МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра математики и методики обучения математике

Чепикова Елена Юрьевна

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема: «Формирование интереса к математике обучающихся 8-9 классов посредством решения задач методом оригами с использованием среды Живая математика»

Направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы «Математика и информатика»

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КГПУ им. В.П. Астафьева
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой д.п.н., профессор Шкерина Л.В.
Л. Шкер ________________________________
(дата, подпись)

Руководитель: д-р п.н., профессор Майер В.Р.
____

Дата защиты__________30.06.2020__________

Обучающийся: Чепикова Е.Ю.
Чеп ________________________________

Оценка ________________________________
прописью

Красноярск 2020

Содержание

Введение

Научно технические преобразования и развитие информационного общества ставят перед системой современного образования задачу формирования готовности учащихся не только к непрерывному самообразованию, но и к исследовательской деятельности, которая становится ведущей формой познания в условиях современного мира.

Для успешного овладения обучающимися образовательных программ необходима мотивация. Исследования ученых показывают, что среди всех мотивов учебной деятельности самым действенным является познавательный интерес. Основным недостатком преподавания математики в традиционной школе является оторванность изучаемых тем от практической деятельности. Это часто становится причиной отчуждения школьников от предмета и может проявляться в потере интереса к математике. Эффективным способом поддержания интереса обучающихся к предмету является привлечение школьников к занятиям на предметных кружках и курсах по выбору, способствующих развитию исследовательских способностей и воображения.

В резолюции III Всероссийского съезда «Школьное математическое образование» (Новосибирск, 15.11.2016) записано: «Экспериментальный, исследовательский подход к изучению математики является перспективной мировой тенденцией. Такой подход, за счет повышения мотивации, содействует выбору учащимися продолжения образования в направлениях, требующих повышенного уровня математических знаний. Он особенно эффективен при использовании компьютерных инструментов и сред. Целесообразно рекомендовать для включения в примерные основные образовательные программы на всех уровнях образования в части предмета «Математика» использование компьютерных инструментов математической деятельности». Отмеченный в резолюции подход к обучению математике для удобства нередко называют обучением в стиле экспериментальной математики [34].

Однако, в настоящее время, наблюдается недостаточная ориентированность курсов по выбору и предметных кружков на исследовательскую, практическую деятельность, на проведение опытов с использованием IT-технологий. Отмеченное выше обнаруживает **противоречие** между потребностью современного общества в личностях со сформированными исследовательскими качествами, способных творчески применять знания в новых ситуациях, и недостаточной ориентированностью общеобразовательных школ на формирование таких качеств у своих выпускников при обучении математике.

Выявленное противоречие обусловило актуальность настоящего исследования и определило **проблему исследования**: поиск методов и средств формирования у учащихся 8-9 классов интереса к математике посредством решения геометрических задач в стиле экспериментальной математики.

Для формирования познавательного интереса к экспериментальной деятельности на уроках геометрии мы предлагаем использовать задачи, решаемые методом оригами.

Таким образом, в рамках решения проблемы, сформулирована тема ВКР: «Формирование интереса к математике обучающихся 8-9 классов посредством решения задач методом оригами с использованием среды Живая математика».

Цель исследования – теоретически обосновать, разработать и экспериментально подтвердить методику формирования у учащихся 8-9 классов интереса к экспериментальной математике с помощью задач, решаемых методом оригами, в том числе с использованием Живой математики.

Объект исследования: учебно-воспитательный процесс в основной школе, ориентированный на использование во внеурочной работе систем динамической геометрии.

Предмет исследования: методика формирования у учащихся основной школы интереса к экспериментальной математике с помощью задач, решаемых методом оригами с использованием среды Живая математика.

В соответствии с объектом, предметом и целью исследования определена **гипотеза**, направляющая ход исследования: обучение решению задач методом оригами учащихся 8-9 классов будет способствовать развитию исследовательских способностей, повышению интереса к изучению геометрии и информатике, если его реализацию осуществлять по специально разработанной методике, основанной на:

- содержании теоретического материала о математических правилах оригами;
- конструктивных и анимационных возможностях компьютерной среды Живая математика;
- корректном построении курса по выбору, с применением комплекса практических заданий, повышающих интерес к изучению материала.

В соответствии с целью, предметом и гипотезой были поставлены следующие задачи исследования:

а) проанализировать экспериментальную математику как одно из главных веяний современного математического образования;

б) познакомиться с научно-методическими и практическими исследованиями в области оригаметрии, т.е. использования оригами при обучении школьников геометрии;

в) изучить конструктивные, анимационные и исследовательские возможности среды Живая математика как средства моделирования решения задач методом оригами;

г) разработать содержание курса по выбору «Оригами и Живая математика» и методику формирования интереса к экспериментальной математике с помощью этого курса;

д) провести апробацию разработанной методики, оценить ее эффективность.

Методологическую основу исследования составляют:

- концепция обучения математике с использованием систем динамической геометрии (С.И. Гроздев, Т.Ф. Сергеева и М.В. Шабанова);
- методология экспериментальной математики (М.А.Павлова, М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов.).

Теоретической основой исследования являются:

- исследования, посвященные изучению геометрии оригами (Huzita Humiaki, Lang R. J., Баландин М.Ю.);
- исследования и методика, посвященные вопросам построения обучения на занятиях курса по выбору (М. А. Павлова, М. В. Шабанова).
- исследования, посвященные вопросам формирования познавательного интереса обучающихся на уроках математики (Г. И. Щукина);

Для решения сформулированных задач использовались следующие методы исследования: изучение и анализ педагогической, математической и методической литературы; анализ основных понятий исследования; сравнение, обобщение опыта преподавания; анкетирование, статистический анализ результатов работы.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработаны и внедрены в учебный процесс:

- методические разработки курса занятий по решению задач методом оригами в параллелях 8 и 9 классов;
- методические рекомендации при описании работы с GSP-файлами для учителей, желающих работать по данной методике;
- рекомендации по созданию виртуальных инструментов для построений оригами в компьютерной среде Живая математика.

Структура ВКР: работа состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка использованной литературы и приложений.

Глава 1. Теоретические аспекты формирования у учащихся основной школы интереса к экспериментальной математике с помощью задач, решаемых методом оригами в среде Живая математика

§1.1. Исторический обзор развития представлений об экспериментальной математике, основы ее методологии

«Математика – наука об отношениях между объектами, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств. Эти свойства положены в основание той или иной математической теории в качестве аксиом» [7]. Данное утверждение может создать впечатление, что математика исключительно теоретическая наука и не имеет никакого отношения к реальной жизни и естественным наукам. Однако зарождение математики и накопление ею информации для создания теоретической базы происходило именно при помощи экспериментов и индуктивных рассуждений, связанных с практическими потребностями людей.

К понятию счета привела необходимость пересчитывать различные предметы, так формировалась арифметика. Из необходимости измерения земельных участков и нахождения объемов тел зародилась геометрия. Об этом свидетельствуют данные, сохранившиеся в документах Древнего Египта и Древнего Вавилона. Известно, что вавилоняне умели вычислять площади прямоугольников, треугольников и других геометрических фигур. Их формулы часто были приближенными и давали точные результаты лишь для геометрических фигур, которые использовались на практике. По всей видимости, данные соотношения возникали в результате многочисленных измерений, связанных с практической необходимостью. Примером может служить формула для нахождения площади четырехугольника в древнем Египте: «Площадь четырехугольника равна произведению полусумм противоположных сторон» [34]. Эта формула была точна лишь для прямоугольников и применялась для расчета земельных участков (чаще всего имевших прямоугольную форму).

Важный вклад в развитие научных представлений об эксперименте в математике был сделан древнегреческим математиком и физиком Архимедом. Долгое время оставалось неясным, как он находил формулы для площадей (круг, параболические сегменты и др.) и объемов тел (шар, эллипсоид, сегмент шара). Его рукопись «Послание к Эратосфену», найденная в 1908 году, описывает механический метод решения геометрических задач. Например, формула для вычисления объема шара выводилась путем построения различных соотношений между горизонтальными сечениями цилиндра, конуса и шара (высоты и радиусы оснований цилиндра и конуса были равны диаметру шара). Этим соотношениям Архимед давал механическую интерпретацию, которая была основана на правиле рычага. Горизонтальным сечением цилиндра он уравновешивал сечения шара и конуса, а затем переходил к объемам тел как к суммам всех произвольных сечений. Таким образом, механический метод решения геометрических задач Архимеда так же свидетельствует о том, что геометрия появилась на основе эксперимента. [23].

Первые эксперименты с числами мы можем найти в трудах Пифагорейцев. Сопоставляя три последовательности чисел (натуральный ряд, квадраты чисел натурального ряда, разности последовательных квадратов) пифагорейцы обнаружили закономерности: если число третьей последовательности квадратное, то в сумме со стоящим над ним квадратным числом дает следующее квадратное число.

В математике XVI - XVII веков мы снова видим эксперименты. Примером может служить метод «неделимых» И. Кеплера. Для нахождения объемов неправильных тел вращения (тор и т.д.) ученый разбивал их на множество частей и заполнял фигурами, объемы которых поддавались вычислению. Таким образом, он нашел формулы для вычисления 92 тел вращения. Впоследствии исследование данного класса задач привело к созданию интегрального исчисления [34].

С анализа азартных игр начиналась теория вероятностей. Рулетка – одно из простейших устройств для получения случайных чисел. Группа методов для решения различных задач с помощью случайных последовательностей носит название города Монте-Карло (столицы европейского игорного бизнеса).

Не менее важную роль в математике занимал эксперимент и в XVIII веке. Л. Эйлер при изучении бесконечных величин и рядов осуществлял тщательные и многосторонние проверки. Данный метод относят к прикладной математике, под которой понимают решение задач физики математическими средствами. Например, при решении задачи о вычислении суммы ряда обратных квадратов Эйлер использовал предельный переход от конечных полиномов к бесконечным степенным рядам. Далее он осуществлял многократные проверки (вычислял сумму приближенно, с точностью до шестого знака и т.д.), чтобы убедиться в точности предложенного им метода решения.

В XX веке появился компьютер, который открыл новые возможности для эксперимента в математике. Именно компьютерное доказательство, опубликованное в 1976 году, разрешило проблему четырех красок – математической задачи, предложенной Ф. Гутри в 1852 году. Помощь вычислительных машин стала необходимой при решении данной задачи, так как математическое доказательство оказалось столь сложным, что его не могли осуществить более ста лет.

Таким образом, рассмотрев исторические примеры можно прийти к выводу, что эксперимент является неотъемлемой частью науки математики. Причем математический эксперимент может принимать различные формы: для получения обобщенных выводов используется численный эксперимент, для получения выводов по аналогии – модельный имитационный эксперимент, для получения эмпирических соотношений – натурный эксперимент и т.д. На значимость экспериментальных методов для математического образования и для самой науки обращали внимание многие ученые (Д.Гильберт, Г.Вейль, Н.Бор) [34]. Для доказательства приведем следующее высказывание В.И.Арнольда: «Вопреки мнению большинства современных математиков, я, вслед за Пуанкаре, считаю математику частью физики, т. е. экспериментальной наукой. Слово «математика» означает «точное знание», и соответствующие открытия были получены из наблюдений явлений природы» [3]. В его трудах много внимания уделено экспериментальным методам в математике. Так же в его работах фигурирует термин «экспериментальная математика», который В.И Арнольд связывал с использованием вычислительных экспериментов в решении математических проблем.

Термин «экспериментальная математика» впервые был произнесен в России на открытии Уральского отделения Академии Наук СССР. Популяризацией этого понятия первым занялся Н.Н. Красовский – директор института математики и механики УНЦ АН СССР, основоположник идей информатизации математического образования [34]. Именно поэтому, первоначально данный термин получил распространение в образовательной сфере.

В конце XX века термин «экспериментальная математика» получил широкое распространение в научном мире и общественное признание в связи с появлением программных пакетов для математической обработки данных, таких как Maple, Mathcad и т.д. Автоматизированные системы научных исследований, появившиеся в конце 70-х годов XX века, стали применяться на различных этапах экспериментальных исследований. Следствием этого стало возникновение понятия «компьютерный эксперимент», который отличается от других видов экспериментов отсутствием погрешности, связанной с влиянием случайных факторов.

Использование учеными компьютерных средств для проведение экспериментов привело к расширению возможностей по изучению объектов вне зависимости от их масштаба и сложности. ЭВМ позволили математикам осуществить вычисления, которые было сложно сделать вручную. Компьютерный эксперимент открыл возможности не только ученым, но и простым любителям математики и школьникам проводить математические эксперименты и получать новые данные об объектах исследования. Таким образом, термины «экспериментальная математика» и «компьютерная математика» стали в определенной степени тождественны, так как именно «компьютерный эксперимент» в настоящее время лежит в основе многих математических экспериментов, позволяя проводить точные вычисления, обрабатывать большие массивы данных за достаточно короткое время, визуализировать сложный объект исследования и т. д.

Экспериментальная математика – новая область современной математики, которая отличается использованием различных приёмов, доказательств от обратного и т.д. с использованием ЭВМ для проверки, подтверждения старых и получения новых фактов. [38]. В настоящее время методы и средства экспериментальной математики все чаще применяются в исследовательском обучении в школе.

§1.2. Об особенностях решения задач методом оригами и опыте их использования при обучении.

Одной из главных составляющих содержания учебного предмета математики является математическая задача. В школьной геометрии задачи традиционно решаются при помощи циркуля и линейки, однако существует и другой прикладной, интересный и математический способ решения задач школьного курса – метод оригами (метод перегибания листа бумаги).

Задачи на перегибание все чаще используются при обучении геометрии в школе, встречаются в различных олимпиадах, турнирах и в ЕГЭ. Это связано с тем, что при изучении геометрии с помощью оригами, ученики более легко и интересно знакомятся с геометрическими фигурами, учатся работать по схеме, узнают геометрические закономерности. Об этом очень много и обстоятельно пишет в своих работах О.В. Весновская, в частности в статье [9].

Оригами – старинное японское искусство складывания различных фигурок из бумаги. В XIX веке немецкий педагог Фридрих Фребель впервые начал пропагандировать складывание из бумаги как дидактический метод для объяснения детям некоторых простых правил геометрии [21]. В конце XX века возник новый термин «оригаметрия», обозначающий область геометрии, в которой задачи решаются только методом складывания [16].

Теоретическое обоснование построений оригами

В школьной геометрии теоретическое обоснование построений циркулем и линейкой строится на аксиоматической теории Гильберта – системе аксиом евклидовой геометрии. Основными понятиями в школьной геометрии является точка, прямая и плоскость. Все они являются теоретическими, и визуализируются на бумаге при помощи циркуля и линейки.

Основными понятиями в аксиоматической теории оригами будут являться точка, сгиб (складка) и лист бумаги. Многие источники используют квадратный лист бумаги в качестве основного понятия, но в общем случае лист бумаги можно считать бесконечным.

Теперь нам необходимо определиться с существованием аксиом оригами. Шесть правил сформулировал японский математик и оригамист Фумияки Фудзита [39]. В 2003 году Роберт Ленг доказал, что этими правилами можно описать все возможные действия с оригами [5]. Седьмое правило указал другой оригамист и математик Косиро Хатори. Он также продемонстрировал, что из шестого правила Фудзиты можно вывести все остальные. Таким образом, шестое правило Фудзита является аксиоматичным. Рассмотрим правила Фудзита:

Правило Ф1. Каковы бы не были две точки, всегда можно построить соединяющую их складку (рис. 1.1).

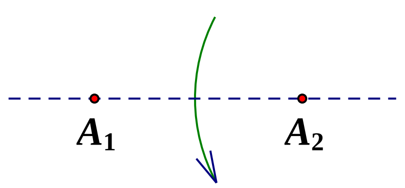


Рисунок 1.1

Это правило говорит о том, что через две точки можно всегда провести прямую. Такая прямая будет единственной, если точки различны. Если же точки совпадают, то прямых будет бесконечное множество.

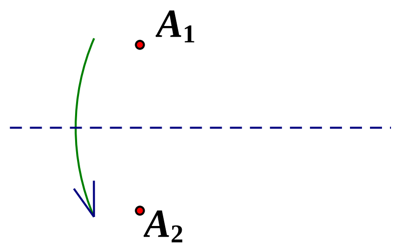


Рисунок 1.2

Правило Ф2. Каковы бы не были две точки, всегда можно построить складку, которая совместит эти точки (рис. 1.2).

Это правило означает, что после складывания листа бумаги обе точки должны совпасть «на просвет».

Совмещаемые точки будут симметричными относительно совмещающей их складки. Складка, в данном случае, окажется серединным перпендикуляром для точек. При несовпадении точек складка будет единственной. Если точки совпадают, то складок будет бесконечное множество (любая складка, проходящая через общую точку).

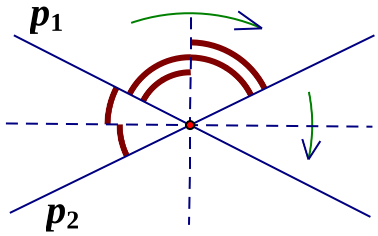


Рисунок 1.3

Правило Ф3. Каковы бы не были две прямые, всегда можно построить складку, совмещающую эти прямые.

Здесь после складывания листа бумаги «на просвет» должны совпадать не точки, а прямые, и они же должны быть симметричными относительно требуемой складки. Эта симметрия означает, что строящаяся складка должна быть биссектрисой угла между совмещаемыми прямыми. Если прямые параллельны, то складка, совмещающая их, единственная. Если прямые пересекаются, то таких складок всегда две (рис. 1.3). Если прямые совпадают, то складок будет бесконечное множество.

Правило Ф4. Каковы бы ни были точка и прямая, можно всегда построить складку, которая проходит через данную точку и совмещает данную прямую с ней самой. Прямую с собой можно совместить двумя способами:

а) складка совпадает с прямой,

b) складка перпендикулярна прямой.

Таким образом, если точка не лежит на прямой, то мы построим перпендикуляр к прямой через эту точку (рис. 1.4). Если же точка лежит на прямой, то складка будет являться либо перпендикуляром к прямой, либо будет совпадать с прямой.

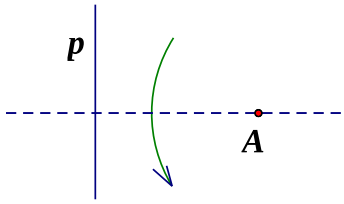


Рисунок 1.4

Правило Ф5. Каковы бы не были две точки и прямая, можно построить складку, проходящую через одну точку и совмещающую другую точку с прямой (рис.1.5), – либо однозначно установить отсутствие такой складки.

Чтобы выяснить геометрический смысл этого правила необходимо вспомнить, что осевая симметрия является движением. А значит при осевой симметрии сохраняется неизменными расстояния и углы.

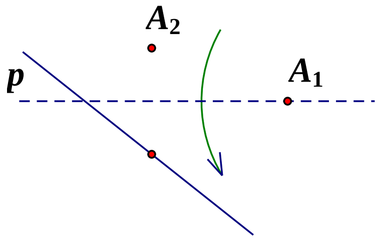


Рисунок 1.5

Пусть даны прямая p и две точки A и B (рис. 1.6). Сгибание чертежа совмещает точку A с точкой A' , лежащей на прямой p. При этом линия сгиба m содержит точку B. По правилу 2 точки A и A' симметричны относительно прямой m. При этом точка B относительно прямой m симметрична сама себе. Так как при осевой симметрии остаются неизменными расстояния и углы, то BA=BA'. Из данного равенства следует, что точки A и A' лежат на окружности с центром в точке B, а точка A' является пересечением этой окружности с прямой p.

Так как на рисунке 1.6 прямая p имеет две точки пересечения с окружностью, то существует еще один сгиб m', удовлетворяющий условию аксиомы.

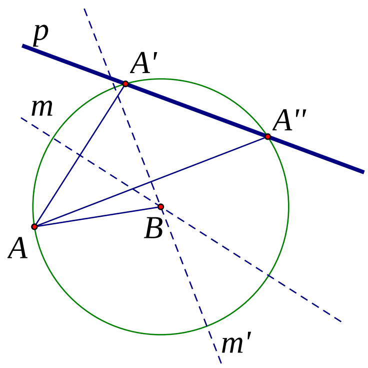


Рисунок 1.6

Обозначим за λ расстояние между точкой B и прямой *p*. Тогда геометрическим фактом будет являться то, что при λ > AB складка не будет существовать, при λ = AB складка будет единственной, при λ < AB будет существовать две складки.

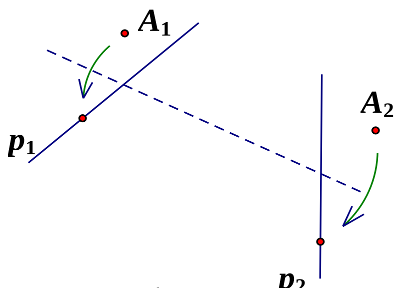


Рисунок 1.7

Правило 5 позволяет находить точки пересечения прямой и окружности. Алгебраически это означает решение нелинейной системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \end{cases}$$

Таким образом данное правило можно использовать для решения уравнений второго порядка с известными коэффициентами.

Правило Ф6. Каковы бы ни были две точки и две прямые, можно построить складку, которая будет попарно совмещать точки с прямыми, либо однозначно установить отсутствие такой складки.

Это правило говорит о том, что если даны две точки A_1 и A_2, а так же две прямые p_1 и p_2, то лист бумаги можно перегнуть так, чтобы точка A_1 попала на прямую p_1 и одновременно точка A_2 попала на прямую p_2, либо однозначно установить отсутствие такой складки (рис. 1.7).

Правило Ф7. Каковы бы ни были две прямые и точка, можно построить складку, совмещающую точку с одной прямой и совмещающую другую прямую с самой собой (рис. 1.8), либо однозначно установить отсутствие такой складки [5].

Рассмотрев в данном параграфе аксиоматику оригами, мы можем прийти к выводу, что метод перегибания листа бумаги возможно использовать в математике так же, как построения циркулем и линейкой.

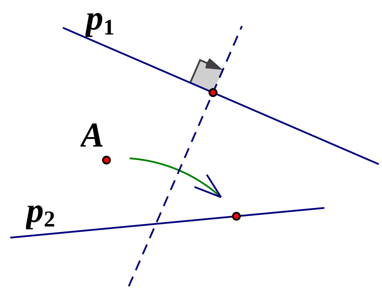


Рисунок 1.8

Перечисленная нами система правил оригами позволяет использовать метод перегибания листа бумаги для решения различных видов задач по геометрии треугольника, четырехугольника, окружности, многоугольника. Оригами обладает мощным потенциалом в решении геометрических задач на построение.

Психолого-педагогические аспекты применения оригами при решении задач по геометрии

Возможность включения элементов оригами в предмет геометрии в России изучается Омским центром оригами (С.Н. Белим, В.В.Гончаров, И.А Круглова).

Проблематика использования оригами в процессе преподавания геометрии в школе исследована в недостаточной степени. «Однако, как показывает практика, применение оригами в процессе обучения способствует более эффективному усвоению обучающимися геометрии.» – утверждает О.В. Весновская. Это связано с тем, что оригами предоставляет возможность ученикам заниматься новым видом деятельности, при котором одновременно задействованы обе руки. Физиологами установлено, что ручной труд, пальчиковая сенсорика и моторика развивает важнейшие центры головного мозга, причем левая кисть связана с правым полушарием, а правая – с левым полушарием головного мозга. Левое полушарие отвечает за логическое мышление и речь, в то время как правое полушарие отвечает за развитие образов, ощущений, воображения, творчества, интуиции. Таким образом, работая с бумагой, ученики гармонично развивают свое логическое мышление и творческие способности [8].

Еще одним достоинством метода оригами является тот факт, что бумага – это доступный материал, который всегда есть под рукой.

Как известно из психологии, в зависимости от особенностей восприятия и обработки информации, людей можно условно разделить на 4 категории: аудиалы, визуалы, дигиталы и кинестетики. Большинство людей эффективно пользуются несколькими каналами восприятия, но один из каналов они предпочитают больше.

Наиболее распространенный тип – кинестетики (около 40% населения), за ними идут визуалы (около 30%), далее дигиталы (около 20%) и аудиалы (около 10%).

Кинестетики чувствуют окружающий мир и воспринимают большую часть информации через осязание, обоняние, ассоциации, выполняемые действия. Такому человек, чтобы понять окончательно, необходима деятельность, нужно поделать что-нибудь самому, руками [28].

Таким образом, примерно сорока процентам школьников решение математических задач при помощи вещественных экспериментов необходимо для эффективного усвоения материала. Поэтому решение задач методом перегибания листа бумаги может стать эффективным методом для усвоения учениками различных тем по геометрии.

§1.3. Дидактические возможности среды Живая математика как эффективного средства компьютерного сопровождения решения задач методом оригами.

В настоящее время большую роль в изменении стиля преподавания геометрии стали играть компьютерные технологии. Современные компьютерные чертежи не только выглядят традиционно. Возможности компьютерных сред позволяют измерять элементы чертежа (длины отрезков, углы, расстояния и т.д.), перемещать, видоизменять, деформировать чертеж.

Система динамической геометрии (СДГ) «Живая Математика» представляет собой русскоязычную версию популярной американской обучающей программы Geometry's Sketchpad v.5.0 (в русском переводе «Записная книжка геометра»), разработанной фирмой Key Currculum Press (США), переведенной на русский язык и адаптированной к российскому школьному математическому образованию Институтом новых технологий.

Данная программа имеет мощную технику построения аккуратных и легко редактируемых чертежей. Для этого используются следующие геометрические операции: проведение прямой (отрезка, луча), построение окружности по заданному центру и радиусу (точке на окружности), построение середины отрезка, биссектрисы угла, параллельных и перпендикулярных прямых, фиксация пересечения окружностей прямых, окружности и прямой. Живая математика не является обучающей программой, она лишь предоставляет все необходимые средства для создания чертежей и их исследования.

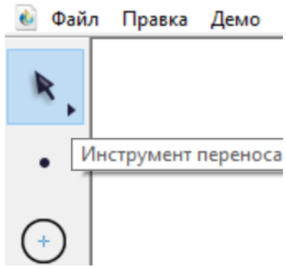


Рисунок 1.9

Программа позволяет создавать чертежи, в которых сохраняется иерархия зависимости объектов друг от друга. При изменении положения объектов чертежа (точки, отрезка и т. д.) можно наблюдать анимационное изменение зависимых от них элементов. При этом сохраняются установленные ранее отношения между объектами чертежа (простое отношение точек, параллельность, перпендикулярность и т.д.). Система преобразований Живой математики позволяет производить растяжения, сдвиги, повороты, отражения объектов.

В Живой математике привлечение внимания к определенным элементам или частям чертежа возможно при помощи окрашивания фрагмента любым цветом. Так же данная среда позволяет прятать дополнительные построения, которые не используются для решения задачи.

При помощи встроенных инструментов, Живая математика предоставляет возможность измерять длины отрезков, величины углов, площади многоугольников и кругов, длины ломаных, окружностей и дуг; выполнять действия над величинами, создавать собственные инструменты пользователя [25].

Существенным достоинством данной программы является динамика, создаваемая средствами компьютерной анимации. Можно выделить три вида анимации: ручная, кнопочная и ползунковая [35].

Ручная анимация позволяет переместить геометрический или текстовый объект по рабочему полю среды. Для этого необходимо курсором выбрать Инструмент переноса в верхней части вертикальной панели инструментов, изображенный в виде стрелки (рис. 1.9). Далее пользователю нужно навести курсор на объект, нажать и удерживать левую клавишу мыши. После этого объект при движении мыши будет перемещаться по рабочему полю. Для поворота объекта вокруг некоторой точки используется инструмент поворота, который можно выбрать из всплывающего меню (рис. 1.10). Пользователь может выбрать из всплывающего меню Инструмент гомотетии (сжатие/растяжение), если необходимо изменить объект с точностью до центрального подобия (рис. 1.11).

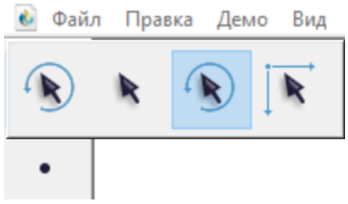


Рисунок 1.10

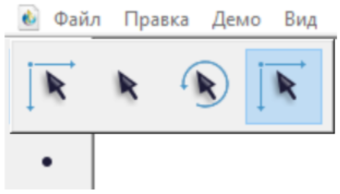


Рисунок 1.11

Кнопочная анимация. В данном случае для запуска анимации объекта создается специальная кнопка: выделим объект → меню «Правка» → опция «Кнопки» → команда «Анимация» или «Перемещение». При нажатии на созданную кнопку объект вместе с «потомками» начинают перемещаться с заданной скоростью.

Ползунковая анимация. Анимацией объекта управляет специально созданный ползунок, который перемещается по отрезку или дуге окружности. Для этого строится отрезок (дуга окружности), на который помещается ползунок. Далее задается необходимая единица измерения и строится динамическая модель исследуемой фигуры. Эта модель будет зависеть от положения ползунка на отрезке или дуге окружности. Таким образом, перемещая ползунок, пользователь задает анимацию объекта.

Еще одним полезным свойством программы является возможность создания собственных инструментов пользователя. Такие инструменты позволяют многократно применять заранее подготовленную конструкцию для построения новых объектов. Для создания собственного инструмента необходимо построить конструкцию, затем выделить объекты, которые определяют конструкцию и результаты (объекты, которые должны быть построены в итоге) → меню Инструмент пользователя (рис. 1.12) → пункт Создать новый инструмент → в диалоговом окне вводим имя инструмента → нажимаем на кнопку Готово. Теперь созданный нами инструмент будет находиться в инструментах пользователя.

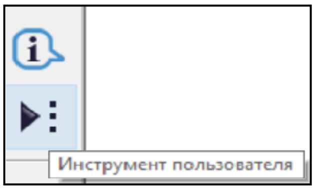


Рисунок 1.12

Программный пакет так же дополнен разработанными Институтом динамическими моделями (компьютерными альбомами, задачниками, примерами использования программы в школьном и внешкольном курсе математики) и методическим пособием.

Весь этот комплект превращает СДГ «Живая Математика» в виртуальную математическую лабораторию для учебных исследований при изучении планиметрии, стереометрии, алгебры, тригонометрии, математического анализа [35].

Среда Живая математика может стать удобным средством компьютерного сопровождения при решении задач методом оригами.

Так как любой школьный курс по выбору должен быть интересным для учеников, первым пунктом при проведении занятия с применением оригами становится работа с бумагой и построение гипотез. Но математика наука точная, а бумага – это материальный объект, который можно неровно сложить, смять или даже порвать. Есть возможность совершить погрешность построения при сгибах. Чтобы исключить погрешности, возникающие при перегибании бумаги, мы предлагаем перейти к следующему этапу занятия – воспользоваться компьютерным экспериментом в Живой математике. Но на данном этапе возникает новая проблема – ученик еще не знает дидактического доказательства для построений. А без них, школьник без помощи учителя не построит нужную геометрическую фигуру.

Для решения данной проблемы нами были разработаны виртуальные инструменты для правил Фудзита. С их помощью ученик легко может воспроизвести в компьютерной среде всю последовательность построений, выполненных им на бумаге.

Виртуальный инструмент для $Ф_1$:

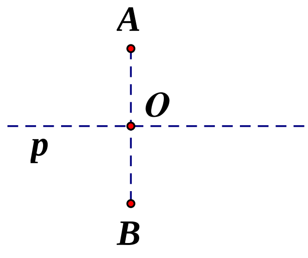


Рисунок 1.13

Инструмент, который проводит через две точки прямую в Живой математике уже есть, однако в нашем случае прямая через две точки будет проводиться автоматически. Создание инструмента:

а) отметим на экране две точки;

б) проведем прямую через две точки, для этого подсветим точки → Прямая;

в) подсветим точки и прямую → Инструмент пользователя → Создать новый инструмент → $Ф_1$.

Виртуальный инструмент для $Ф_2$:

Создадим инструмент для случая, когда точки не совпадают. Для двух точек будет автоматически находиться серединный перпендикуляр:

а) построим отрезок AB (рис. 1.13);

б) найдем середину отрезка O, для этого подсветим отрезок AB → Построения → Середина;

в) найдем серединный перпендикуляр *p* к отрезку AB, для этого подсветим точку O и отрезок AB → Построения → Перпендикуляр;

г) Вид → Спрятать отрезок и точку. Мы спрячем точку O и отрезок AB (оставив сами точки).

д) теперь для точек A и B, и серединного перпендикуляра создадим инструмент $Ф_2$. Он будет уже значительно экономить время и силы при построении компьютерного аналога оригами.

Виртуальный инструмент для $Ф_3$:

По $Ф_3$ нам необходимо создать инструмент для автоматического построения складки при совмещении двух прямых. Прямые будут симметричны относительно складки. У нас получатся два инструмента, так как две прямые могут быть параллельны, а могут и пересекаться.

Для параллельных прямых (рис. 1.14):

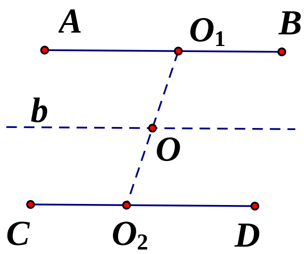


Рисунок 1.14

а) построим отрезок AB и точку C, не лежащую на отрезке;

б) проведем через точку C прямую a, параллельную отрезку AB;

в) построим на прямой a отрезок CD, спрячем прямую a;

г) соединим отрезки AB и CD отрезком O_1O_2;

д) найдем середину O отрезка O_1O_2;

е) проведем через точку O прямую b, параллельную CD ;

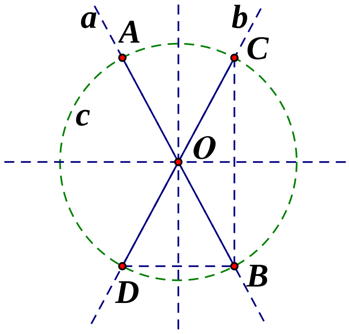


Рисунок 1.15

ж) для создания инструмента подсветим отрезок AB без точек A и B, подсветим отрезок CD, без точек C и D, подсветим прямую b. Создадим инструмент $Ф_{3.1}$.

При пересекающихся прямых по $Ф_3$ можно построить две складки. Они будут являться биссектрисами пересекающихся прямых (рис. 1.15):

а) построим окружность *c*;

б) проведем через центр O окружности прямые *a* и *b*;

в) проведем отрезки AB и CD. Где A и B – точки пересечения прямой *a* с окружностью *c*, а C и D – точки пересечения прямой *b* с окружностью *c*. Спрячем прямые *b* и *c*;

г) проведем отрезки DB и CB, найдем перпендикуляр к отрезку DB и перпендикуляр к отрезку CB, проходящие через центр окружности O;

д) подсветим отрезки DB и CB без точек B, C и D. Подсветим точку O и перпендикуляры к DB и CB. Создадим инструмент $Ф_{3.2}$.

Виртуальный инструмент для $Ф_4$:

Этот инструмент для прямой *a* и точки A будет строить перпендикуляр к прямой *a*, проходящий через точку A (рис. 1.16):

а) построим отрезок AB и точку C, не лежащую на нем;

б) проведем через точку C перпендикуляр к отрезку AB;

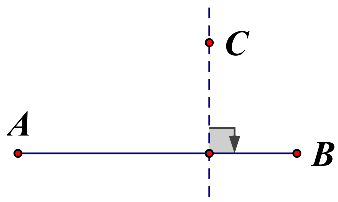


Рисунок 1.16

в) подсветим отрезок AB без точек A и B. Подсветим точку C и перпендикуляр к отрезку AB. Создадим инструмент $Ф_4$.

Виртуальный инструмент для $Ф_5$:

Этот инструмент для прямой *p* и двух точек A и B построит (если это возможно) складку, либо две складки, которые будет проходить через точку B и совмещать точку A с прямой *p* (рис. 1.17):

а) поставим на экране точки A и B, проведем окружность с центром в точке B и радиусом AB;

б) проведем прямую p, пересекающую окружность, отметим точки пересечения A' и A";

в) построим отрезки AA' и AA", проведем к ним перпендикуляры, проходящие через точку B;

г) подсветим прямую p, точку B, затем точку A, затем перпендикуляры к отрезкам AA' и AA", создадим инструмент $Ф_5$.

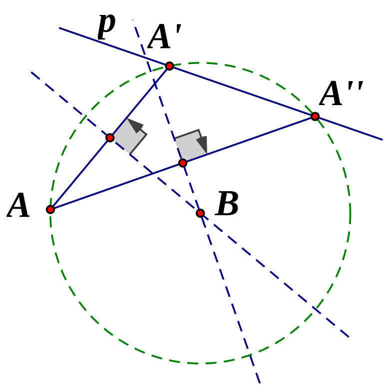


Рисунок 1.17

Виртуальный инструмент для $Ф_7$:

Этот инструмент для двух прямых p_1 и p_2 и точки A построит складку, которая будет совмещать одну из двух прямых с собой и одновременно совмещать точку A со второй прямой, если это возможно.

Пусть нам даны прямые p_1, p_2 и точка A, не лежащая на прямых (рис. 1.18). Выберем на прямой p_1 точки B и C, а на прямой p_2 – точки D и E. Теперь нам можно задать прямую p_1 параметрически точкой B и вектором $\overrightarrow{BC} = \vec{m} = (m_x, m_y)$ получим параметрическое уравнение прямой: p_1: $\begin{cases} x_B + t \cdot m_x \\ y_B + t \cdot m_y \end{cases}$ (1);

где $m_x = x_C - x_B$, $m_y = y_C - y_B$. Прямую p_2 зададим параметрически точкой D и вектором $\overrightarrow{DE} = \vec{n} = (n_x, n_y)$, где $n_x = x_E - x_D$, $n_y = y_E - y_D$.

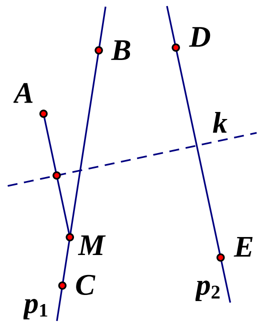


Рисунок 1.18

Для нахождения интересующей нас складки k, нам теперь достаточно найти точку M на прямой p_1 такую, что $\vec{k} \perp \overrightarrow{AM}$ и $\vec{k} \perp \overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{AM} = (x_B - x_A + t \cdot m_x,\ y_B - y_A + t \cdot m_y)$;

Чтобы выполнялось условие $\vec{k} \perp \overrightarrow{AM}$, необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю. Следовательно $\vec{k} = (y_B - y_A + t \cdot m_y,\ x_A - x_B - t \cdot m_x)$. Умножив $\vec{k}$ скалярно на $\overrightarrow{DE}$ и приравняв произведение к нулю, мы найдем параметр t, при котором выполняются условия: $\vec{k} \perp \overrightarrow{AM}$ и $\vec{k} \perp \overrightarrow{DE}$.

$n_x\,(y_B - y_A + t \cdot m_y) + n_y\,(x_A - x_B - t \cdot m_x) = 0$;

$n_x(y_B - y_A) + n_x \cdot t \cdot m_y + n_y\,(x_A - x_B) - n_y \cdot t \cdot m_x = 0$;

$n_x(y_B - y_A) + n_y\,(x_A - x_B) = n_y \cdot t \cdot m_x - n_x \cdot t \cdot m_y$;

$$t = \frac{n_x\,(y_B - y_A) + n_y\,(x_A - x_B)}{n_y\,m_x - n_x\,m_y} \qquad (2);$$

Теперь, при подстановке параметра t в уравнение прямой p_1, мы сможем отыскать интересующую нас точку M. Данная точка будет принадлежать прямой p_1 и являться симметричной точке A относительно складки k, прямая p_2 при этом совместится сама с собой, так как $k \perp p_2$.

Таким образом, применив аналитическую геометрию и произведя расчеты в Живой математике, мы сможем построить инструмент для $Ф_7$:

а) построим прямые p_1, p_2 и точку A, на прямых отметим точки B, C и D, E;

б) при помощи пункта меню Измерения → Координаты, найдем абсциссы и ординаты всех точек;

в) при помощи пункта меню Числа определим значение m_x, m_y, n_x, n_y., определим значение t по формуле (2), а затем координаты точки M по формуле (1);

г) подсветим вычисленные координаты точки M → Графики → Построить точку по координатам. Живая математика построит точку M.

д) построим отрезок AM, найдем его середину и построим серединный перпендикуляр, который и будет являться искомой прямой k.

е) подсветим прямые p_2 и p_1, точку A, точку M, а затем прямую k. Создадим инструмент $Ф_7$.

Самой сложной и единственной аксиомой Фудзита является шестая аксиома $Ф_6$. Построить с помощью циркуля и линейки складку, о которой идёт речь в этой аксиоме, невозможно, поскольку с ее помощью можно решить некоторые задачи, неразрешимые циркулем и линейкой, в частности знаменитую задачу о трисекции угла. Поэтому, как и в случае с созданием собственного виртуального инструмента для $Ф_7$, необходимо использовать векторный и аналитический методы, которые после достаточно громоздких выкладок приводят к нетривиальному кубическому уравнению, корни которого не во всех случаях можно выразить через данные отрезки с помощью конечного числа арифметических операций и извлечения квадратного корня. Вычислить корни кубического уравнения в среде Живая математика можно, однако для этого необходимо использовать эту среду как систему компьютерной алгебры, либо применить другие возможности Живой математики. На данный момент нам удалось построить собственный виртуальный инструмент для аксиомы $Ф_6$, используя возможность Живой математики создавать так называемые «Геометрические места точек» [14].

Созданные нами инструменты для правил Фудзита позволяют перенести вещественные эксперименты с бумагой в виртуальную лабораторию. При этом остаются действовать все аксиомы оригами, однако у учеников появляется возможность точных измерений и экспериментов в современной компьютерной среде.

§1.4. Модель формирования у учащихся интереса к экспериментальной математике с помощью задач, решаемых методом оригами в среде Живая математика.

Центральной фигурой образовательного процесса в настоящее время является личность обучающегося. Школе необходимо развивать способности ученика в любых условиях идти в ногу со временем. Поэтому актуальной проблемой современного образования становится формирование и развитие познавательных интересов обучающихся, которые способствуют формированию таких способностей.

«Интерес – мощный побудитель активности личности, под влиянием которого все психические процессы протекают особенно интенсивно и напряженно, а деятельность становится увлекательной и продуктивной» [36].

Одной из самых значительных областей общего феномена «интерес» является познавательный интерес, имеющий особое значение в школьном возрасте. Под познавательным интересом С.Л. Рубинштейн понимает особую избирательную направленность личности на процесс познания, избирательный характер которой выражается в той или иной предметной области. Ряд авторов исследуют интерес как условие повышения продуктивности учебного процесса [11].

На наш взгляд, М.Ф. Беляев в работе «Психология интереса», дает наиболее полное определение познавательного интереса: «Познавательный интерес есть одна из психологических активностей, характеризующая как общая сознательная устремленность личности к объекту, проникнутая отношением близости к объекту, эмоционально насыщенная и влияющая на повышение продуктивности деятельности» [6].

По мнению К.Д. Ушинского, познавательный интерес является важнейшим мотивом учения. Он лежит в основе положительного отношения учащихся к школе, к знаниям, которые побуждают учиться с охотой [31].

В основе познавательного интереса лежит познавательная задача, требующая от ученика не ориентировки на новизну и неожиданность, а активной творческой и поисковой деятельности: «…интерес возникший в процессе обучения, …активизирует умственную деятельность не только в данный момент, но и направляет её к последующему решению интеллектуальных задач» [2].

Иванова Т.Г в результате анализа работ различных ученых выделила следующие показатели познавательного интереса [12]:

1. Возникновение вопросов. Признаки: активный поиск ответа на возникший вопрос, стремление понять суть, роль, место нового.

2. Самостоятельность. Признаки: решительность, способность по собственной инициативе добиваться результата, преодолевать трудности.

3. Сосредоточенность. Признаки: способность, не отвлекаясь на внешние факторы, напряженно направлять свое внимание на что-то одно.

4. Осознанность. Признаки: полное понимание всего того, что связано с объектом внимания.

5. Настойчивость и упорство. Признаки: последовательность и твердость в работе по достижению поставленной цели.

Таким образом, можно сказать, что познавательный интерес при правильной педагогической организации деятельности учащихся и систематической и целенаправленной воспитательной деятельности становится устойчивой чертой личности школьника и оказывает сильное влияние на его развитие. Под влиянием познавательного интереса учебная работа даже у слабых учеников протекает более продуктивно.

Г.И. Щукина выделяет три группы условий, стимулирующих развитие познавательных интересов:

1) Содержание учебного материала. В данную группу можно включить новизну содержания, обновление уже усвоенных фактов, исторический подход к сообщаемому материалу (задачи повышенной трудности; удовлетворение, получаемое при решении таких задач; сведения из истории науки; изящество, необычность методов вычислений, доказательств, исследований).

2) Организация процесса обучения. Эта группа включает различные формы самостоятельной работы, проблемное обучение, исследовательский подход к изучаемому материалу, творческие работы (Нешаблонное построение уроков, их разнообразие, включение в каждый урок новых элементов; организация творческих работ, соревнований, дидактических игр).

3) Отношения между учениками и учителем. В эту группу относят способности учащихся, увлеченность преподавания самого учителя. [37].

Одним из средств формирования познавательного интереса обучающихся к математике и экспериментальной деятельности являются курсы по выбору. Они направлены на: «... удовлетворение индивидуальных склонностей, задатков, потребностей учащихся, развитие их способностей» [27]. При этом, обучающиеся нуждаются в том, чтобы знакомство с математическими истинами носило не сухой характер, а пробуждало бы интерес к науке [17]. Для формирования познавательного интереса к экспериментальной деятельности мы предлагаем курс по выбору, деятельность которого заключается в проведении геометрических экспериментов с бумагой и дальнейшем перенесении их в компьютерную среду Живая математика.

Так как каждому возрасту школьников соответствует определенная ведущая форма познания, то выбор соответствующих образцов экспериментальной деятельности, по нашему мнению, будет способствовать формированию интереса к исследовательской деятельности и качеств математика экспериментатора. В литературе по психологии для учеников основной школы (11-15 лет) указаны следующие особенности познавательной деятельности: направленность на познание системы практических и научных сведений, появление собственных представлений, мнений, суждений, развитие абстрактно-логического мышления [30].

М.В Шабанова в монографии «Методология учебного познания как цель изучения математики» утверждает, что характеру ведущей формы познания для учеников основной школы соответствуют следующие действия: развитие представлений учеников о специфике математических экспериментов (мыслительных и компьютерных), о возможностях и ограничениях экспериментальных методов, связи экспериментальных методов с теоретическими методами познания [34]. Таким образом, с учетом ведущей формы познания для учеников основной школы, каждое занятие курса мы предлагаем посвятить решению одной или нескольких задач оригами. Занятие может состоять из следующих этапов:

1) Докомпьютерное решение. Цель этапа: построить гипотезу или алгоритм решения задачи методом перегибания листа бумаги. Обосновать необходимость использования компьютерного эксперимента. На данном этапе обучающиеся знакомятся с задачей, предлагают варианты решения задачи методом оригами, проводят эксперименты с бумагой. Учитель может предложить свой вариант решения. Необходимость компьютерного эксперимента возникает из-за физических свойств бумаги, невозможности точно измерить полученный результат.

2) Компьютерное исследование: Цель этапа: проверка точности решения задачи методом оригами, а так же устойчивости свойств полученной модели посредством изменения размеров, длин сторон изучаемой модели. На этом этапе обучающиеся создают компьютерную модель объекта исследования и экспериментируют с ним. Одна из задач учителя на этом этапе – подвести учащихся к необходимости аналитического доказательства полученного построения методом оригами.

3) Послекомпьютерное решение задачи. Цель этапа: поиск аналитического доказательства полученного результата эксперимента, применение выводов к решению исходной проблемы.

4) Поиск других методов решения и доказательства задачи. Цель этапа: развитие у обучающихся личностных качеств, мышления, творческого подхода к решению задач; углубление знаний в курсе геометрии. На данном этапе так же возможно проведение модифицированных компьютерных или вещественных экспериментов с целью определения возможных направлений дальнейшего исследования [19].

Для освоения обучающимся элемента в учебном содержании курса ученик должен обладать определенным уровнем математической подготовки, достаточным для усвоения нового материала. Поэтому учителю необходимо выбирать метод проведения урока, который будет соответствовать степени самостоятельности и готовности учеников к проведению исследования: репродуктивный, частично-поисковый или исследовательский. Учитель может выстраивать траекторию занятия по выше приведенному плану с учетом готовности учеников к исследовательской деятельности.

Предложенный нами план проведения занятий курса по выбору, по нашему мнению, будет способствовать формированию, развитию и укреплению познавательного интереса учащихся, так как будут выполняться следующие условия:

1) Обучающиеся будут находиться в ситуации решения познавательных задач, ситуации догадок, размышлений, активного поиска, противоречивости суждений, столкновений различных позиций, в которых необходимо разобраться. У них появится возможность решать задачи по геометрии новым способом, потенциал которого превосходят метод решения задач циркулем и линейкой (решение задачи о трисекции угла).

2) В представленный нами план хорошо вписываются элементы проблемного обучения, мини исследования, творческие и самостоятельные работы. Так же ученики будут участвовать в различных видах деятельности: вещественный эксперимент с бумагой, компьютерный эксперимент, аналитическое доказательство.

3) У обучающихся будет возможность высказывать свое мнение, участвовать в дискуссии, предлагать всей группе собственный способ решения, что будет способствовать развитию коммуникации, творческих способностей.

Мы разработали опросник, который, по нашему мнению, дает возможность определить влияние курса на повышение уровня познавательного интереса учеников к экспериментальной деятельности (см. Приложение А). Опросник мы будем использовать для сравнения уровня познавательного интереса учеников до занятий курса и после проведения серии занятий. Повышение суммарного балла учеников будет означать, что после занятий курса, познавательный интерес учеников к экспериментальной математике повысился.

Таким образом в первой главе мы провели анализ экспериментальной математики как одного из главных веяний современного математического образования; познакомились с научно-методическими и практическими исследованиями в области оригаметрии; изучили конструктивные, анимационные и исследовательские возможности среды Живая математика как средства моделирования решения задач методом оригами; предложили модель формирования у учащихся интереса к экспериментальной математике с помощью задач, решаемых методом оригами в среде Живая математика и разработали опросник, позволяющий определить влияние деятельности учащихся по решению таких задач на повышение уровня познавательного интереса к математике.

Глава 2. Содержание курса по выбору «Оригами и Живая математика», методика формирования с его помощью интереса к экспериментальной математике

§2.1. Простейшие задачи на перегибание листа бумаги.

Правила Фудзита позволяют использовать метод перегибания листа бумаги при изучении геометрии в школьном курсе, так как складывание самой простой фигуры оригами включает в себя решение простейших геометрических задач на построение. Рассмотрим использование метода перегибания листа бумаги при изучении геометрии в средней школе.

Начальные геометрические сведения.

Построение точки, прямой, отрезка. Прямая – складка на листе бумаги, точка – либо пересечение двух складок, либо произвольная точка на прямой или в любом месте, намеченная проколом иглы (постулат 6), отрезок – складка, соединяющая две точки по правилу $Ф_1$. Для построения перпендикулярных прямых или прямого угла на бумаге, достаточно одной складки и точки, не лежащей на ней (правило $Ф_4$).

Треугольники.

При помощи метода перегибания листа бумаги ученики могут изучать различные виды треугольников и их свойства.

Медианы треугольника строятся по правилам $Ф_2$ и $Ф_1$, биссектрисы – по правилу $Ф_3$, высоты – по правилу $Ф_4$. Правила, таким образом, позволяют найти центры пересечения медиан, биссектрис, высот треугольника.

Для построения прямоугольного треугольника нам необходим квадратный лист бумаги (рис. 2.1). Применим $Ф_2$ для нахождения серединного перпендикуляра к сторонам AD и BC. По правилу $Ф_1$ найдем складку, соединяющую точку D и середину противоположной стороны O. Треугольник OO'D – искомый.

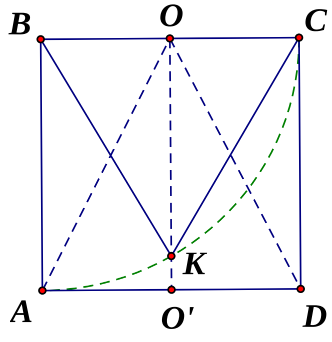


Рисунок 2.1

Для построения равнобедренного треугольника теперь достаточно еще раз применить правило $Ф_1$ к точкам А и О. Треугольник AOD – равнобедренный. Математическим обоснованием этого будет являться тот факт, что отрезок OO' – серединный перпендикуляр к основанию треугольника DC. Так как OO' одновременно является в треугольнике DOC и медианой и высотой, следовательно, ΔDOC равнобедренный.

Если мы возьмём на средней линии OO' такую точку K, расстояния от которой до двух углов квадрата B и C равны его стороне BC, мы получим равносторонний треугольник BKC [29]. Для получения данного треугольника перегнем квадрат по линии, проходящей через точку B так, чтобы точка A попала на прямую OO'. Линия сгиба даст нам отрезок BK. Аналогично найдем сторону CK равностороннего треугольника. Логическое обоснование: OK – серединный перпендикуляр к BC по построению, BK = CK = BC по построению.

Равносторонний треугольник можно получить из листа произвольной формы. Пусть нам даны две различные точки A и B. Построим точку C такую, что AB = BC = CA. В равностороннем треугольнике любая из вершин лежит на серединном перпендикуляре к противоположной стороне. Построим по $Ф_2$ серединный перпендикуляр к точкам A и B. Получим прямую a. Теперь по $Ф_5$ построим складку b, которая проходит через точку A и совмещает точку B с прямой a в точке C (рис. 2.2).

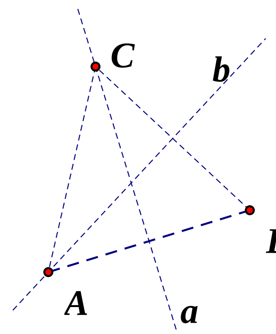


Рисунок 2.2

Четырехугольники

Для решения задач оригами часто используют квадратный лист бумаги. Рассмотрим способ построения квадрата на листе произвольной формы. При построении мы будем учитывать тот факт, что квадрат симметричен относительно своих диагоналей. А диагонали квадрата являются биссектрисами его углов.

Пусть даны две произвольные точки А и В. Построим такие точки С и D, чтобы четырехугольник ABCD являлся квадратом (рис. 2.3).

а) по Φ_1 построим складку a, проходящую через точки А и В;

б) по Φ_4 построим складку b, которая проходит через точку А и совмещает прямую a с ней самой.

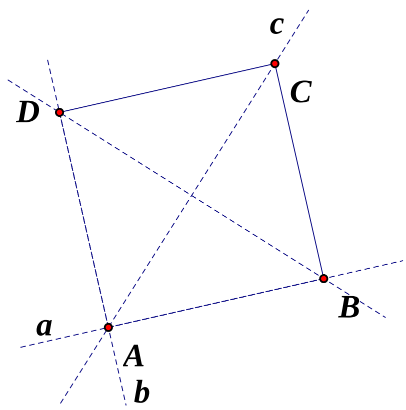


Рисунок 2.3

в) по Φ_3 найдем складку c, совмещающую прямые a и b. Точка D – копия точки В на прямой b;

г) по Φ_1 построим складку через точки В и D. Точка С копия точки А относительно прямой, содержащей BD.

Перегибанием листа бумаги можно получить ромб, трапецию, параллелограмм, а так же правильные многоугольники.

Параллельные прямые

Для построения параллельных прямых на квадратном листе бумаги необходимо воспользоваться правилом Φ_2 (рисунок 2.4):

а) найдем серединный перпендикуляр B'C' сторон AB и CD;

б) построим серединный перпендикуляр A'D' отрезков AB' и C;

в) построим серединный перпендикуляр A'D' отрезков AB' и DC';

Математическим обоснованием параллельности прямых A'D' и B'C' будет являться тот факт, что оба эти отрезка одновременно перпендикулярны сторонам AB и CD.

Окружность

Правила Фудзита позволяют в два действия найти центр круга. Сначала необходимо согнуть пополам заготовку в форме круга. Таким образом, используя Φ_1, мы построим прямую между двумя точками на окружности. По Φ_2 – найдем

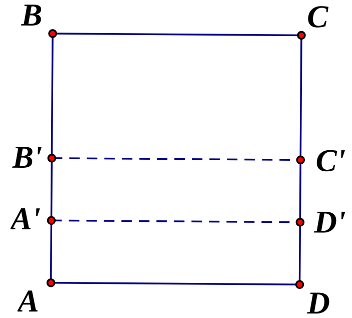


Рисунок 2.4

серединный перпендикуляр между точками. Точка пересечения двух прямых и даст нам искомый центр круга.

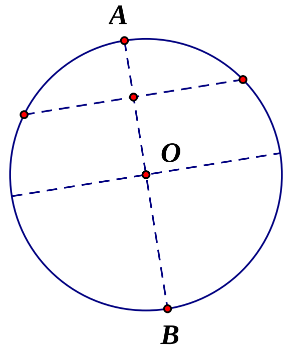


Рисунок 2.5

Если же круг нарисован на непрозрачной бумаге, то перегнем лист по какой-нибудь хорде по правилу $Ф_1$. По правилу $Ф_2$ найдем серединный перпендикуляр АВ к ней. Затем найдем середину О этого перпендикуляра. Точка О будет центром круга, так как АВ – его диаметр, а О - середина диаметра (рис 2.5).

Таким образом, в школьном курсе геометрии встречаются различные типы задач, к которым применим метод перегибания листа бумаги. Изучение новых тем по геометрии так же можно сопровождать геометрическими опытами с бумагой.

Примеры решения задач по геометрии методом оригами

Задача 1. *Отрезок, длина которого равна а, разделен произвольной точкой на 2 отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков [4].*

Задачи такого типа (на нахождение частей) часто вызывают затруднения у школьников. Метод оригами позволяет быстро и наглядно решить данную задачу. Для решения будем использовать прямоугольный лист бумаги.

1. На прямоугольном листе бумаги сгибом наметим произвольную точку С (рис. 2.6).

2. По Ф4 получим сгиб СС'. Для этого построим складку, которая проходит через точку С и совмещает прямую АВ с ней самой.

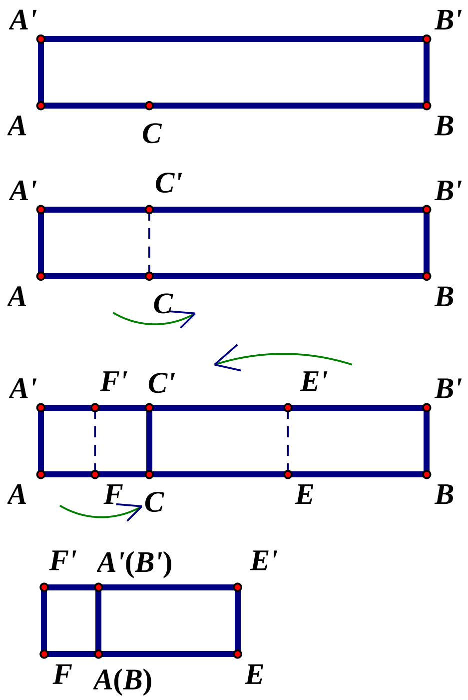


Рисунок 2.6

3. Так как нам необходимо найти расстояние между серединами отрезков АС и СВ, при помощи Ф2 построим складки, соединяющие соответственно А с С, А' с С' и В с С, В' с С'. Получим складки FF' и ЕЕ'.

4. Сложим бумагу в два слоя, совместив А с С, А' с С' и В с С, В' с С'.

Ученикам становится видно, что точки А, В и А', В' совместились. Можно сделать вывод, что расстояние между серединами отрезков АС и СВ равно а:2. После проведенного эксперимента, ученикам необходимо решить данную задачу алгебраическим способом.

Задача 2: *Докажем теорему 7 класса об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей: «Теорема: Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны» [4].*

Для проведения эксперимента будем использовать прямоугольный лист бумаги (рисунок 2.7):

1. Произвольным сгибом наметим складку EF. Сравним накрест лежащие углы 1 и 2.

2. Снова согнем лист по секущей EF.

3. Совместим вершины накрест лежащих углов (точки E и F). Углы 1 и 2 совпали при наложении. Следовательно, накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, равны.

Среда Живая математика в данной задаче может понадобиться лишь для уточнения равенства углов 1 и 2.

После проведения эксперимента можно перейти к логическому доказательству теоремы, а так же предложить самостоятельно при помощи перегибаний листа бумаги установить факт равенства соответственных углов при пересечении параллельных прямых секущей.

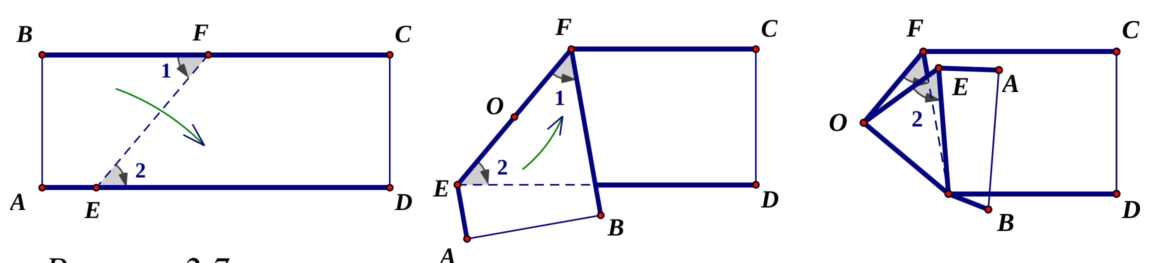


Рисунок 2.7

Таким образом, используя метод оригами возможны эксперименты по рассмотрению различных теорем 7-8 класса (теоремы Пифагора и т. д.)

Так как аксиоматика оригами не изучается в школе, мы предлагаем рассмотреть простейшие задачи на перегибание уже во втором полугодии 7 класса в рамках кружка «Оригами». Данный кружок будет служить подготовкой к курсу по выбору в 8 и 9 классе. В содержание кружка может войти знакомство с техникой оригами, правила Фудзита, доказательство методом оригами теорем 7 класса, построение простейших геометрических фигур. Данный кружок не предусматривает перенесение экспериментов с бумагой в компьютерную среду. Он направлен на формирование начальных знаний правил оригами, формирование интереса к математике и понимание возможности доказательства геометрических теорем различными способами. Нами была разработана примерная программа кружка «Оригами», рассчитанная на 18 часов (см. Приложение В) [9].

§2.2. Сопровождение решения простейших задач оригами с использованием анимационных возможностей среды Живая математика.

В настоящее время в работах многих исследователей говорится о том, что перспективным направлением в образовании является компьютерная анимация. Под компьютерной анимацией мы будем понимать компьютерную имитацию реального или идеального процесса с помощью изменения формы объектов, текста или показа последовательных изображений с фазами движения [1].

Она применяется при подготовке презентаций к уроку, создании электронных учебников, при проведении учебных экспериментов и исследований. Использование компьютерной анимации позволяет создавать интерактивные обучающие модели с элементами взаимодействия с пользователем. Это повышает наглядность представления нового учебного материала и способствует более прочному усвоению учащимися основ теории. Анимация дает возможность взглянуть на явление в движении, создает новую реальность. При помощи анимации можно увидеть процесс, который сложно или невозможно увидеть в природе.

Компьютерная анимация особенно актуальна при обучении такой абстрактной учебной дисциплине, как математика. По мнению Николая Андреева, заведующего Лаборатории популяризации и пропаганды математики (ППМ) Математического института им. В.А. Стеклова РАН, в настоящее время, когда общий уровень образования в России снижается, доносить информацию становится труднее [1]: «Если ребенок не понимает красоты математики или зачем она нужна, приходится придумывать какие-то развлекательные формы, чтобы показать ему на более простом, чем формула, уровне, зачем все это нужно: зачем он в школе проходит трапецию или геометрические построения… Приходится идти на хитрость: показывать что-то красивое, где применяется математика, в надежде, что ему станет интересно и он захочет ее изучать».

При проведении занятий курса по выбору Живая математика может использоваться для:

а) исследования задачи: точных построений и измерений длин, углов, отношений сторон. При исследовании может использоваться ручная анимация, позволяющая менять вид треугольника, размер и т.д.;

б) показа GSP - файлов для визуализации способа построения решения задач методом оригами. Данная цветная анимация заранее создается учителем;

в) для учеников, которые быстро справлялись с заданием может быть организована дополнительная работа по созданию GSP-файла, воспроизводящего анимацию перегибания листа бумаги.

Живая математика позволяет ученикам не только убедиться в правильности теории и решения задач методом оригами при помощи компьютерного воспроизведения бумажного опыта и измерения всех необходимых величин (равенство углов при построении правильного треугольника методом оригами и т.д.). Возможности Живой математики позволяют учителю подготовить показ примеров решения задач в динамике. Показать последовательность перегибаний не просто схематически, но и в движении. В данном случае чертеж будет выглядеть более натурально и имитировать поведение плоскости листа в трехмерном пространстве. Следовательно, у учителя появляется возможность для создания презентаций с применением Живой математики. Чертеж в данном случае будет включать в себя анимационные элементы и исполнительные кнопки.

Рассмотрим построение динамических схем оригами при работе с квадратным и треугольным листом бумаги, а так же при работе с листом бумаги в форме круга.

Динамические схемы оригами при работе с квадратом и треугольным листом бумаги

При работе с квадратным листом бумаги необходимо построить устойчивый чертеж квадрата. Данный чертеж не будет менять свою форму при перемещении его по окну Живой математики. Построение динамической схемы в Живой математике не носит механический характер (нажать на кнопку, задать команду, направление перемещение). Первоначально необходимо задуматься, какие математические понятия и свойства используются в оригами. При совмещении двух точек, мы получаем сгиб, который является осью симметрии этих точек. Таким образом, при построении динамического чертежа, мы будем каждый раз задавать ось симметрии точек и создавать движущиеся точки по направлению от начального к конечному положению.

Создание конкретного динамического чертежа в Живой математике рассмотрим на примере задачи разбиения одного из углов квадрата на три равных угла.

При разделении угла BAD квадрата ABCD на три равных, мы будем использовать возможность построений из бумаги при помощи сгибов равностороннего треугольника KAD с основанием AD (рис. 2.8). Сам треугольник нам строить необязательно. Достаточно найти сторону AK (∠KAD = 60º), а затем ∠KAD разделить на две равные части. Для этого нам необходимо:

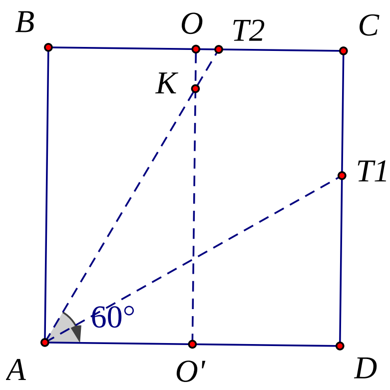


Рисунок 2.8

а) по Φ_2 перегнуть квадрат ABCD пополам, совместив стороны AB и CD, получим прямую сгиба OO'.

б) перегнуть квадрат по линии, проходящей через точку A так, чтобы точка D попала на прямую OO'. Линия сгиба даст нам отрезок AT_1 с точкой T_1 на CD.

в) перегнуть квадрат по линии, проходящей через точку A так, чтобы сторона AB попала на луч AT_1. Линия сгиба даст нам отрезок AT_2 с точкой T_2 на BC (на данном отрезке и будет находиться сторона AK равностороннего треугольника KAD).

Для построение динамического чертежа задачи нужно создать эффект движения при выполнении выше перечисленных пунктов:

а) перегнуть квадрат ABCD пополам, совместив стороны AB и CD.

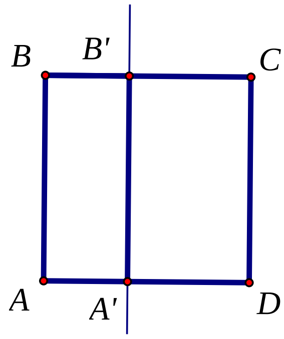


Рисунок 2.9

1. Построим в Живой математике квадрат [35]. Обозначим вершины.

2. На стороне BC проведем отрезок BB'. Точка B' – динамическая, ее можно перемещать по стороне BC. Данная точка выполняет функцию верхнего края квадратного листа B при движении. При помощи пункта меню «Построения» проводим прямую a ∥ AB, B' ∊ a. На прямой a строим отрезок A'B' (рисунок 2.9). Вид → Спрятать прямую – скрываем прямую a.

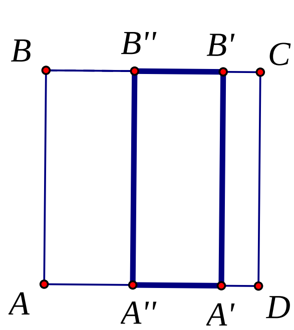


Рисунок 2.10

3. Построения → середина – находим середину отрезка BB'. Строим отрезок A"B" (см. пункт 2). В результате мы получим динамичный прямоугольник B'B"A'A"(рис. 2.10). При движении отрезка A'B', отрезок A"B" так же будет перемещаться, при этом всегда оставаясь серединным перпендикуляром для ABB'A'. Это создает эффект загибающегося листа бумаги.

4. Выделяем точки B', затем C. Правка → Кнопки → Перемещение → Двигаться к начальному положению цели.

Мы создали кнопку для перемещения точки B' в точку C. Аналогично создадим кнопку для перемещения точки B' в точку B, выделив сначала точку B', а затем точку B. Вместе с точкой B' будут перемещаться отрезки A'B' и A"B".

5. Необходимо учесть, что после сгибания листа бумаги должна появиться линия сгиба. Для этого мы найдем середину стороны BC, а затем проведем серединный перпендикуляр к этой стороне. Отрезок OO', лежащий на серединном перпендикуляре, и будет линией сгиба. Для эффекта появления линии сгиба после перегибания создадим дополнительную кнопку «Скрыть, показать отрезок» – Правка → Кнопки → Спрятать/показать.

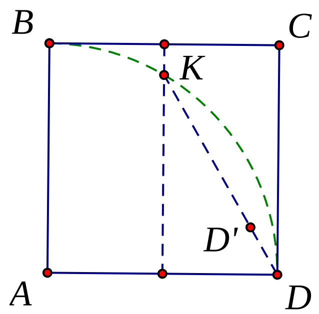


Рисунок 2.11

б) перегнуть квадрат по линии, проходящей через точку A так, чтобы точка D попала на прямую OO'. Линия сгиба даст нам отрезок AT_1 с точкой T_1 на CD.

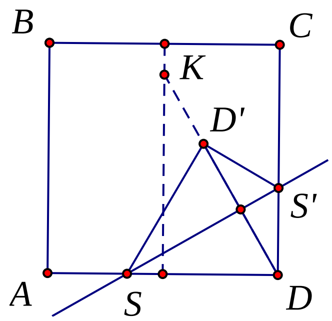


Рисунок 2.12

В данном случае будет происходить движение точки D' по прямой DK (рисунок 2.11).

1. Строим отрезок DD', находим его серединный перпендикуляр b. Отмечаем S и S' – точки пересечения b со сторонами квадрата AD и CD. Строим отрезки SD', SD, S'D', S'D (рисунок 2.12).

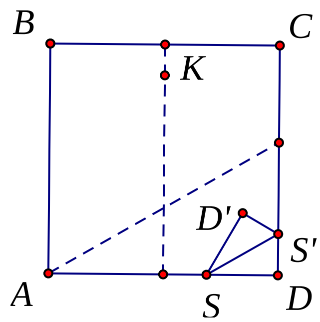


Рисунок 2.13

2. Скрываем все дополнительные линии и создаем кнопки перемещения из D' в K и из D' в D.

3. Строим линию сгиба AT_1. Создаем для неё кнопку «Спрятать/показать». Получаем динамическую иллюзию перегибания (рисунок 2.13).

в) перегнуть квадрат по линии, проходящей через точку A так, чтобы сторона AB попала на луч AT_1. Линия сгиба даст нам отрезок AT_2 с точкой T_2 на BC (на данном отрезке и будет находиться сторона AK равностороннего треугольника KAD).

г) После создания кнопок для перемещения всех точек, их объединяют в одну: Правка → Кнопки → Презентация. При нажатии кнопки выполняется вся последовательность действий по разделению угла квадрата.

При создании презентации возможно использование окрашивания разных частей чертежа для большего эффекта перегибания.

Динамические схемы оригами при работе с листом бумаги в форме круга

Создание динамических чертежей задач на перегибание круглого листа бумаги: Построения → Дуга на окружности – создаем сегмент. Преобразования → Симметрия – создаем отражение сегмента, которое будет перемещаться вместе с точкой A на окружности (рисунок 2.14). Правка → Кнопки → Перемещение → Двигаться к начальному положению цели – создаем динамический чертеж.

Рассмотрев возможности среды Живая математика в качестве средства компьютерного сопровождения решения задач методом оригами, мы пришли к выводу что, данная среда предоставляет возможности ученикам проводит виртуальные эксперименты, эквивалентные экспериментам с бумагой, но дающие большую точность измерений и вычислений. Так же данная программа может быть полезна учителям при создании динамических алгоритмов к задачам, решаемым методом оригами.

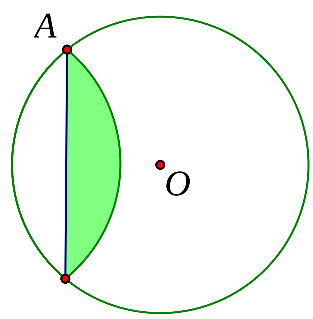


Рисунок 2.14

§2.3. Методика проведения занятий курса по выбору на примере решения некоторых задач оригами среднего и более высокого уровня сложности

Геометрия треугольника в условиях оригами

Задача: Изучение свойств медианы треугольника (8 класс).

Мотивировать учеников можно следующим вопросом: «В любом ли треугольнике медианы пересекаются в одной точке, в каком отношении эта точка делит медианы?».

На первом этапе эксперимента ученики работают с бумажными треугольниками разного вида (прямоугольный, остроугольный, тупоугольный, равнобедренный и т.д.). Им предлагается проверить верность утверждения о том, что в любом треугольнике все медианы пересекаются в одной точке. Так же предлагается измерить части медиан, образованные этой точкой и исследовать их отношение.

Ученики в результате проведения вещественного эксперимента формируют гипотезу. Учитель уточняет эту гипотезу и формулирует свойство.

Компьютерный эксперимент позволит убедиться в правильности гипотезы. На данном этапе ученики могут не просто построить различные треугольники при помощи виртуальной линейки, но и создать динамическую модель треугольника, который будет менять свой вид при передвижении клавишей мыши точки O на основании треугольника, при этом на динамическом листе будут выведены значения отношений частей медиан (см. Приложение С).

Данные значения отношений не будут меняться при изменении вида треугольника, что станет доказательством правильности выдвинутой гипотезы. Затем учитель предъявляет доказательство свойства и предлагает найти ученикам другие закономерности на рассматриваемом чертеже. При проведении эксперимента ученики могут открыть новое свойство: разбиение медианами треугольника на четырехугольники равной площади, либо разбиение исходного треугольники отрезками медиан на треугольники равной площади.

Таким образом, с помощью компьютерного эксперимента возможно самостоятельное изучение свойств замечательной точки треугольника, образованной пересечением медиан.

После доказательства свойства и проведенных исследований, учитель рассказывает ученикам, что данная точка называется центром тяжести треугольника. Ученики могут проверить данное утверждение при помощи бумажных треугольников. Если установить острие в эту точку, то треугольник будет находиться в равновесии.

Геометрия четырехугольника в условиях оригами

Задача: *Из листа бумаги вырезан квадрат ABCD. Как при помощи перегибаний листа бумаги вписать в него равносторонний треугольник, имеющий с квадратом ровно одну общую вершину A [26].*

На первом этапе решения задачи ученики работают с квадратными листами бумаги. Им необходимо придумать такой способ перегибания, чтобы линии сгиба на листе определяли равносторонний треугольник с вершинами, обозначим их F и G, лежащими на сторонах BC и CD соответственно. Ученики могут выдвигать и реализовывать различные гипотезы, связанные с построением искомого треугольника. По итогам экспериментальной проверки каждому из них предлагается проверить с помощью обычной линейки, верна ли их гипотеза или нет, т.е. равны ли между собой длины всех сторон треугольника. Как показывает опыт, у большинства учеников ΔAFG окажется не равносторонним (таким, например, как на рисунке 2.15).

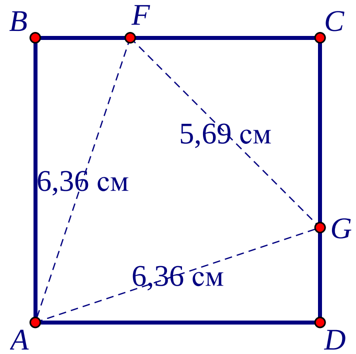


Рисунок 2.15

Учитель может предложить и свой вариант, в основу которого следует положить предварительный анализ, согласно которому прямоугольные треугольники ABF и ADG равны по катету и гипотенузе, отсюда углы при вершине А в этих треугольниках окажутся равными (90^{o} - 60^{o}) / 2 = 15^{o}: Но тогда мы решим задачу, если разделим $\angle$BAD = 90^{o} на три равных между собой угла, затем в крайних из них с помощью перегибания проведём биссектрисы AF и AG. Итак, ученикам можно предложить следующий алгоритм (рис. 2.16):

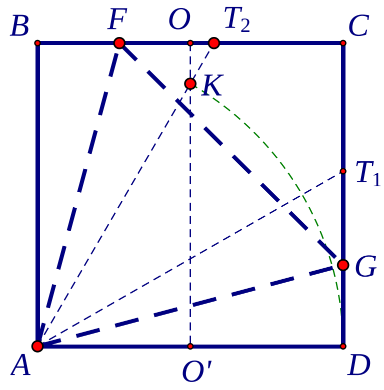


Рисунок 2.16

а) Перегните квадрат ABCD пополам, совместив стороны AB и CD, получите прямую сгиба OO'.

б) Перегните квадрат по линии, проходящей через точку A так, чтобы точка D попала на прямую OO'. Линия сгиба даст отрезок AT_1 с точкой T_1 на CD.

в) Перегните квадрат по линии, проходящей через точку A так, чтобы сторона AB попала на луч AT_1. Линия сгиба даст отрезок AT_2 с точкой T_2 на BC.

г) Теперь осталось построить биссектрисы AF и AG углов BAT_2 и DAT_1 с помощью перегибания последних пополам. Треугольник AFG – искомый.

Компьютерная модель в среде Живая математика подтвердит нашу гипотезу, а её логическое обоснование будет естественным образом вытекать из того, что в прямоугольном треугольнике AKO' катет AO' равен половине гипотенузы, т.е. AK/2. Отсюда $\angle$KAO' = 60^{o} = $\angle$FAG. Таким образом, ΔAFG не только равнобедренный, но и равносторонний [32].

Задача о разбиении произвольного острого угла на равные части (см. Приложении D) [15].

Деление отрезка на равные части и в заданном отношении

Аксиомы Фудзита позволяют в два действия найти середину отрезка. Используя $Ф_1$, мы построим прямую между двумя точками, по $Ф_2$ – найдем серединный перпендикуляр между точками. Точка пересечения двух прямых и даст нам искомую середину отрезка. При многократном повторении $Ф_2$

можно найти $\frac{1}{2^n}$ -ю часть отрезка, таким образом разделив его в любом соотношении n : m, если $\frac{n}{m}$ является конечной двоичной дробью [40].

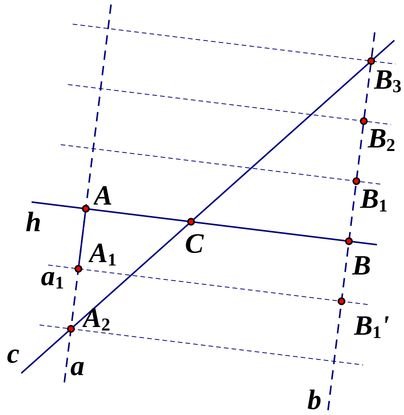


Рисунок 2.17

Существует удобный метод деления отрезка в заданном отношении n : m, предложенный великим немецким художником Альбрехтом Дюрером [10].

Рассмотрим оригами-версию решения данной задачи: даны две различные точки A, B и два взаимно простых натуральных числа n и m ∈ N. Построить такую точку C ∈ AB, что AC : BC = n : m.

Мы составим алгоритм решения задачи для n = 2 и m = 3 (рис. 2.17) [5].

а) по $Ф_1$ найдем складку h, соединяющую точки A и B;

б) по $Ф_4$ найдем складку a, которая проходит через точку A и совмещает прямую h с самой собой;

в) по $Ф_4$ найдем складку b, которая проходит через точку B и совмещает прямую h с самой собой;

г) по $Ф_4$ найдем прямую a_1, которая проходит через произвольную точку A_1, и совмещает прямую a с самой собой. Примем A_1A за единицу длины (A_1A=1). При этом прямая a_1 в пересечении с прямой b образуют точку B_1'.

д) скопируем точку A в точку A_2 симметрично прямой a_1;

е) аналогично предыдущему пункту, получим точки B_1, B_2, B_3;

ж) по $Ф_1$ найдем складку c, соединяющую A_2 и B_3, тогда $h \cap c$ = C. Точка C такая, что AC : BC = 2 : 3.

Математическим обоснованием правильности решения будет являться тот факт, что AA_2 = n, BB_3 = m, а прямоугольные треугольники CAA_2 и CBB_3 подобны по общему острому углу ACA_2 и BCB_3. Отсюда следует пропорция:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AA_2}{BB_3} = \frac{2}{3}$$

Решение с помощью оригами можно применять для случая, когда нужно разделить отрезок в соотношении x : y, где числа x и y являются произвольными (не обязательно натуральными) и заданы длинами отрезков.

Данные простейшие построения на бумаге позволяют использовать оригами в различных темах геометрии средней школы.

Деление отрезка в золотом отношении

Напомним, что золотым отношением (золотой пропорцией, золотым сечением) называется соотношение двух величин a и b, $a > b$, при котором отношение суммы этих величин к большей из них равно отношению большей величины к меньшей то есть: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Число, равное отношению $\frac{a}{b}$, обычно обозначается прописной греческой буквой Φ (фи), в честь древнегреческого архитектора и скульптора Фидия [24].

Золотое отношение издревле используется при нахождении максимально уравновешенных пропорций между архитектурными частями зданий или частями архитектурных сооружений, золотое число возникает в разных физических задачах, свойствами, характерными для «золотого сечения» обладают живые системы.

Задача: Даны две различные точки A и B. Построить при помощи перегибания листа бумаги такую точку C ∈ AB, для которой выполняется соотношение $\frac{CB}{AC} = \frac{AB}{CB}$.

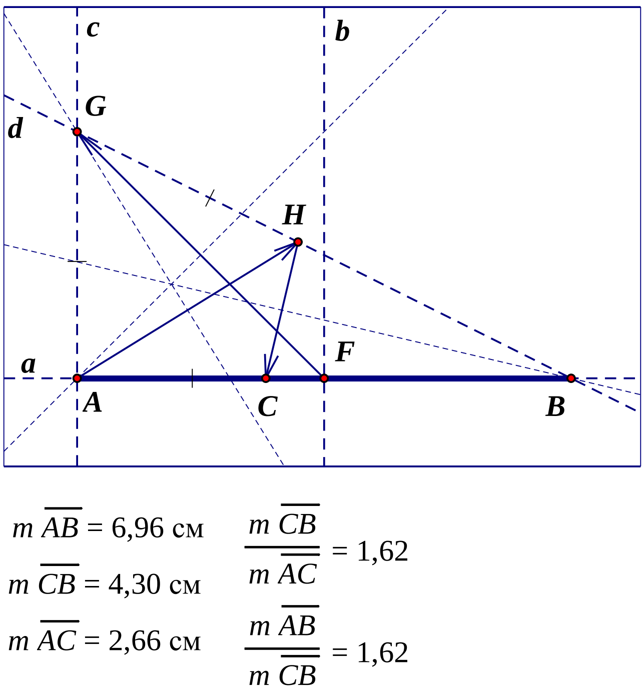


Рисунок 2.18

Для деления отрезка в золотом отношении используем прямоугольный лист бумаги. План построения (рис 2.18):

а) Наметим точки A и B (концы

отрезка). По правилу Ф1 осуществим сгиб, проходящий через точки A и B. Получим прямую a, на которой находится отрезок AB.

б) По правилу Ф2 совместим точки A и B, получим прямую b. Точку пересечения прямых a и b назовем F.

в) Проведем прямую $c \perp a$. Для этого по правилу Ф4 построим складку, которая проходит через точку A и совмещает прямую a с ней самой.

г) По правилу Ф3 совместим прямые a и c. При этом точка F укажет нам новую точку G на прямой c. Отметим эту точку дополнительным сгибом. Получим равные отрезки AF и AG.

д) По правилу Ф1 построим сгиб, проходящий через точки B и G. Получим прямую d.

е) По правилу Ф5 построим складку, проходящую через точку G и совмещающую точку A с прямой d. Точка A укажет на прямой d точку H. Получим равные отрезки AG и HG.

ж) По правилу Ф5 построим складку, проходящую через точку B и совмещающую точку H с прямой a. Точка H укажет на прямой a точку C. BH = BC.

Докажем правильность данного построения. Путь AB = 1. Тогда AF = $\frac{1}{2}$, так как F - середина AB по построению. Рассмотрим ⊿BAG. Он прямоугольный, так как AG ⊥ AB по построению. AF = AG = $\frac{1}{2}$. Вычислим длину гипотенузы треугольника: GB = $\sqrt{AB^2 + AG^2} = \sqrt{1^2 + \frac{1}{2}^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Так как AG = HG = $\frac{1}{2}$ по построению, то BH = BC = GB - HG = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Следовательно AC = AB - BC = 1 - $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Тогда $\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Аналогично $\frac{AB}{CB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Таким образом, оригами предлагает еще один способ деления отрезка в золотом отношении. Это дает возможность проведения исследования школьников по данной теме в рамках курса по выбору.

Приведенные выше задачи показывают, что метод оригами можно использовать при решении задач по геометрии в средней школе для повышения наглядности и понятности изучаемого материала. Данный метод показывает оригинальные и новые способы решения, дает возможность ученикам проводить математические эксперименты. Компьютерная среда Живая математика устраняет недостатки данного метода (погрешности, возникающие при перегибании бумаги), а так же расширяет возможности по исследованию геометрических фигур.

При решении рассмотренных задач ученики одновременно используют знания по разным темам геометрии: свойства фигур, линий, геометрических тел, с которыми они работают, свойства симметрии. В компьютерной среде Живая математика, учеников может заинтересовать не только измерение равенства углов, сторон, площадей, для проверки правильности гипотезы, но и само построение фигур, возможность создать самостоятельно динамический чертеж, который будет последовательно показывать все действия и перегибания.

Нами была разработана примерная программа курса по выбору «Оригами и Живая математика» для 8-9 классов (Приложение Е). Данная программа рассчитана на 34 часа в год, в соответствии с примерной основной образовательной программой основного общего образования п. 3.1.2. Примерный план внеурочной деятельности. [22].

§2.4. Задачи Всероссийского турнира по экспериментальной математике, решаемые методом оригами, сопровождение в Живой математике.

В настоящее время во многих странах мира, в том числе и в России, проводятся различные конкурсы и турниры по математике, которые содержат задания экспериментального характера. Так, на базе Северного Арктического Федерального университета (САФУ) уже шестой год подряд проходит турнир по экспериментальной математике [18]. Цель турнира – вовлечь любителей математики и учащихся всех возрастов в научное творчество, предоставить им, как отмечается М.В. Шабановой и М.А. Павловой в статье [20], «многообразие экспериментальных методов в математике, возможности компьютерных средств поддержки математической деятельности». В 2020 году турнир получил статус международного, задания для седьмых, восьмых и девятых классов пополнились заданиями и для 5-6 классов.

Во время практики в гимназии №14 в 2019 году я приняла участие в подготовке шести шестиклассников к VI Международному турниру по ЭМ. Для подготовки обучающихся к успешному выполнению заданий турнира нами была разработана и апробирована на практике методика, в основе которой лежит самостоятельное изготовление конкурсантами на базе системы динамической геометрии Живая математика динамических чертежей-тренажёров для большинства типов заданий [13]. Результатом применения этой методики шестью учениками 6 класса на турнире по экспериментальной математике, проходившем 15 февраля 2020 года, стали одно первое, два вторых и три третьих места. Диплом первой степени ученицы Матафановой Анны Евгеньевны размещен в Приложении F.

В задания турнира, как правило, включают задачи, решаемые с помощью перегибания листа бумаги. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 1: *Из листа бумаги вырезан круг. Назовем треугольник вписанным в круг, если все его вершины лежат на границе круга, т.е. на его окружности. Нужно восстановить перегибанием вписанный в него треугольник, если известно положение лишь одной из его вершин и середина противоположной стороны (рис. 2.19).*

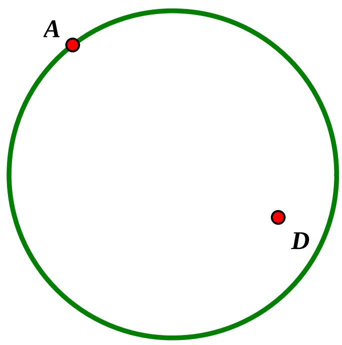


Рисунок 2.19

Данная задача была предложена учащимся 8 класса на Всероссийском конкурсе по экспериментальной математике в Институте математики, информационных и космических технологий ФГАОУ ВО Северного (Арктического) Федерального университета им. М.В. Ломоносова в марте 2017 года. В статье [33] мы предложили алгоритм решения данной задачи в стиле экспериментальной математики.

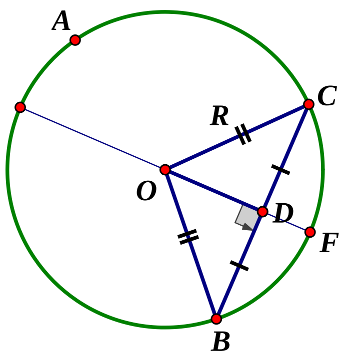


Рисунок 2.20

Обсудим предлагаемый алгоритм. Вначале проведём анализ, предположив, что задача решена. Пусть точка A лежит на окружности, а точка D – середина стороны BC (рис. 2.20). Решение задачи сводится к нахождению хорды BC. Проведем через точку D диаметр и рассмотрим треугольник BOC. Он будет равнобедренным, так как OB и OC равны радиусу окружности. Отрезок OD по является одновременно медианой и высотой. Поскольку правила (аксиомы) оригаметрии позволяют построить прямую перпендикулярную любому отрезку и проходящую через любую точку (в нашем случае через точку O), то алгоритм решения нашей задачи будет состоять из следующих этапов:

а) нахождения центра O окружности;

б) перегибания окружности по прямой, содержащей точки O и D для нахождения диаметра;

в) перемещения вспомогательной точки F по диаметру до тех пор, пока на сгибе не окажется точка D (данный сгиб и будет являться искомой хордой);

перегибания окружности через точку A и B, A и C.

Нами в среде Живая математика разработан учебный анимационный фильм-презентация, демонстрирующий в режиме реального времени процесс поэтапного решения данной задачи. Подготовлен алгоритм создания презентации, который вполне по силам восьмиклассникам.

Виртуальные циркуль и линейка, а также отдельные анимационные опции Живой математики позволяют создать эффект динамического перегибания круга пополам для нахождения центра и построения искомого треугольника. Для этого необходимо использовать осевую симметрию и такие опции Живой математики, как построение дуги, сегмента, а также инструмент *Правка –>Кнопки–>Перемещение* [35].

При решении данной задачи, ученики не лишены возможности проявлять инициативу, высказывать собственные идеи и способы их реализации. Таким образом, задача может быть решена более наглядно и интересно. А ее динамическое сопровождение даст возможность школьникам тренировать свое образное воображение. Так же в таком способе предоставления материала есть возможность исключить не всегда понятное отдельным ученикам традиционное схематическое изображение этапов решения.

Задача 2. Данная задача была предложена учащимся 8 класса на турнире по экспериментальной математике в 2015 году:

Возьмите лист бумаги с неровными краями. На нем произвольно отметьте три точки А, В и С. Перегибанием листа бумаги найдите центр окружности, проходящей через эти три точки. Обоснуйте правильность построений (рис. 2.21).

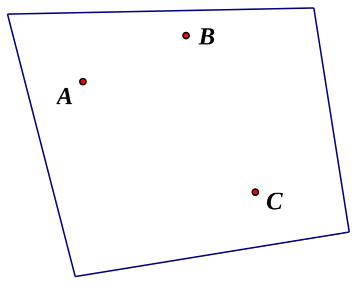


Рисунок 2.21

Вспомним, что центром окружности называется точка, которая находится на одинаковом расстоянии от любой точки окружности. О - точка равноудаленная от каждой пары точек А и В, В и С по определению окружности. Множество точек плоскости, равноудаленных от двух данных - серединный перпендикуляр к отрезку. Линии сгиба являются серединными перпендикулярами к отрезкам АВ и ВС, поэтому точка О определяется как точка их пересечения. Таким образом, алгоритм решения задачи будет состоять из следующих этапов:

а) По правилу Ф2 совместим точки А и В. Полученная складка *а* будет являться серединным перпендикуляром к отрезку АВ.

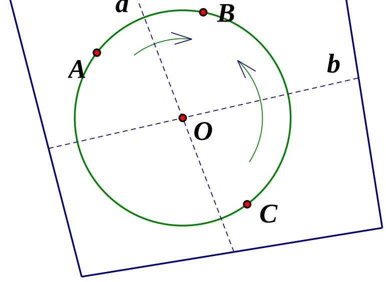


Рисунок 2.22

б) По правилу Ф2 совместим точки В и С. Полученная складка *b* будет являться серединным перпендикуляром к отрезку ВС.

Точка пересечения линий сгибов - центр окружности, проходящей через точки А, В и С (рис. 2.22).

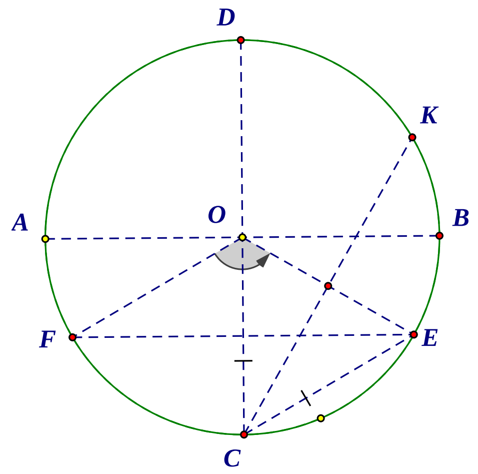


Рисунок 2.23

Задача 3. (9 класс): Предложите как можно больше способов перегибания вырезанного из бумаги круга, в результате которого он линиями сгиба разделится на три равновеликие фигуры. Обоснуйте правильность построений. Рассмотрим один из способов:

а) Перегнем круг пополам по правилу Ф1, получим сгиб, на концах которого расположены точки А и В (рис. 2.23);

б) По правилу Ф2 совместим точки А и В: CD⊥AB, AB ∩ CD = O.

в) По правилу Ф5 построим складку, проходящую через точку С и совмещающую точку О с точкой на окружности. Точка О укажет на окружности точку Е. CE = CO, CK - линия сгиба.

г) По правилу Ф5 построим складку, проходящую через точку D и совмещающую точку Е с точкой на окружности. Точка Е укажет на окружности точку F. OE = OF, CD - линия сгиба.

Получили 3 сектора с углами 120° при вершине О.

§2.5. Апробации результатов исследования

Основные результаты исследования обсуждались на:

1. II Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников «Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы» в рамках XVIII Международного научно-практического форума студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука XXI века» (Красноярск, КГПУ, 18 мая 2017 г.);

2. III Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников «Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы» в рамках XIX Международного научно-практического форума студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука XXI века» (диплом I степени) (Красноярск, КГПУ, 18 мая 2018 г.);
3. II Международной научной конференции «Информатизация образования и методика электронного обучения» (Красноярск, СФУ, 25 - 28 сентября 2018 г.);
4. VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции «Информационные технологии в математике и математическом образовании» в рамках VIII Международного научно-образовательного форума «Человек, семья и общество: история и перспективы развития», посвященной 80-летию профессора Ларина Сергея Васильевича (Красноярск, КГПУ, 13 -14 ноября 2019 г.);
5. V Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников «Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы» в рамках XXI Международного научно-практического форума студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука XXI века» (Красноярск, КГПУ, 28 апреля 2020 г.).

В 2018 - 2019 годах нами были проведены пробные занятия по решению задач методом оригами в школе №46 города Красноярска.

В 7 классе было проведено два занятия по следующим темам:

- точка, прямая, пересекающиеся прямые; построение перпендикуляра к прямой; построение параллельных прямых; деление отрезка пополам; построение биссектрисы угла, изучение свойств медианы треугольника;
- теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей;

В 8, 9 классе было проведено два занятия:

- изучение свойств медианы треугольника;
- построение в квадратном листе бумаги равностороннего треугольника, имеющего с квадратом ровно одну общую вершину.

Занятия включали в себя следующие этапы:

1. Постановка задачи;
2. Решение задачи методом перегибания листа бумаги;
3. Исследование задачи в компьютерной среде Живая математика;
4. Аналитическое доказательство правильности решения задачи методом оригами;
5. Поиск других методов решения задачи и доказательств.

Среда Живая математика использовалась для:

а) исследования задачи: точных построений и измерений длин, углов, отношений сторон. При исследовании использовалась ручная анимация, позволяющая менять вид треугольника, размер и т.д.;

б) показа GSP-файлов для визуализации способа построения решения задач методом оригами. Данная цветная анимация была заранее создана учителем;

в) для учеников, которые быстро справлялись с заданием была организована дополнительная работа по созданию GSP-файла, воспроизводящего анимацию перегибания квадратного листа бумаги.

Рассмотрев возможности среды Живая математика в качестве средства компьютерного сопровождения решения задач методом оригами мы пришли к выводу, что данная среда не только предоставляет возможности ученикам проводит виртуальные эксперименты, эквивалентные экспериментам с бумагой, но дающие большую точность измерений и вычислений. Так же данная программа может использоваться для создания динамических алгоритмов к задачам самими учениками для повышения их интереса к экспериментальной деятельности.

До начала занятий, ученики 7 и 8, 9 класса заполнили опросный лист, разработанный нами (см. Приложение А). Только около 28% учеников 7 класса отметили математику как интересный предмет. После проведения внеурочных занятий по оригами в стиле экспериментальной математики примерно 55% учеников отметили математику, как интересный предмет, на котором можно проводить эксперименты. Причем уровни познавательного интереса учеников 7 класса распределились следующим образом (см. Приложение G, Диаграмма G.1).

При заполнении опросного листа после уроков оригами ученики меньше стали выбирать ответ: «На уроках математики скучно и неинтересно», «Мне не интересны эксперименты по математике», «Не люблю решать задачи». У учеников появился положительный опыт проведения математического эксперимента, поэтому они чаще выбирали ответ: «У меня был опыт проведения компьютерного математического эксперимента. Он показался мне очень наглядным. Было интересно».

Около 33% учеников 8, 9 классов до занятий по оригами отметили математику, как интересный предмет. После математических опытов с бумагой и проведения компьютерных экспериментов с среде Живая математика 57% учеников отметили математику, как интересный предмет, на котором можно проводить эксперименты. Повышение уровня познавательного интереса обучающихся после занятий отражено в Приложении G на Диаграмме G.2.

После занятий по оригами ученики чаще стали выбирать ответы: «Математика – это сложный предмет, но я пытаюсь в нем разобраться», «Математика для меня – это предмет, на котором можно проводить различные эксперименты, устанавливать закономерности, самостоятельно делать выводы и открывать новые факты об окружающем мире».

Таким образом, изучив опросные листы и построив диаграммы, отражающие влияние пробных занятий по оригами на уровни познавательного интереса обучающихся, мы пришли к выводу, что решение задач методом оригами с использованием компьютерной анимации будет способствовать формированию интереса обучающихся к экспериментальной деятельности.

Заключение

Изучив научно-методическую литературу по математике, мы пришли к выводу, что в настоящее время в школьном обучении математике, на кружках и курсах по выбору все чаще стали проводиться исследования в стиле экспериментальной математики, которые предусматривают использование компьютерных программ. Поэтому перед педагогическим сообществом стоит цель: разработать программы использования экспериментальных методов при обучении математики, которые будут способствовать развитию в школьниках таких качеств, как самостоятельность, способность анализировать ситуацию и принимать решения, способность нестандартно мыслить.

Всем известно, что одним из главных условий осуществления деятельности, достижения определенных целей в любой области является мотивация. А в основе мотивации лежит, как говорят психологи, потребности и интересы личности. Следовательно, чтобы добиться хороших успехов в обучении школьников математике, необходимо делать обучение желанным процессом. Для формирования познавательного интереса к экспериментальной деятельности мы предлагаем курс по выбору, деятельность которого заключается в проведении геометрических экспериментов с бумагой и дальнейшем перенесении их в компьютерную среду Живая математика.

В результате изучения психолого-педагогической и методической литературы, мы пришли к выводу, что задачи, решаемые методом оригами, способствует повышению интереса обучающихся к математике благодаря возможности проводить вещественный, доступный эксперимент, при котором ученик развивает оба полушария своего головного мозга, создает объект своими руками.

Решение задач методом оригами гармонично сочетается с компьютерным методом решения, так как у учеников появляется возможность сравнить вещественный и виртуальный эксперимент. Школьник может оценить все достоинства и недостатки данных методов, сделать собственные открытия, научиться анализировать задачу, проводить предварительное теоретическое рассуждение.

Для перенесения математического эксперимента в компьютерную среду Живая математика нами были созданы виртуальные инструменты для построений оригами, так же разработано примерное содержание кружка «Оригами» для 7 класса и курса по выбору «Оригами и Живая математика» для 8-9 классов. Предложена методика работы с задачами и теоремами средней школы, которая соответствует характеру ведущей формы познания для учеников данного возраста.

При проведении занятий по оригами и перенесении эксперимента в среду Живая математика, нами была использована компьютерная анимация для визуализации алгоритмов решения задач методом оригами. Это позволило сделать алгоритм более наглядным, красочным, понятным. Ученикам может быть предоставлена возможность под руководством учителя создать собственную цветную анимацию перегибания листа бумаги, что так же являлось для них увлекательным экспериментом.

Проведенный нами опрос показал, что после проведения пробных занятий курса, многие ученики перестали считать математику скучной теоретической наукой. Таким образом, мы сделали вывод, что разработанная нами методика решения задач геометрии с использованием оригами и компьютерной среды Живая математика способствует повышению познавательного интереса школьников к экспериментальной деятельности на уроках математики.

Таким образом, поставленные задачи исследования нами решены, цель исследования достигнута.

Список использованных источников

1. Абдулкин В.В., Калачева С.И., Кейв М.А., Ларин С.В., Майер В.Р. Компьютерная анимация в обучении математике в педагогическом вузе; монография [Электронный ресурс]. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2019. 169 с.
2. Ананьев Б.Г. Человек как предмет познания // Изб. психол. труды в 2-х т. М.: Педагогика, 2001. 230 с.
3. Арнольд В. И. Экспериментальная математика. М.: МЦНМО, 2018. 184 с.
4. Атанасян Л.С. Геометрия. 7 - 9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. М. : Просвещение, 2010. 384 с.
5. Баландин М. Ю. Аксиоматика Фудзиты и геометрические построения. 2015. URL: http://blog.balandin.guru/wp-content/uploads/2016/06/Оригами-Фудзиты.pdf (дата обращения: 18.05.2018).
6. Беляев М.Ф. Психология интереса. М. : Просвещение, 1977. 583 с.
7. Бурбаки Н. Архитектура математики. Очерки по истории математики : под ред. К. А. Рыбникова : пер. И. Г. Башмаковой. М.: ИЛ, 1963. 258 с.
8. Весновская О.В. Методика использования оригами в изучении геометрии школьного курса // Ярославский педагогический вестник. 2010. №2.С. 88-93.
9. Весновская О.В., Симолкин А.Ю. Учебная деятельность учащихся в процессе изучения курса «Геометрия и оригами» // Вестник Чувашского университета. 2006. №3. С. 302-308.
10. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. М.: Либроком, 2010. 336 с.
11. Далингер В.А. Познавательный интерес учащихся и его развитие в процессе обучения математике // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2011. №3-1. С. 131-137.
12. Иванова Т.Г. Педагогические условия формирования познавательного интереса у учащихся 5-9 классов при обучении математике : Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. Чебоксары, 2009. 22 с.

13. Исаева Д.Э., Чепикова Е.Ю. Живая математика как средство подготовки обучающихся основной школы к турнирным испытаниям по экспериментальной математике // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы V Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Красноярск, 28 апреля 2020 г. С. 171 - 174.
14. Майер В.Р., Чепикова Е.Ю. Об экспериментальном подходе к изучению геометрии с использованием решения задач методом оригами // Информатизация образования и методика электронного обучения: материалы II Международной научной конференции. Красноярск, 25 - 28 сентября 2018 г. В двух частях, часть 2. С. 159 - 162.
15. Майер В.Р., Чепикова Е.Ю. Геометрические построения методом оригами как средство формирования исследовательских умений обучающихся // Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 80-летию профессора Ларина Сергея Васильевича. Красноярск, 13–14 ноября 2019 г. В двух частях. Часть 1. С. 88 - 94.
16. Мандражи О., Федунов М. Оригами как новая математическая теория // Математика. Все для учителя. 2013. №7(31). С. 35 - 38.
17. Мерлина Н.И. Дополнительное математическое образование школьников и современная школа (Состояние. Тенденции. Перспективы). М.: Гелиос АРВ, 2000. С 19 - 42.
18. Официальный сайт Турнира по экспериментальной математике. URL: http://itprojects.narfu.ru/turnir/index.php (дата обращения: 05.06.2020).

19. Павлова М.А., Шабанова М.В. Сократовский диалог как метод исследовательского обучения экспериментальной математике на занятиях кружка // Ярославский педагогический вестник. 2015. №5. С. 80 - 85.
20. Павлова М.А, Шабанова М.В. Турнир по экспериментальной математике: опыт подготовки и проведения. Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 2015. С. 83–88.
21. Пискунов А. И. История педагогики и образования. От зарождения воспитания в первобытном обществе до конца XX в.: Учебное пособие для педагогических учебных заведений. М., 2001, 512 с.
22. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. URL: https://fgosreestr.ru/ (дата обращения 03.06.2020).
23. Рыбников К.А. История математики: учебник. М.:Изд-во МГУ, 1994. 496с.
24. Савин А. Число Фидия - золотое сечение // "Квант" : Научно-популярный физико-математический журнал (издается с января 1970 года), 1997. № 6. С. 32-33.
25. Сергеева Т.Ф., Шабанова М.В., Гроздев С.И. Основы динамической геометрии : монофафия. М.: АСОУ, 2016. 152 с.
26. Сергеев И.Н., Олехник С.Н, Гашков С.В. Примени математику. М: Наука, 1990. 240 с.
27. Смирнова И.М. Критерии отбора содержания математических курсов по выбору // Наука и школа, 2014. №3. С. 7 - 13.
28. Степанова Т.А. Теория алгоритмического мышления: учебное пособие для магистрантов, учителей общеобразовательных учреждений, преподавателей вузов. Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2014. 72 с.
29. Сундара Р. Геометрические упражнения с куском бумаги. М.: Вузовская книга, 2013. – 114 с.

30. Травин И.В. Сапоровская В.Д. Методические рекомендации по курсу возрастной психологии: для непсихологических специальностей : учебно-методическое пособие. Кострома: Изд-во КГУ им. Н. А. Некрасова, 2008. 22 с.
31. Ушинский К.Д. Педагогические сочинения: В 6 т. Т. 5 / Сост. С.Ф. Егоров. М.: Педагогика, 1990. – 528 с
32. Чепикова Е.Ю. Оригаметрия как одно из направлений экспериментального подхода к изучению геометрии // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы: материалы III Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Красноярск, 18 мая 2018 г. С. 238 - 242.
33. Чепикова Е.Ю. Решение задач оригаметрии с использованием среды «Живая математика» // Современная математика и математическое образование в контексте развития края: проблемы и перспективы. Материалы II Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Красноярск, 18 мая 2017 г. С. 285 - 289.
34. Шабанова М.В., Овчинникова Р.П, А.В. Ястребов А.В. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография. М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016. 300 с.
35. Шабат Г.Б., Чернявский В.М, Кулагина В.В. Живая Математика 5.0: Сборник методических материалов. М.: ИНТ, 2013. 205 с.
36. Щукина Г.И. Педагогические проблемы формирования познавательного интереса учащихся. М.: Просвещение, 1988. 208 с.
37. Щукина, Г.И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе. – М.: Просвещение, 1979. 160 с.
38. Экспериментальная математика: учеб. пособие / под общ. ред. М.А.Павловой. Архангельск: Изд-во АО ИОО, 2017. 184 с.

39. Huzita Humiaki Axiomatic Development of Origami Geometry / Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology. Humiaki Huzita, ed., 1989. pp. 143 – 158.
40. Lang R. J. Origami and Geometric Constructions. URL : https://langorigami.com/wp-content/uploads/2017/09/origami_constructions.pdf (дата обращения 01.11.19)

Приложение А

Опросник «Математика – это интересно?»

1. Интересно ли тебе на уроках математики?

На уроках математики скучно и неинтересно. (0)

Математика – это сложный предмет, но я пытаюсь в нем разобраться. (1)

Математика – интересный, увлекательный предмет. (2)

2. Нравится ли тебе решать задачи по математике?

Не люблю решать задачи. (0)

Не умею самостоятельно решать задачи. (0)

У меня получается решать задачи по математике, если они не сложные. (1)

Мне нравится решать трудные задачи, это как игра. (2)

3. Сложно ли тебе понять новую тему по математике?

Имею серьезные пробелы в знаниях по предмету за предыдущие годы, что мешает усвоить новый материал. 0

Надо много запоминать механически, а у меня плохая память. (1)

Легко запоминаю материал по математике, когда понимаю смысл математического понятия и его практическое применение. (2)

4. Зачем нужно учить предмет "математика"?

Я не вижу смысла в ее изучении, мне кажется, что изучать математику не нужно. (0)

Математика нужна при решении практических задач. (1)

При изучении математики повышается точность рассуждений, предоставляется возможность научиться строго доказывать, делать выводы. (2)

5. Связана ли математика с окружающим миром?

Математика для меня – это теоретический предмет, на котором необходимо запоминать формулы, теоремы и уметь ими воспользоваться. (0)

Математика для меня – это предмет, который развивает мою память и логику. Но в жизни он пригождается редко. (1)

Математика для меня – это предмет, на котором можно проводить различные эксперименты, устанавливать закономерности, самостоятельно делать выводы и открывать новые факты об окружающем мире. (2)

6. Проводил ли ты математический эксперимент?

Мне не интересны эксперименты по математике. (0)

Я не могу представить, какой эксперимент можно провести по математике. (0)

Я бы хотел провести математический эксперимент, но такой возможности у меня еще не было. (1)

У меня был опыт проведения математического эксперимента, но он меня не увлек. (0)

Я проводил математический эксперимент. Мне было очень интересно, я открыл для себя много нового. (1)

7. Есть ли у тебя опыт по проведению компьютерного математического эксперимента?

Между предметом математика и ЭВМ нет никакой связи. (0)

Я знаю о существовании различных компьютерных сред, в которых можно проводить математические эксперименты, но у меня не было опыта проведения такого эксперимента. (1)

Я уже проводил компьютерный эксперимент по математике, но он меня не увлек. (0)

У меня был опыт проведения компьютерного математического эксперимента. Он показался мне очень наглядным. Было интересно. (1)

8. Знаешь ли ты о математических экспериментах по перегибанию листа бумаги (оригами)?

Нет, мне не интересно, что такое оригами. (0)

Да, я знаю что такое оригами, но оно вряд ли связано с математикой. (1)

Да, я знаю, что при помощи перегибаний листа бумаги можно решать задачи по геометрии и доказывать различные теоремы. (2)

9. Хотел бы ты посещать математический кружок оригами?

Хотел бы попробовать. (1)

Мне это не интересно. (0)

Хочу посещать регулярно, это очень интересно. (1)

Обработка результатов:

Ученик выбирает единственный ответ на каждый вопрос, который оценивается определенным количеством баллов. Сумма баллов по всем вопросам – уровень познавательного интереса к экспериментальной математике. Уровень интереса в зависимости от набранного количества баллов представлен в таблице А.1.

Таблица А.1. Уровень познавательного интереса

Уровень интереса	Низкий	Средний	Высокий
Баллы	0 - 5	6 - 10	11 - 15

Низкий уровень познавательного интереса к экспериментальной математике и к математике в целом: 0 - 5 баллов. Ученику не интересен предмет "математика", он испытывает сложности при его изучении. Ему не интересны эксперименты либо он не имеет опыта экспериментальной деятельности по математике.

Средний уровень познавательного интереса к экспериментальной математике и математике в целом: 6 - 10 баллов. Ученик понимает необходимость изучения предмета "математика". Ему интересно решать задачи в том случае, когда все понятно. Однако не склонен к творческой деятельности, проведению экспериментов либо не имеет опыта экспериментальной деятельности.

Высокий уровень: 11-15 баллов. Предмет математика интересен ученику. Он готов к экспериментальной деятельности, любознателен.

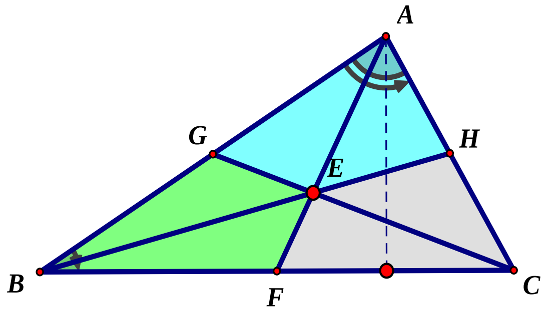
Приложение В

Таблица 1. Содержание кружка «Оригами»

Название модуля, темы	К-во часов	Содержание кружка
Знакомство с оригами.	4 час.	История возникновения и развития оригами. Условные знаки, принятые в оригами, и основные приемы складывания. Используемая терминология. Построение фигур в технике оригами.
Основные построения с помощью оригами.	6 час.	Точка и прямая. Почему именно прямая? Пересекающиеся прямые. Смежные и вертикальные углы. Построение перпендикуляра к прямой. Перпендикулярные прямые. Построение прямой, параллельной данной. Параллельные прямые. Деление отрезка пополам с помощью оригами. Построение биссектрисы угла с помощью оригами.
Геометрия треугольника с помощью оригами.	6 час.	Виды треугольников и их свойства, замечательные точки и линии в треугольнике, признаки равенства треугольников, сумма углов треугольника. Доказательство с помощью оригами.
Освоение приема «циркуля» с помощью оригами	2 час.	Центр круга. Задания на нахождение центра круга с помощью оригами. Пересечение окружности с прямой. Способ нахождение точек пересечения с помощью оригами.

Приложение С

***Рисунок С.1.* Изучение свойств медианы треугольника в компьютерной среде Живая математика**



$m\,\overline{AE} = 2{,}68$ см $m\,\overline{EC} = 3{,}47$ см

$m\,\overline{EF} = 1{,}34$ см $m\,\overline{GE} = 1{,}73$ см

$\dfrac{m\,\overline{AE}}{m\,\overline{EF}} = 2{,}00$ $\dfrac{m\,\overline{EC}}{m\,\overline{GE}} = 2{,}00$

$m\,\overline{EB} = 4{,}60$ см

$m\,\overline{HE} = 2{,}30$ см $m\angle ABC = 32{,}60°$

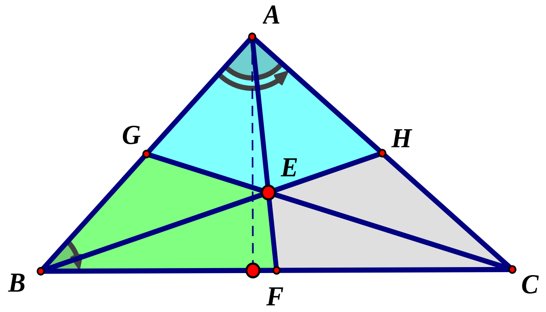
$m\angle BAC = 87{,}22°$

$\dfrac{m\,\overline{EB}}{m\,\overline{HE}} = 2{,}00$

Площадь *EGAH* = 4,62 см^2

Площадь *EHCF* = 4,62 см^2

Площадь *BGEF* = 4,62 см^2



$m\,\overline{AE} = 2{,}42$ см $m\,\overline{EC} = 4{,}16$ см

$m\,\overline{EF} = 1{,}21$ см $m\,\overline{GE} = 2{,}08$ см

$\dfrac{m\,\overline{AE}}{m\,\overline{EF}} = 2{,}00$ $\dfrac{m\,\overline{EC}}{m\,\overline{GE}} = 2{,}00$

$m\,\overline{EB} = 3{,}91$ см

$m\,\overline{HE} = 1{,}96$ см $m\angle ABC = 46{,}13°$

$m\angle BAC = 93{,}48°$

$\dfrac{m\,\overline{EB}}{m\,\overline{HE}} = 2{,}00$

Площадь *EGAH* = 4,62 см^2

Площадь *EHCF* = 4,62 см^2

Площадь *BGEF* = 4,62 см^2

Приложение D

Построения трисекции угла

Разбить заданный угол на три равных угла.

Для решения данной задачи нам потребуется квадратный лист бумаги.

На первом этапе решения задачи учитель просит учеников самостоятельно построить искомый угол. Однако, предлагает и свой вариант построения (рисунок 2.3):

1. На стороне BC наметим произвольную точку O. Строим складку AO по Ф1. Разобьем угол OAD на три равных угла.
2. На стороне AB наметим произвольную точку E. Построим складку EF по Ф4.
3. По Ф2 построим складку, которая будет совмещать точку E с точкой A и точку F с точкой D.
4. Построим складку LL' по Ф6 (складку, которая будет совмещать точку E с прямой AO и точку A с прямой GH).
5. Пересечение точки A с прямой GH указывает точку A' . Складка AA', полученная по правилу Ф1, отделяет от угла OAD 1/3 часть.
6. Пересечение складок LL' и GH указывает точку G'. Складка AK, полученная по правилу Ф1, отделяет от угла OAD 1/3 часть.

Таким образом ∠OAK = ∠KAA' = ∠A'AD.

После проведения эксперимента ученики могут измерить полученные углы и убедиться в их равенстве. Однако бумага при осуществлении сгибов,

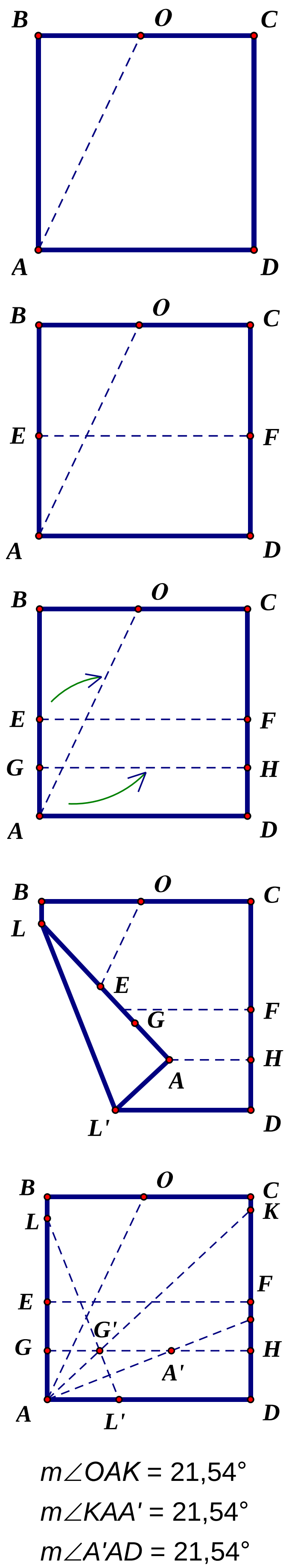


Рисунок 2.3

дает определенную погрешность и углы могут оказаться неравными. Поэтому учитель предлагает перенести эксперимент в компьютерную среду.

При построении компьютерного решения данной задачи целесообразно воспользоваться заранее заготовленными нами инструментами, так как стандартные инструменты Живой математики для построений (циркуль и линейка) не смогут справиться с задачей. Сложность возникнет при построении п. 4. с помощью правила Ф6.

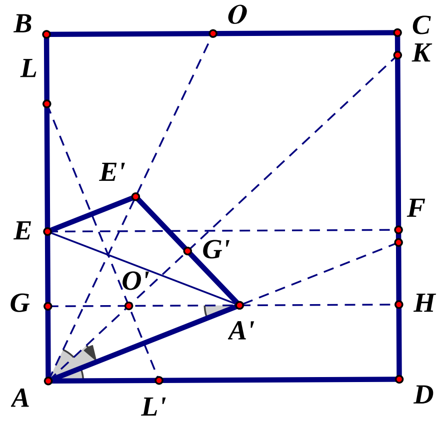


Рисунок D.1

Таким образом, используя виртуальные инструменты, ученики смогут решить в компьютерной среде задачу о трисекции угла и точно установить равенство всех трех углов.

Следующим этапом станет аналитическое доказательство построения трисекции угла.

Рассмотрим трапецию AEE'A' (рисунок D.1). По построению она равнобедренная, так как точки E' и A' симметричны точкам E и A относительно оси LL'. Следовательно EA'=E'A.

Рассмотрим треугольник EA'A. Он равнобедренный по построению (GA' перпендикулярна EA, GA' - середина EA). Следовательно EA' = AA'.

Так как EA'=E'A, EA' = AA', то E'A= AA'. Рассмотрим треугольник E'AA'. Он равнобедренный, так как E'A= AA' и E'A' перпендикулярна AK по построению. Следовательно ∠E'AG' = ∠A'AG'.

Рассмотрим треугольник AO'A'. По построению он равнобедренный. ∠O'AA'=O'A'A. По построению GH параллельна AD, следовательно ∠O'A'A =∠A'AD, как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых GH и AD секущей AA'. Так как ∠A'AG'=∠O'AA'=∠E'AG', ∠O'A'A=∠A'AD, то ∠A'AG'=∠E'AG'=∠A'AD.

Приложение Е

Таблица 2. Содержание курса по выбору «Оригами и Живая математика»

Название модуля, темы	К-во часов	Содержание кружка
Знакомство с оригами.	4 час.	История возникновения и развития оригами. Условные знаки, принятые в оригами, и основные приемы складывания. Используемая терминология. Правила Фудзита.
Знакомство с возможностями среды Живая математика.		
Геометрия на плоскости. Построение фигур на плоскости. Метрические соотношения. Площади плоских фигур.	16 час.	Знакомство с инструментами среды Живая Математика: панели «Вид», «Построение», «Измерения», «Числа». Построение геометрических фигур, изучение их свойств в динамике положений и размеров. Решение элементарных задач на построение циркулем и линейкой. Измерение длины, расстояния, периметра, углов, площадей плоских фигур, использование программного калькулятора. Построение линейных движков для управления объектами, кнопок и анимации. Создание собственных инструментов для правил Фудзита.
Решение задач оригами с последующей их реализацией в компьютерной среде Живая математика		
Геометрия треугольника с помощью оригами.	10 час.	Виды треугольников и их свойства. Замечательные точки и линии в треугольнике. Построение медианы треугольника. Точка пересечения медиан треугольника. Построение биссектрисы треугольника. Точка пересечения биссектрис треугольника. Построение высоты треугольника и нахождение точки пересечения высот треугольника. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника. Доказательство с помощью оригами.
Геометрия	8 час.	Прямоугольник, квадрат, параллелограмм,

четырехугольника с помощью оригами		трапеция, произвольный четырехугольник и их свойства. Трисекция прямого угла. Нахождение частей целого: нахождение, части площади квадрата.
Начало есть квадрат.	10 час.	Построение многоугольников с помощью оригами: из квадрата равнобедренный треугольник, равносторонний треугольник в квадрате, правильный треугольник в квадрате, имеющий с ним одну общую вершину, из квадрата правильный пятиугольник, из квадрата правильный шестиугольник, из квадрата правильный восьмиугольник.
Задачи о делении отрезка и угла.	6 час.	Оригами версия метода Дюрера. Индуктивное деление методом Хаги. Золотое сечение. Трисекция произвольного угла.
Геометрия круга.	8 час.	Задания на нахождение центра круга с помощью оригами. Пересечение окружности с прямой. Способ нахождение точек пересечения с помощью оригами. Треугольник, вписанный в круг.
Создание собственной анимации для задач оригами		
Анимация оригами.	6 час.	Из квадрата равнобедренный треугольник, равносторонний треугольник в квадрате, правильный треугольник в квадрате, имеющий с ним одну общую вершину. Трисекция прямого угла.

Приложение F

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

ДИПЛОМ

НАГРАЖДАЕТСЯ

Матафанова Анна Евгеньевна

ученица 6 класса МАОУ Гимназия №14

за 1 место

в мероприятии

«VI Международный Турнир по экспериментальной математике»

на базе

МАОУ Гимназия №14

Директор Высшей школы информационных технологий и автоматизированных систем И. С. Майоров

г. Архангельск

2020 г.

Приложение G

Диаграмма G.1

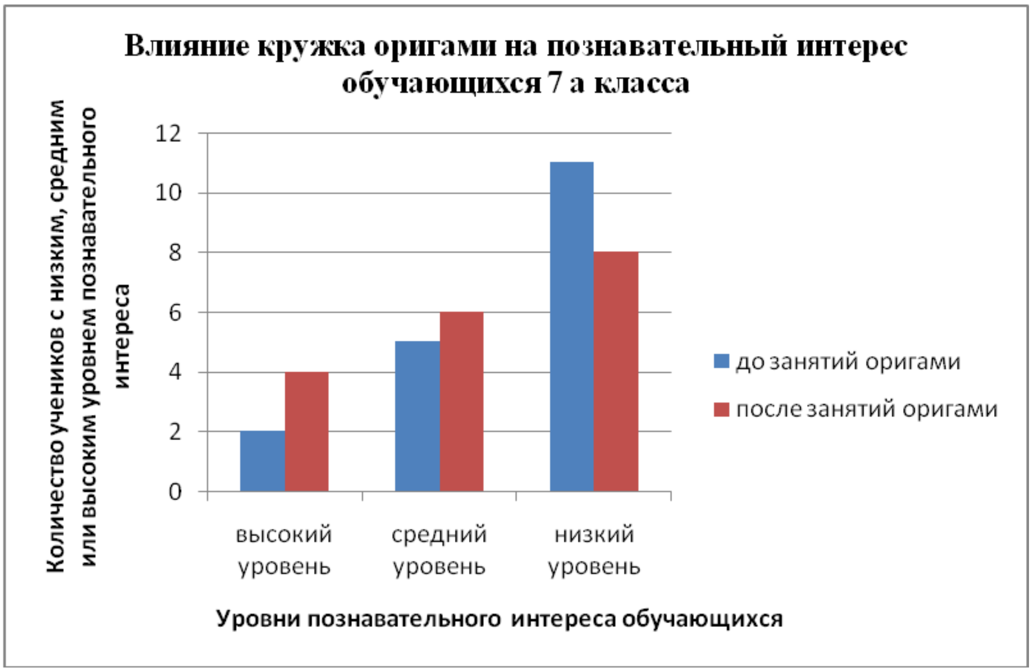


Диаграмма G.2