центре «Сириус». Они также постоянно совершенствуют свои знания, изучая опыт работы с участниками олимпиад в других регионах и странах.

Появление школы «Созвездие», развитие Российско-Болгарских отношений САФУ открыло дорогу и для построения обучения в соответствии с моделью подготовки талантливых школьников в области математики, предложенную доктором педагогических наук, профессором Гроздевым Савой Ивановым [1].

Профессор Гроздев предлагает всех обучающихся, участвующих в математических олимпиадах и конкурсах, разделить на 5 групп, в зависимости от их способностей, и далее работать в группах, повышая их уровень подготовки. При этом осуществляется такая организация развивающей среды, которая стимулирует любознательность школьников. Такие приемы, как интеллектуальные соревнования, игры, самостоятельное конструирование школьниками олимпиадных задач и др., позволяют провести занятия наиболее эффективно.

В интеллектуальной школе «Созвездие» преподаватели работают с разными группами обучающихся. Так, к первой группе отнесем учащихся Дистанционной школы, которые представляют собой в большинстве своем просто интересующихся математикой детей и нигде себя не проявивших. Как правило, в Дистанционной школе обучается до 300–400 учащихся одновременно. Ко второй группе отнесем учащихся Летней интеллектуальной школы, это дети, имеющие положитель-

ный опыт участия в различных этапах всероссийской олимпиады школьников и/или успешно закончившие курсы Дистанционной интеллектуальной школы «Созвездие». Как правило, таких детей 20–30. К третьей группе относим учащихся Весенней школы, вошедших в состав команды Архангельской области заключительного этапа ВсОШ. Таких ребят, как правило, до 20. При организации занятий в работе Весенней и Летней интеллектуальных школ используются приемы работы: соревнования в командах по решению задач, решение серий задач, математические игры и ребусы, мозговой штурм по решению сложных, нестандартных задач. Благодаря такой организации процесса подготовки к олимпиадам по математике школьники Архангельска и Архангельской области успешны на всех этапах ВсОШ.

При разработке учебной программы по подготовке к олимпиадам и конкурсам по математике разработчики ориентируются на структуру олимпиадных заданий прошлых лет.

Приведем в качестве примера фрагмент программы Летней интеллектуальной школы для 10 класса в 2019 г.:

| № | Содержание обучения | Кол-во, час |
|---|--|-------------|
| 1 | «Оценка + пример». Построение примеров и контрпримеров | 2 |
| 2 | Метод математической индукции | 3 |
| 3 | Элементы комбинаторики | 3 |
| 4 | Принцип Дирихле | 3 |
| 5 | Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах) | 2 |
| 6 | Вписанная и описанная окружности | 4 |
| 7 | Экстремальные задачи по геометрии | 2 |

Предложенный подход к организации подготовки к олимпиадам и конкурсам по математике позволяет обеспечить управление процессом обучения, уточнить деятельность учащихся по достижению результатов и достигнуть поставленные образовательные цели.

Библиографический список

1. Grozdev S. For Higt Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice) // Bulgarian, 1-st Edition, 2007.
2. Концепция общенациональной системы выявления и развития молодых талантов. URL: <http://edu53.ru/np-includes/upload/2012/09/10/2837.pdf> (дата обращения: 10.11.2020).
3. Методический сайт всероссийской олимпиады школьников. URL: <http://vserosolymp.rudn.ru/> (дата обращения: 10.11.2020).
4. Олимпиада им. Леонарда Эйлера. URL: <http://www.matol.ru/index.php> (дата обращения: 10.11.2020).
5. Официальный интернет-портал правовой информации. Приказ Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 30.08.2019 № 658 «Об утверждении перечня олимпиад школьников и их уровней на 2019/20 учебный год». URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001201909240046> (дата обращения: 10.11.2020).
6. Школы России. Информационная система. URL: <https://eduru.ru/news/348532> (дата обращения: 10.11.2020).

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ, ШКОЛЬНОЙ
И НЕЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ**

ОБУЧАЮЩИЙ ВИДЕОРОЛИК «ЛЕНТА МЁБИУСА»

TRAINING VIDEO «MOBIUS STRIP»

В.С. Лукина

V.S. Lukina

Музей занимательных наук, популяризация математического знания, мультимедийный продукт, лента Мёбиуса.

В статье представлено краткое описание содержания обучающего видеоролика, демонстрирующего свойства и практическое использование ленты Мёбиуса.

Museum of entertaining science, popularization of mathematical knowledge, multimedia product, Mobius strip.

The article presents a brief description of the content of the training video demonstrating the properties and practical use of the Mobius strip.

В настоящее время существуют различные формы популяризации научного знания [2]. В условиях дистанционного обучения одной из наиболее эффективных форм, по нашему мнению, являются обучающие видеоматериалы.

Цель данной статьи – представить содержание обучающего видеоролика, демонстрирующего свойства и практическое применение ленты Мёбиуса.

Видеоролик (рис. 1) выполнен с помощью средств программ: PowerPoint (заставки для видео), Audacity (запись звука), Sony Vegas Pro (монтаж видео).

Локация видеоролика: МОЦ «Музей занимательных наук САФУ» [4].

Ссылка на ресурс: https://vk.com/engaging_sciences?z=video-79559305_456239069%2F65a4e7bc59c02b6948%2Fpl_wall_-79559305



Рис. 1. Обложка обучающего видеоролика

Подготовительный этап

Опыт. Листок бумаги/шар и муравей (рис. 2).

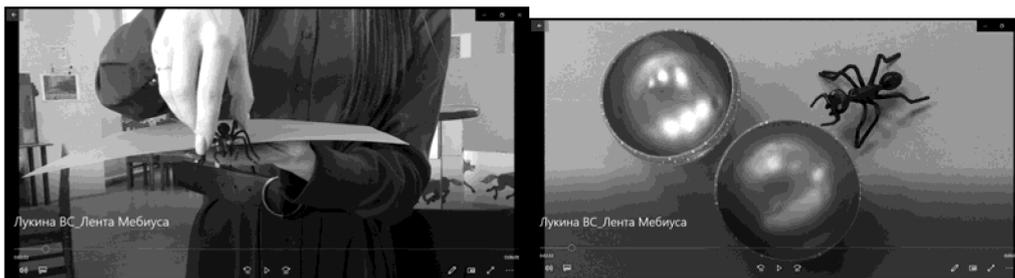


Рис. 2. Двусторонние поверхности

Примечание. Большинство объектов, с которыми мы сталкиваемся в реальном мире, имеют две стороны.

Вопрос. Существуют ли объекты в пространстве, имеющие всего одну сторону?

Примечание. Существуют. Первую такую фигуру открыл немецкий математик Август Мёбиус (рис. 3).



Рис. 3. Август Мёбиус

Изготовление ленты

1. Возьмите узкую полоску бумаги и склейте ее края. Какая фигура у вас получилась?

Примечание. Получившаяся фигура – кольцо (две стороны / две границы) (рис. 4).



Рис. 4. Изготовление кольца

2. Возьмите другую полоску бумаги и склейте ее края, повернув перед склеиванием один из краев на 180 градусов. Какая фигура у вас получилась?

Примечание. Математическая фигура – лента Мёбиуса (одна сторона / одна граница) (рис. 5).



Рис. 5. Изготовление ленты Мёбиуса

Свойства ленты Мёбиуса [1]

Односторонность и непрерывность. Проведите фломастером непрерывную линию вдоль ленты. Обойдя ее всю, Вы вернетесь в исходную точку (рис. 6).

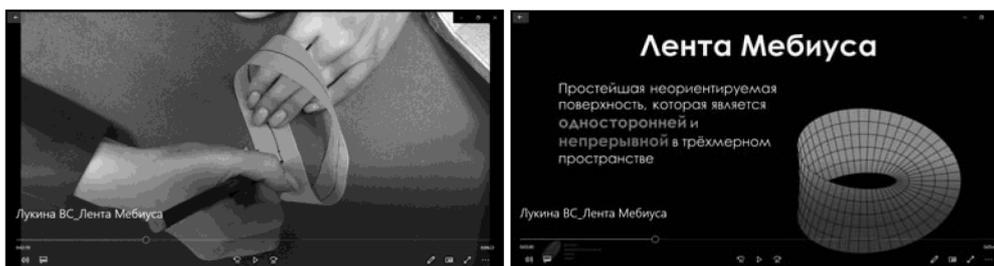


Рис. 6. Доказательство односторонности и непрерывности ленты

Примечание. Лента Мёбиуса – простейшая неориентируемая поверхность, которая является односторонней и непрерывной в трехмерном пространстве.

Отражение. Часть 1. Возьмите полоску двумерного листа и склейте края так, чтобы получилось двустороннее кольцо. Нарисуйте на кольце человечков (в правой руке – волшебная палочка, в левой – часы).

Примечание. Как бы ни бегали человечки по двумерному листу, у них всегда в правой руке будет палочка, а в левой – часы (рис. 7).



Рис. 7. Человечки на кольце

Часть 2. Сверните полоску в лист Мёбиуса. Что произойдет с человечком?

Примечание. Человечек, выйдя из дома направо, пройдя длину листа, подойдет к своему же дому слева, но окажется относительно него кверху ногами (рис. 8).

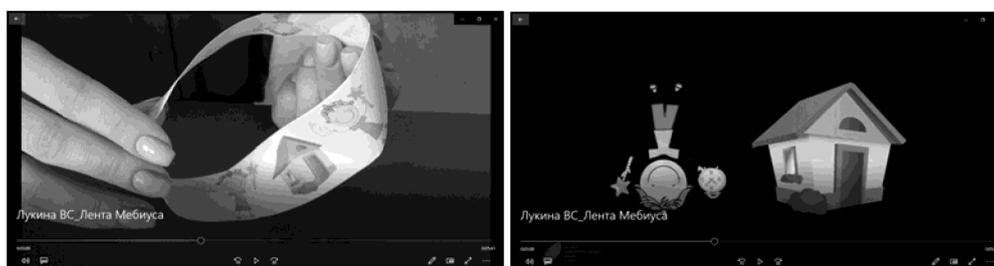


Рис. 8. Отражение человечка сверху вниз на ленте Мёбиуса

Эксперименты с лентой Мёбиуса

Эксперимент 1. Разрежьте ленту Мёбиуса вдоль посередине. Какая фигура у Вас получится?

Примечание. Если разрезать ленту вдоль по линии, равноудаленной от краев, то вместо двух лент Мёбиуса получится одна двусторонняя, дважды закрученная лента, которая называется «Афганской лентой» (рис. 9).

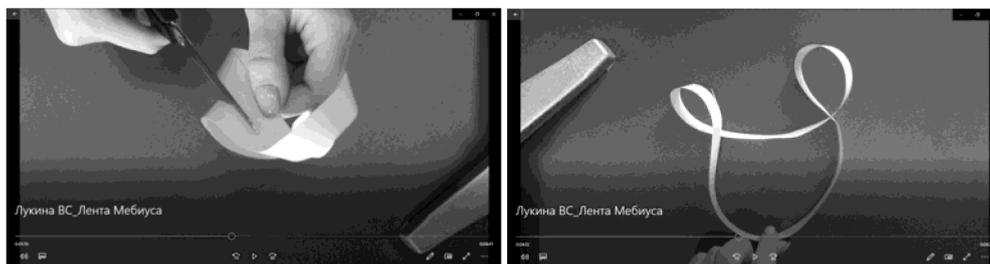


Рис. 9. Разрезание ленты по средней линии

Эксперимент 2. Разрежьте ленту Мёбиуса, отступив от края на треть ширины. Какая фигура у Вас получится?

Примечание. Если разрезать ленту Мёбиуса, отступая от края на треть ее ширины, то получаются две ленты: одна – более короткая лента Мёбиуса, другая – длинная двусторонняя дважды закрученная Афганская лента (рис.10).

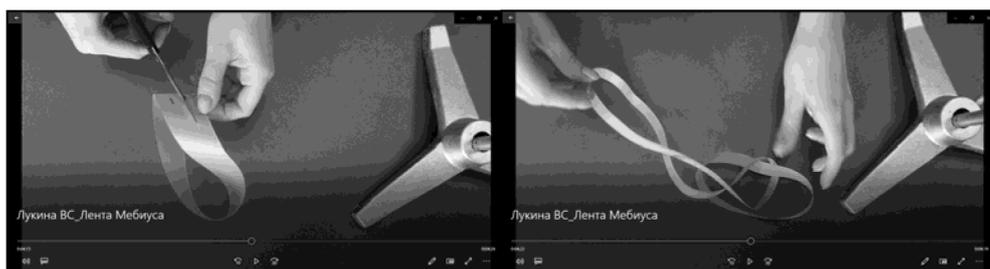


Рис. 10. Разрезание ленты, отступая от края на треть ширины

Эксперимент 3. Как после одного продольного разреза получить три сцепленных между собой кольца?

Примечание. Необходимо сделать гармошку из одного перегиба и перед склеиванием повернуть конец бумажной ленты на 360 градусов, а затем разрезать полученное кольцо посередине (рис. 11).

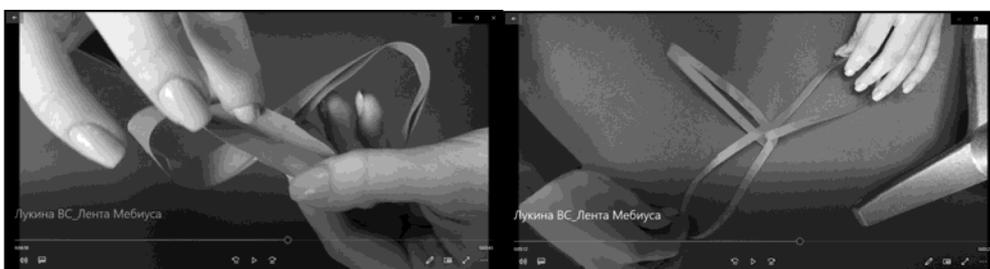


Рис. 11. Получение трех сцепленных колец

Применение ленты Мёбиуса

Задание 1. Посмотрите анимацию «Экспонаты музея занимательных наук САФУ» (рис. 12) и найдите изобретение, основанное на свойствах ленты Мёбиуса.



Рис. 12. Анимация «Экспонаты музея занимательных наук САФУ»

Примечание. Лента Мёбиуса используется в электрофорной машине.

Задание 2. Найдите ленту Мёбиуса в электрофорной машине (рис. 13) и ответьте на вопрос – для чего она нужна?



Рис. 13. Электрофорная машина

Примечание. Электрофорная машина состоит из двух дисков. Один диск вращается по часовой стрелке, другой – против. Это обеспечивается с помощью приводных ремней, один из которых перекручен на 180 градусов – в ленту Мёбиуса. За счет этого обеспечивается разнонаправленное вращение дисков, которое необходимо для индукции зарядов.

Задание 3. Посмотрите на модель Lego WeDo «Танцующие птицы» (рис. 14). Обратите внимание, что птицы вращаются в одном направлении. Что нужно сделать, чтобы птицы крутились в разные стороны?



Рис. 14. Модель Lego WeDo «Танцующие птицы»

Примечание. Для того чтобы птицы крутились в противоположных направлениях, необходимо перекрутить ремень на 180 градусов.

Лента Мёбиуса в жизни [3]

– Встречается в архитектуре, скульптуре, изобразительном искусстве, кулинарии;

- энергозатраты снижаются на 20 %, а качество смеси улучшается, если лопасти кухонного миксера или бетономесителя, скручены в форме ленты Мёбиуса;
- ручка эскалатора, не что иное, как лента Мёбиуса, это позволяет равномерно изнашиваться, и продлевает срок службы резины (рис. 15).

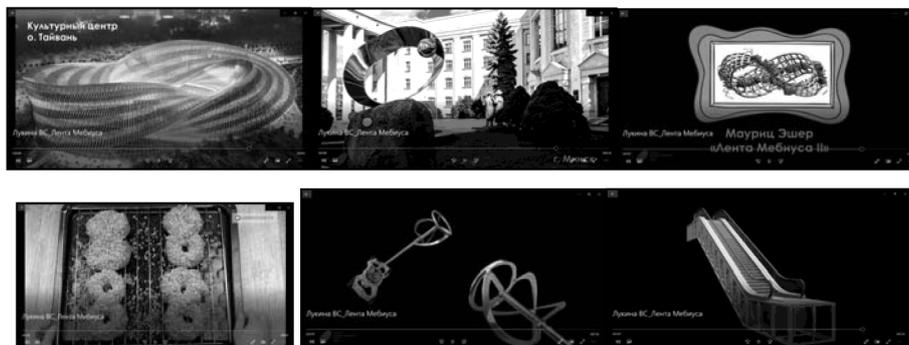


Рис. 15. Лента Мёбиуса в жизни

Данный видеоролик может быть полезен педагогам как инструмент расширения кругозора и развития познавательного интереса учащихся в области математики.

Библиографический список

1. Боднарчук Ю.Д., Александрова Т.Л. Лента Мёбиуса // Ижевская государственная сельскохозяйственная академия (Ижевск). 2015. С. 389–392. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26013044>, доступ из НЭБ «E-Library» (дата обращения: 28.10.2020).
2. Дивеева Н.В. Популяризация науки как разновидность массовых коммуникаций в условиях новых информационных технологий и рыночных отношений: дис. ... канд. филол. наук: 10.01.10. Ростов-на-Дону, 2014. 186 с.
3. Малахов Д.М. Исследование ленты Мебиуса // ОБРАЗОВАНИЕ. ТЕХНОЛОГИЯ. СЕРВИС. 2012. Т. 1, № 1 (3). 2012. С. 68–72. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23696841>, доступ из НЭБ «E-Library» (дата обращения: 28.10.2020).
4. Музей занимательных наук САФУ им. М.В. Ломоносова, 2014. URL: <https://narfu.ru/hsnst/struktura-i-kontakty/muzey-zanimatelnykh-nauk/> (дата обращения: 28.10.20).

ИНВЕРСОР

INVERSOR

И.А. Маслов, М.А. Павлова

I.A. Maslov, M.A. Pavlova

Инверсия, модель инверсора, Прямилло Липкина, GeoGebra, отражение относительно окружности.

В статье рассматривается пример построения в GeoGebra динамической модели шарнирного механизма, называемого Прямиллом Липкина. Результаты исследования этой модели использованы для разработки модели инверсора из деталей конструктора Lego Mindstorms и подручных средств.

Inversion, inversion model, Lipkin's mechanism, GeoGebra, reflection in a circle.

The article considers an example of constructing in GeoGebra a dynamic model of a hinge mechanism called Lipkin's mechanism. The results of the study of this model were used to develop the inversion model mechanism from Lego parts and improvised tools.

На сайте математических этюдов [3] представлен удивительный механизм, который способен преобразовать движение одного шарнира по дуге окружности в движение другого шарнира по прямой. Этот механизм называют «Инверсор Понселе», или «Прямилло Липкина».

В 1864 г. офицеру французской армии по имени Понселе удалось построить шарнирный механизм, который превращал круговое движение в прямолинейное. Это изобретение использует механизм, реализующий инверсию, и потому называется «Инверсором Понселе» [4].

Первые сообщения о построении инверсора были в частном письме Понселе, датированном 1864 г. Однако письмо подробностей построения не содержало. В 1868 г. студент П.Л. Чебышева Липман Липкин изобретает инверсор и в 1870 публикует подробную статью. Наконец, в 1873 г. появляется статья Понселе с описанием такого же инверсора и со ссылкой на работу Липкина [4].

Инверсией относительно окружности с центром O и радиусом R (рис. 1) называют преобразование, переводящее произвольную точку M , отличную от O , в точку M' , лежащую на луче OM на расстоянии $OM' = R^2/OM$ от точки O [2].

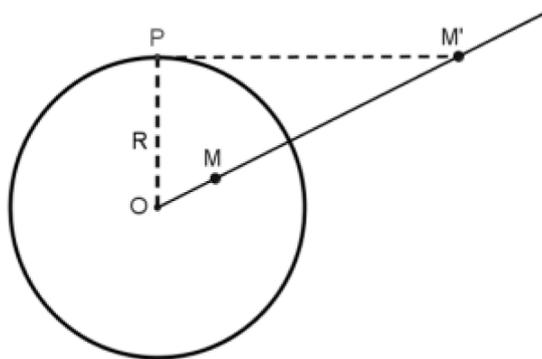
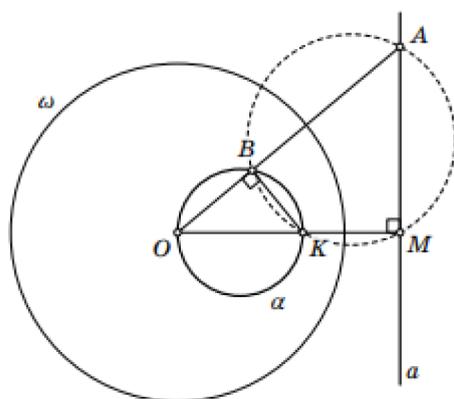


Рис. 1

В [1, с. 9] указано, что прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии, и представлено доказательство этого утверждения (рис. 2).



Доказательство. Опустим из центра O перпендикуляр OM на данную прямую a и рассмотрим точку K , симметричную точке M относительно окружности инверсии. Построим окружность α с диаметром OK . Рассмотрим произвольную прямую, не совпадающую с OK , проходящую через центр O и непараллельную прямой a . Пусть она пересекает окружность ω в точке B , а прямую a — в точке A (рис. 9).

Угол при вершине B прямой, поскольку он опирается на диаметр. Из подобия прямоугольных треугольников OBK и OMA получаем $OA \cdot OB = OM \cdot OK$. Поскольку точки M и K по построению симметричны, $R^2 = OM \cdot OK = OA \cdot OB$. Значит, точки A и B также симметричны относительно окружности инверсии. Следовательно, прямая a и окружность ω переходят друг в друга при инверсии. \square

Рис. 2

В книге «Шарнирные механизмы» [4, с. 178] конструкция механизма Понселе представлена следующим образом: «Рассмотрим на плоскости ромб $ABCD$, и пусть O — точка на луче CA , лежащая вне ромба. Соединим точку O с точками B и D . Выберем на плоскости еще одну точку R и соединим ее отрезком с точкой A . Точки O и R будем считать неподвижными шарнирами, а все остальные концы проведенных отрезков — подвижными. Сами отрезки будем считать жесткими стержнями» (рис. 3).

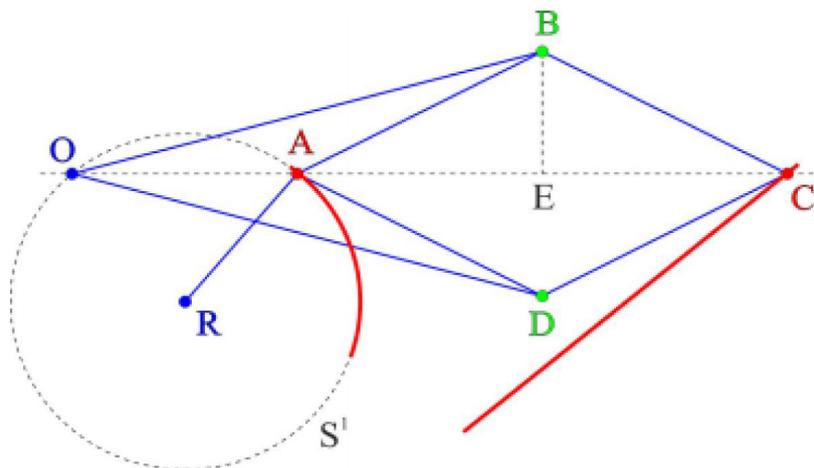


Рис. 3

Эта конструкция будет основой для построения динамической модели Прямыла Липкина (Инверсора Понселе).

Пусть a — длина больших звеньев OB и OD , b — длина звеньев, составляющих ромб (рис. 4). Если звенья ромба сложить в один отрезок длиной $2b$, то треугольник OBD будет прямым, значит радиус окружности инверсии должен быть:

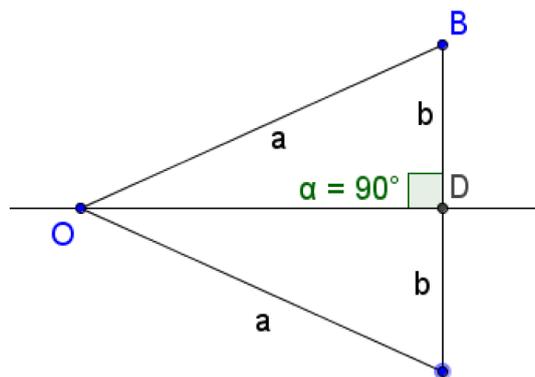


Рис. 4

Представим алгоритм построения динамической модели Прявила Липкина в GeoGebra (рис. 5):

- задаем длины больших звеньев ползунком a , длины звеньев, составляющих ромб, ползунком b ;
- строим окружность инверсии с центром в точке O и радиусом;
- строим произвольно прямую AB , не пересекающую окружность;
- найдем инверсионный образ прямой AB относительно основной (черной) окружности с помощью инструмента «Отражение относительно окружности», получим окружность с диаметром OF (зеленая);

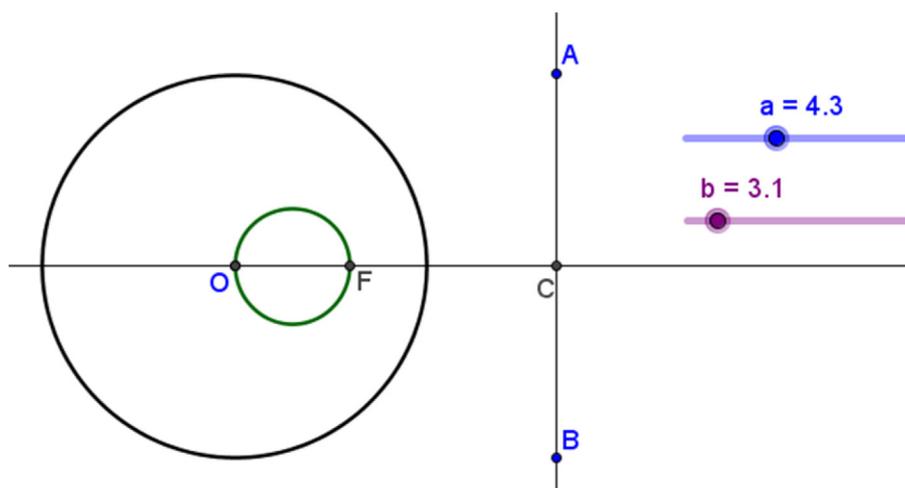


Рис. 5

- задаем угловой ползунок для поворота точки C (подвижного шарнира) по зеленой окружности вокруг ее центра G (рис. 6);
- строим отрезок GC (зеленое звено);
- строим окружность с центром в точке O и радиусом a (синяя) (рис. 7);
- строим окружность с центром в точке C и радиусом b (фиолетовая);
- строим точки пересечения этих двух окружностей (точки K и L);
- строим отрезки OK и OL (синие звенья);

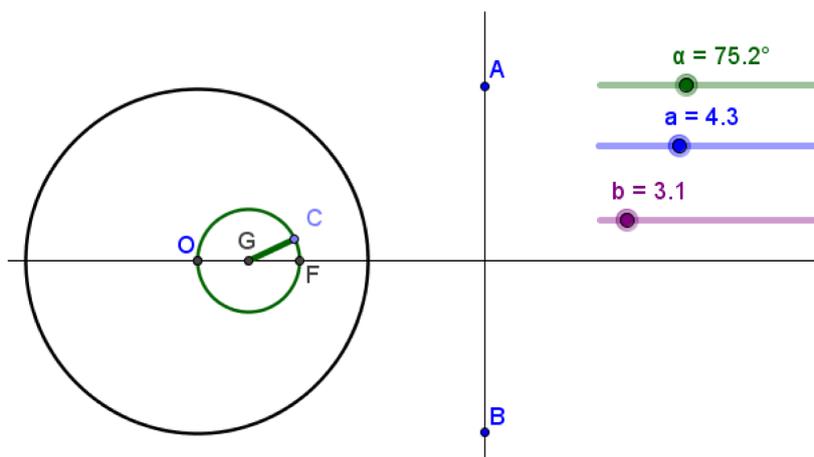


Рис. 6

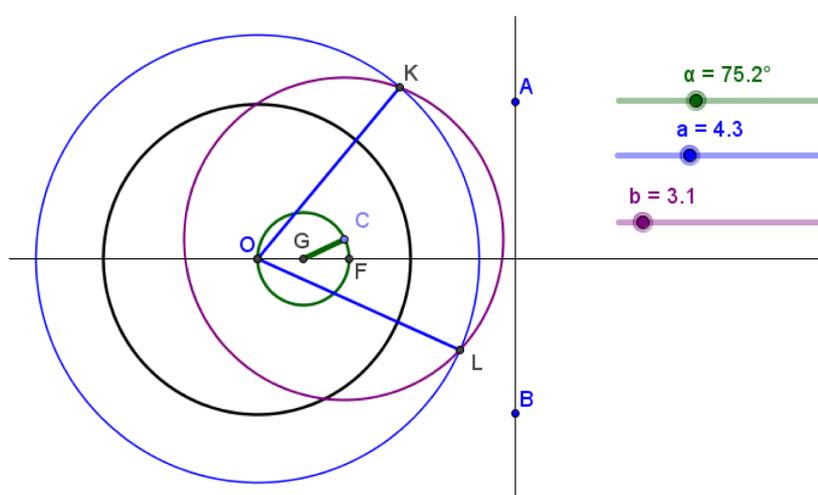


Рис. 7

- строим биссектрису угла KOL (рис. 8);
- отмечаем точку пересечения этой биссектрисы с прямой АВ (точка М);
- строим отрезки СК, КМ, МL, CL (фиолетовые звенья ромба).

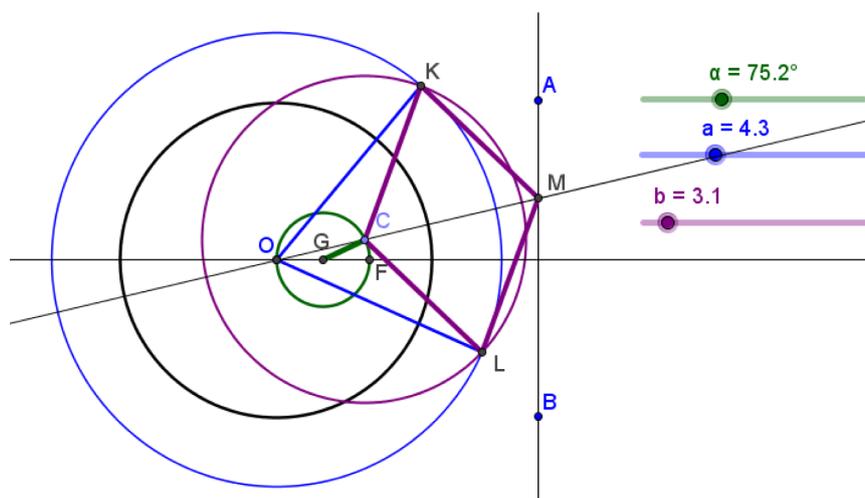


Рис. 8

Перемещая угловой ползунок, установим доступные для него границы. Скроем вспомогательные окружности и прямые. Динамическая модель Прявила Липкина в GeoGebra готова (рис. 9).

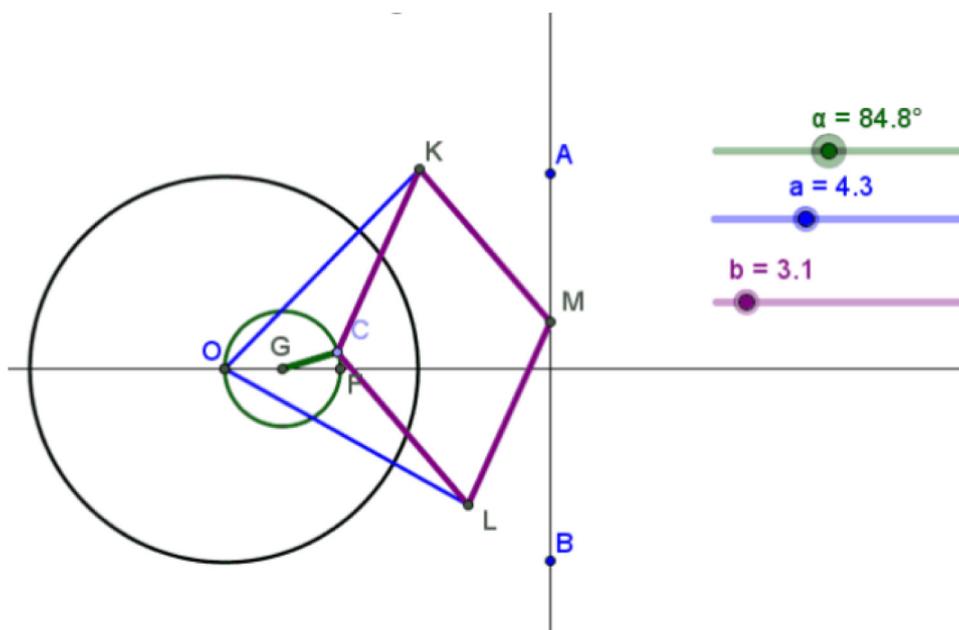


Рис. 9

Длину звеньев можно менять при условии $a > b$, при этом вводить ограничения на угловой ползунок. Длина самого короткого зеленого звена зависит только от того, на каком расстоянии от окружности инверсии находится прямая АВ.

Если в Прявиле Липкина удалить самое короткое звено, получим модель инверсора, с помощью которого можно познакомить школьников с этим необычным преобразованием. Для чего нами было принято решение разработать натурную модель этого механизма (рис. 10), используя детали конструктора Lego Mindstorms и подручные средства (игла и два стержня от ручек). Длина больших звеньев – 19 см, длина звеньев ромба – 8,5 см.

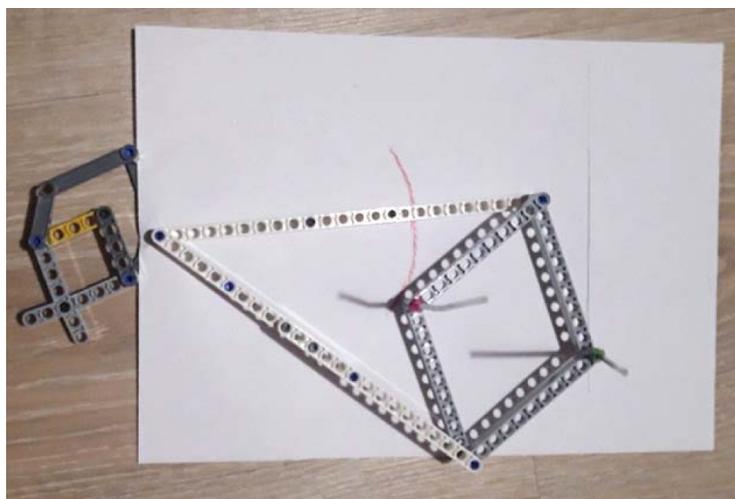


Рис. 10

Используя данную модель инверсора, можно исследовать необычные свойства инверсии, а также решать некоторые геометрические задачи.

Библиографический список

1. Жижилкин И.Д. Инверсия. М.: Изд-во МЦНМО, 2009. 72 с.
2. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. 4-е изд., доп. М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, 2001. 584 с.
3. Пряило Липкина // www.etudes.ru: сайт фонда «Математические этюды», Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук. URL: www.etudes.ru/ru/etudes/lipkin-inversor/
4. Тужилин А.А. Шарнирные механизмы // dfgm.math.msu.su: кафедра дифференциальной геометрии мехмата МГУ. URL: <http://dfgm.math.msu.su/files/0ngit/tuzhilin/2013/lecture12.pdf>

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК И ИХ ИЛЛЮСТРАЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA

SOLUTION OF PROBLEMS ON CONSTRUCTION BY THE METHOD OF GEOMETRICAL PLACES OF POINTS AND THEIR ILLUSTRATIONS IN THE DYNAMIC ENVIRONMENT GEOGEBRA

О.В. Маслова

O.V. Maslova

Геометрическое место точек, задача на построение, динамические чертежи.

В работе рассмотрен вопрос применения геометрических мест точек в решении задач на построение; приведен пример решения задачи на построение методом геометрических мест точек, ее пошаговое построение и исследование в динамической среде GeoGebra.

Geometric location of points, construction task, dynamic drawings.

In this paper, we consider the use of geometric places of points in solving construction problems; an example of solving the problem of building by the method of geometric places of points, its step-by-step construction and research in the dynamic environment GeoGebra.

Задачей на построение называют такую задачу, в которой требуется, исходя из данных условий, пользуясь определенными инструментами, построить фигуру, удовлетворяющую всем указанным условиям. Найти решение задачи на построение – значит свести ее к конечному числу основных (элементарных) построений. Наиболее распространена схема решения задачи на построение, содержащая четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование. Структура этапов:

1. **Анализ.** Предположив, что задача решена, делают от руки чертеж – набросок искомой фигуры и затем, внимательно изучая нарисованную фигуру, стремятся найти такие зависимости между данными задачи и искомыми, которые позволили бы свести задачу к другим, известным ранее. Анализ – это подготовительный, предварительный этап решения задачи на построение. Он имеет своей целью составление плана решения.

2. **Построение.** После того как план составлен, выполняют построение искомой фигуры. Построение обычно сопровождается графическим оформлением каждого его шага.

3. **Доказательство.** Цель доказательства: установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям. Эту часть иначе называют синтезом.

4. Исследование. На данном этапе осуществляется поиск ответа на вопрос «Сколько решений имеет задача, и при каких условиях?».

Заметим, что при решении весьма простой задачи нет смысла соблюдать все четыре этапа схемы. В таких случаях опускают анализ и исследование, а указывают построение и приводят доказательство. Схемы рассуждений при решении задач на построение недостаточно. Еще надо знать методы их решения [1].

Существует множество методов решения задач на построение, в частности: метод геометрических преобразований, алгебраический метод, метод геометрических мест и др. Наибольший интерес представляет метод геометрических мест точек, так как его не часто рассматривают в школьном курсе геометрии применительно к решению задач на построение.

Геометрическое место точек (ГМТ) – это фигура, состоящая из всех точек плоскости, удовлетворяющих определенному условию. Геометрическое место – термин, применявшийся в старой литературе по геометрии и до сих пор применяющийся в учебной литературе, для обозначения множества точек, удовлетворяющих некоторому условию, как правило, геометрического характера. Термин «геометрическое место точек» был введен еще древнегреческим ученым и философом Аристотелем (384–222 гг. до н.э.), который представлял себе линию как некоторое «место», где могут быть размещены точки. Понятие линии как следа движущей точки или совокупность точек возникли значительно позже.

Суть метода геометрических мест точек состоит в следующем: пусть, решая задачу на построение, нам надо найти точку X , удовлетворяющую двум условиям. ГМТ, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура A , а ГМТ, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура B . Искомая точка X принадлежит A и B , т.е. является их точкой пересечения.

При решении задач методом ГМТ надо знать основные геометрические места точек на плоскости:

1. ГМТ, удаленных от данной точки на данное расстояние (окружность).
2. ГМТ, равноудаленных от сторон данного угла (биссектриса угла).
3. ГМТ, равноудаленных от двух данных точек (серединный перпендикуляр к отрезку).
4. ГМТ, удаленных от данной прямой на данное расстояние (пара параллельных прямых).
5. ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых (прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных этими прямыми).
6. ГМТ, равноудаленных от двух параллельных прямых (третья прямая, параллельная данным).
7. ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом, и др.

Часто новые фигуры вводятся в геометрию именно как геометрические места, например, окружность – в школьном курсе геометрии, эллипс, гипербола и парабола – в курсе аналитической геометрии. При составлении уравнений линий в аналитической геометрии их рассматривают именно как геометрические места точек.

Геометрическое место точек может быть не только линией или совокупностью нескольких линий, но также конечной совокупностью точек, областью плоскости и др. Может оказаться также, что геометрическое место точек, обладающих некоторым указанным свойством, вовсе не существует [2].

Рассмотрим более подробно геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом (ГМТ 7), и особенности его применения при решении задач на построение.

ГМТ 7 представляет собой совокупность двух дуг, симметрично расположенных относительно данного отрезка BC , за исключением точек B и C .

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Задача. Постройте треугольник по следующим его элементам: a , $\angle A$, h_b .

Анализ. Пусть ABC – искомый треугольник, тогда $BC=a$, $BH=h_b$ – высота. Так как данный отрезок BC виден из точки A под заданным углом, то точка A принадлежит ГМТ 8 (рис. 1). Так как угол BHC равен 90° , то точка H принадлежит окружности с диаметром BC , причем $BH=h_b$ (рис. 2). Очевидно, что вершина A треугольника ABC получается как пересечение луча CH с множеством точек ГМТ 8 (рис. 3).

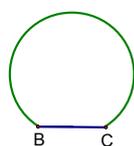
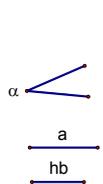


Рис. 1

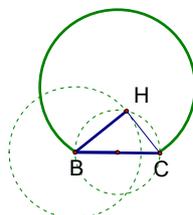
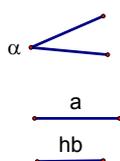


Рис. 2

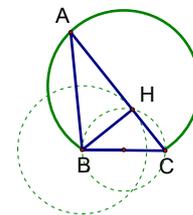
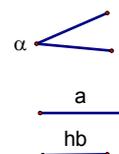


Рис. 3

В настоящей работе исследование геометрических задач на построение мы осуществляли в динамической среде GeoGebra. Программа GeoGebra – уникальный продукт, позволяющий строить современный компьютерный чертеж, который выглядит как традиционный, однако, представляет собой качественно совершенно новое явление. Чертеж, построенный на бумаге с помощью карандаша и линейки, имеет важнейшее значение, но обладает двумя недостатками: требует затрат времени и конечный продукт оказывается статичным. Программа GeoGebra позволяет значительно экономить время, но самое главное: чертеж, построенный с помощью программы, можно тиражировать, деформировать, перемещать и видоизменять. Элементы чертежа легко измерить компьютерными средствами, а результаты этих измерений допускают дальнейшую компьютерную обработку [3].

Исследование: поиск ответа на вопрос «Сколько решений имеет данная задача, и при каких условиях?» осуществлялся в среде GeoGebra. На рис. 4–5 показано количество решений в зависимости от длин фиксированных отрезков a и h_b .

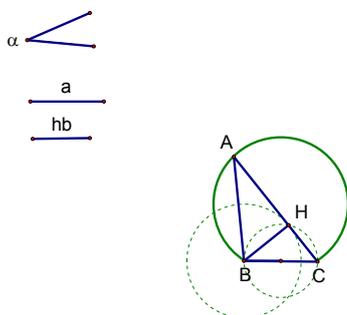


Рис. 4. Единственное решение

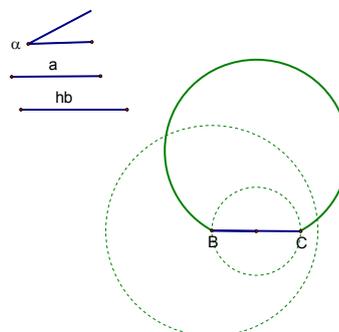


Рис. 5. Нет решений

В настоящее время нами рассмотрено более 20 задач на построение с применением метода ГМТ и иллюстрацией их решения в программе GeoGebra. При написании данной работы по теме исследования была изучена литература, включающая научные статьи, учебники по математике, рассмотрено практическое применение задач на построение в школьном курсе геометрии. В перспективе планируется изучение ГМТ более высокой сложности и их применение в решении задач на построение. А использование динамической среды GeoGebra позволит сделать процесс изучения задач на построение более интересным и осмысленным.

Библиографический список

1. Белошистая А.В. Задачи на построение в школьном курсе геометрии // Математика в школе. 2011. № 9. С. 47–50.
2. Кисилев А.П., Рыбкин Н.А. Геометрия: Планиметрия: 7–9 кл.: учебник и задачник. М.: Дрофа, 2005. 328 с.
3. Иванчук Н.В., Эйкен О.В., Мартынова Е.В. Использование программы GeoGebra на уроках математики в 7–11 классах: методическое пособие. Мурманск: МГПУ, 2008. 36 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛЕКСАШОВ Александр Александрович – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики MAOY «Гимназия № 13 „АКАДЕМ”»;
e-mail: alexizaltata@gmail.com

АРТЕМЬЕВ Иван Викторович – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: 454545369@mail.ru

БАГАЧУК Сергей Архипович – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева, e-mail: bagachuk@mail.ru

БАЙТУРОВА Аягоз Рыспаевна – учитель математики, ТОО «Экономический лицей», г. Нур-Султан, Казахстан; e-mail: qozik555@mail.ru

БЕЗУМОВА Ольга Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск; e-mail: o.bezumova@narfu.ru

БЕЛИЧЕНКО Оксана Михайловна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнёва, Красноярск; e-mail: oksanabelichenko4@mail.ru

БОЧКАРЁВА Даниэла Владимировна – аспирант, КГПУ им. В.П. Астафьева; преподаватель ГБПОУ НСО «Новосибирский профессионально-педагогический колледж», Новосибирск; e-mail: danaloro13@gmail.com

БОЯРКИНА Юлия Алексеевна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики, МБОУ «Ужурская СОШ № 6», Ужур; e-mail: boyarkina20081995@gmail.com

БУЗУРНЫЙ Максим Игоревич – студент Института математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск; e-mail: a.chigur@inbox.ru

ВЕБЕР Александра Викторовна – студентка, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: imfi18veberav@gmail.com

ВОРОБЬЕВА Надежда Валентиновна – магистрант, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск; e-mail: vorobeva.n@edu.narfu.ru

ВОХТОМИНА Ева Дмитриевна – студентка, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск; e-mail: eva.vohtomina@yandex.ru

ГЕДЗЯ Екатерина Андреевна – студентка, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск; email: gedzyaea@mail.ru

ДЕРОВА Ольга Владимировна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики МБОУ «Крутоярская СОШ», п. Крутояр; e-mail: olenkaderova@mail.ru

ДУДНИК Марина Сергеевна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики MAOY СШ № 143; e-mail: dudnik.ms@bk.ru

ДУРАКОВ Борис Евгеньевич – аспирант Института математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск; e-mail: durakov96@gmail.com

ДУРАКОВ Евгений Борисович – доцент кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск; кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: durakov@mail.ru

ДУРАКОВ Матвей Евгеньевич – магистрант Института математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск; e-mail: durakov_m_1997@mail.ru

ЕЛИСОВА Анна Петровна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики, информатики и естествознания, Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета, Лесосибирск; e-mail: anshub@mail.ru

ЗАНЬКО Нина Владимировна – студентка, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: nina_chernova_1999@mail.ru

ЗАЦЕПИНА Елена Владимировна – магистрант, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск; e-mail: zelena96@yandex.ru

КЕЙВ Мария Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: mkejv@yandex.ru

КИРКИНА Екатерина Геннадьевна – магистрант 1 курса, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск; e-mail: katty.kirckina@yandex.ru

ЛАРИН Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, профессор, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: larin_serg@mail.ru

ЛАРИОНЧИКОВА Анна Аркадьевна – студентка, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: lar2298@bk.ru

ЛУКИНА Вероника Сергеевна – студентка 2 курса магистратуры, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск; e-mail: v.s.lukina@narfu.ru.

МАЙЕР Валерий Робертович – доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и методики обучения математике, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: mavr49@mail.ru

МАЛЫХИН Валентин Андреевич – студент, Южно-Уральский государственный педагогический университет, Челябинск; e-mail: vasya.ustkin@mail.ru

МАРТЫНОВ Василий Васильевич – студент 31 группы, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: Vasya007.1997@yandex.ru

МАРТЫНОВА Елена Владимировна – старший преподаватель кафедры математики и методики обучения математике, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, Челябинск, e-mail: martynova@cspu.ru

МАСЛОВ Иван Андреевич – учащийся 8 «Б» класса, ГБОУ АО «Архангельский государственный лицей имени М.В. Ломоносова»; e-mail: zloyzloyvanya@gmail.com

МАСЛОВА Ольга Викторовна – учащаяся МАОУ СШ № 144, Красноярск; e-mail: maslovaav@yandex.ru

МЕЛЬНИКОВА Ирина Витальевна – кандидат технических наук, доцент кафедры Алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск; e-mail: mullar.iv@mail.ru

МИРЗАОХМЕДОВ Мансур Мавлонович – аспирант, Сибирский федеральный университет, Красноярск; e-mail: mansur.mirzoahmedov@mail.ru

НЕКРАСОВА Евгения Олеговна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: eva.yarovaya@bk.ru

НИГМАТУЛИН Равиль Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, Челябинск; e-mail: ravil@cspu.ru

НИКИТИН Матвей Михайлович – студент 3 курса, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск; e-mail: matvey1710@gmail.com

ОВЧИННИКОВА Раиса Петровна – старший преподаватель кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск; e-mail: r.ovchinnikova@narfu.ru

ОКОНЕШНИКОВА Евгения Александровна – студентка 5 курса факультета математики и компьютерных наук, Кубанский государственный университет; e-mail: owljaneok@yandex.ru

ПАВЛОВА Мария Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск; e-mail: m.pavlova@narfu.ru

ПАШКОВСКАЯ Ольга Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнёва, Красноярск; e-mail: pashkovskayaolga@gmail.com

ПОТАПОВА Наталья Викторовна – преподаватель, Кубанский государственный университет; e-mail: potapova50@gmail.com

РОЖКОВ Александр Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, Кубанский государственный университет; e-mail: ros@math.kubsu.ru

СААЯ Сылдыс Казараковна – старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математики, Тувинский государственный университет, Кызыл; e-mail: saaya@list.ru

РЫБАКОВА Наталья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск; e-mail: ryba-kr@yandex.ru

САРСЕМБАЕВА Роза Жолдыбайызы – учитель математики, ГУ «Средняя общеобразовательная школа № 5 им. М. Ауэзова» отдела образования акимата (г. Аркалык, Казахстан); e-mail: roza_78_11@mail.ru

СЕНАШОВ Владимир Иванович – ведущий научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск; e-mail: sen1112home@mail.ru

СИВУХИНА Елена Александровна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; учитель математики МБОУ СШ № 45 г. Красноярск; e-mail: sivukhina08@gmail.com

СИДОРОВ Кирилл Александрович – кандидат физико-математических наук, Институт инженерной физики и радиоэлектроники и Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск; e-mail: sidorov_k_a_ezoter@mail.ru

СОМОВА Марина Николаевна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнёва, Красноярск; e-mail: somova.marina@mail.ru

ТАНЗЫ Менги Васильевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики, Тувинский государственный университет; e-mail: tmengi78@mail.ru

ТРОИЦКАЯ Ольга Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой экспериментальной математики и информатизации образования, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск; e-mail: o.troitskaya@narfu.ru

ТРОЯКОВА Галина Александровна – доцент кафедры математики и методики преподавания математики; учитель математики, Государственный лицей Республики Тыва; e-mail: tga.52@mail.ru

ТУКТАМЫШЕВА Елена Равилевна – аспирант 3 курса, КГПУ им. В.П. Астафьева; преподаватель математики, КГБПОУ «Назаровский энергостроительный техникум»; e-mail: lenochka2303@mail.ru

УМБЕТОВ Абилхан Умбетович – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор; декан факультета естествознания и информатизации, Аркалыкский педагогический институт им. И. Алтынсарина; e-mail: umbetov.a@mail.ru

ЧЕРКАСОВА Анна Дмитриевна – магистрант, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: anya_080@mail.ru

ЧИХАЧЕВ Александр Евгеньевич – аспирант, КГПУ им. В.П. Астафьева; e-mail: alexanderchihachev@yandex.ru

ЧУПИН Вадим Олегович – студент, Южно-Уральский государственный университет; e-mail: chup_98@mail.ru

ШАКТАР Ойнарина Очуравна – аспирант, КГПУ им. В.П. Астафьева, e-mail: oynarina@mail.ru

ШИРИКОВА Татьяна Сергеевна – доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования, Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск; e-mail: t.shirikova@narfu.ru

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Материалы IX Всероссийской с международным участием
научно-методической конференции

Красноярск, 12–13 ноября 2020 г.

Электронное издание

Редактор *А.П. Малахова*
Корректор *М.А. Исакова*
Верстка *Н.С. Хасанишина*

660049, Красноярск, ул. А. Лебедевой, 89.
Редакционно-издательский отдел КГПУ им. В.П. Астафьева,
т. 217-17-52, 217-17-82

Подготовлено к изданию 04.12.20.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 27,5