

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: Математики и методики обучения математике

Новик Виктория Сергеевна
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В ОСВОЕНИИ
ОБУЧАЮЩИМИСЯ ДЕЙСТВИЙ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ
ВЫРАЖЕНИЯМИ ПОСРЕДСТВОМ ВИЗУАЛИЗАЦИИ В ПРОЦЕССЕ
ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ В 7 – 9 КЛАССАХ**

Направление подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность (профиль) образовательной программы: математика и информатика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой д.п.н., профессор Шкерина Л.В.

28.05.2020

(дата, подпись)

Руководитель: к.ф.-м.н., доцент каф. МиМОМ

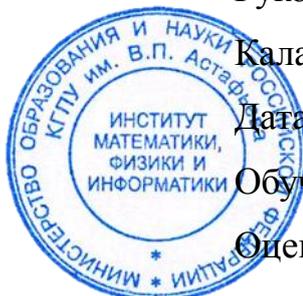
Калачева С.И.

Дата защиты 30.06.2020

Обучающийся Новик В.С.

Оценка _____

прописью



Красноярск 2020

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ	8
§1.1. Рациональные выражения и структура умений действий с рациональными выражениями.....	8
§1.2. Роль и место темы рациональных выражений в школьном курсе математики.....	14
§1.3. Значение и способы визуализации в обучении школьников математике	24
Вывод по главе I.....	31
Глава II. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ВИЗУАЛЬНЫХ ОБРАЗОВ К РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ ДЕЙСТВИЯМ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ	32
§2.1. Исследование актуального уровня сформированности умения действий с рациональными выражениями у обучающихся 9 класса.	32
§2.2. Результаты проверки уровня сформированности умения действий с рациональными выражениями.....	42
§2.3. Способы реализации преемственности в обучении школьников действиям с рациональными выражениями с помощью визуальных образов	46
Вывод по главе 2	56
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	58
Библиографический список	60
Приложение 1	64
Приложение 2	66

ВВЕДЕНИЕ

Линия преобразований математических выражений является одной из основных содержательных линий школьного курса алгебры. Она является постоянной частью программы и проходит через весь курс школьной математики, начиная с начальной школы, и продолжая свой путь в старших классах.

Математические выражения делятся на следующие виды: рациональные, дробно-рациональные, иррациональные, тригонометрические. Первый из них является основой для изучения всех последующих видов математических выражений. Именно от того, как будет сформировано у обучающихся умение выполнять действия над рациональными выражениями, и зависит, как будет формироваться умение выполнения действий над другими видами математических выражений и умения их применять в различных задачах.

Актуальность дипломной работы обусловлена тем, что у школьников уровень сформированности умения выполнять действия над рациональными выражениями развит на невысоком уровне, а это является основой для того, что в дальнейшем при изучении алгебры и смежных ей дисциплин у обучающихся возникают трудности.

Для успешного формирования умения выполнения действий над рациональными выражениями необходимо подбирать такие методы обучения, которые бы приводили к нужным результатам. В нашем случае этого можно достичь, визуализируя изучаемый материал.

Проблема развития учебных способностей школьников всегда являлась одной из наиболее актуальных. Чем полнее будут реализованы потенциальные возможности школьника, тем больших успехов личность сможет добиться в жизни. Одной из эффективных технологий активизации обучения является метод визуализации учебной информации. В последние десятилетия в области передачи визуальной информации произошли

революционные изменения: возрос объем передаваемой информации, возникли новые виды визуальной информации, а также способы ее передачи.[2] Технический прогресс и формирование новой визуальной культуры неминуемо накладывает свой отпечаток на свод требований, предъявляемых к деятельности педагогов. Визуализация помогает учащимся правильно организовывать и анализировать информацию, развивает критическое мышление, помогает учащимся интегрировать новые знания, позволяет связывать полученную информацию в целостную картину о том или ином явлении или объекте. Диаграммы, схемы, рисунки, карты памяти, опорные конспекты, презентации, видеоролики, интеллект-карты, ментальные карты способствуют усвоению больших объемов информации, легко запоминать и прослеживать взаимосвязи между блоками информации.[5]

По типу восприятия информации люди делятся на аудиалов, кинестетиков и визуалов. В ходе исследований психологами выявлено, что 80% школьников являются визуалами, а 20% разделяют аудиалы и кинестетики. Исходя из этого, можно сделать вывод, что для эффективного усвоения школьниками новой информации необходимо использовать принцип визуализации в обучении. [17] Визуализация в общем смысле — метод представления информации в виде оптического изображения (например, в виде рисунков и фотографий, графиков, диаграмм, структурных схем, таблиц, карт и т. д.).[27]

Визуализация — это процесс представления данных в виде изображения с целью максимального удобства их понимания; придание зримой формы любому мыслимому объекту, субъекту, процессу и т. д. Правда такое понимание визуализации предполагает минимальную мыслительную и познавательную активность обучающихся, а визуальные дидактические средства выполняют лишь иллюстративную функцию.

Визуализация учебного материала открывает возможность не только собрать воедино все теоретические выкладки, что позволит быстро воспроизвести материал, но и применять схемы для оценивания степени усвоения изучаемой темы. В практике также широко используется метод анализа конкретной схемы или таблицы, в котором вырабатывают навыки сбора и обработки информации. Метод позволяет включить обучаемых в активную работу по применению теоретической информации в практической работе. [24]

Считается, что зрение обеспечивает человеку около 90 % информации. Рассмотрение изображений позволяет исследовать пространственные структуры, имеющиеся в объекте; распределение оптических плотностей и цветов — отражает важнейшие сведения о свойствах реальных и виртуальных объектов окружающего мира. К основным способам визуального представления функциональных зависимостей, изучаемых в курсе математики средней школы, относят: текстуальный, табличный, аналитический, алгоритмический, графический. [11]

Целью дипломной работы является разработка рекомендаций по применению визуальных средств для организации преемственности в освоении обучающими действий с рациональными выражениями.

Объект исследования — процесс обучения школьников действиям над рациональными выражениями в основной школе средствами визуализации.

Предмет исследования — возможности организации преемственности в освоении обучающимися 7-9 классов действий с рациональными выражениями средствами визуализации.

На пути к достижению поставленной цели представляется целесообразным решить следующие **задачи**:

- изучить структуру действий над рациональными выражениями;

- исследовать школьные учебники для определения объёма изучения преобразований рациональных выражений в 7 классе;
- разработать и провести диагностическую работу в 9 классе для выявления уровня сформированности у обучающихся умения выполнять действия над рациональными выражениями;
- проанализировать результаты проведённой диагностической работы;
- выявить уровень сформированности у обучающихся умения выполнения действий над рациональными выражениями;
- разработать способы визуализации действий над рациональными выражениями для успешного формирования умения.

Гипотеза исследования – актуальный уровень сформированности умения выполнения действий над рациональными выражениями зависит от организации преемственности в освоении действий составляющих данное умение и у обучающихся 7-9 классов находится на невысоком уровне.

В процессе работы были использованы следующие **методы исследования**:

- Теоретический: анализ и обобщение.
- Эмпирический: изучение и анализ психолого-педагогической литературы.

Структура дипломной работы обусловлена предметом, целью и задачами исследования. Работа состоит из введения, двух глав и заключения.

Введение раскрывает актуальность, определяет степень научной разработки темы, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования, раскрывает теоретическую и практическую значимость работы.

В первой главе рассматриваются роль и место рациональных выражений в школьном курсе математики, а также средства и методы

визуализации на уроках математики как средство организации преимущества в изучении материала учебной темы.

Вторая глава посвящена разработке диагностической работы по определению актуального уровня сформированности у обучающихся 9 класса умения выполнения действий над рациональными выражениями. Помимо этого, важной частью второй главы является разработка способов реализации преимущества в обучении школьников действиям с рациональными выражениями с помощью визуальных образов.

В заключении подводятся итоги исследования, формируются окончательные выводы по рассматриваемой теме

Глава I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§1.1. Рациональные выражения и структура умений действий с рациональными выражениями.

Выражением в математике называют запись, состоящую из чисел, букв (обозначающих постоянные или переменные величины), знаков математических действий. [12]

Рациональное выражение – это алгебраическое выражение, в котором содержатся рациональные числа и буквы, а также операции сложения, вычитания, произведения и деления. [18]

Рациональные выражения делятся на два типа: целые рациональные выражения и дробно-рациональные. Целое рациональное выражение это такое выражение, которое может быть составлено из чисел и переменных с помощью знаков сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем с возможным использованием скобок.

Например, к ним можно отнести выражения: $7ab$; $(a - b)^2$; $4a + 9b - 3c$. Если кроме операций, используемых для записи целых рациональных выражений, разрешено также и деление (в том числе и деление на выражения с переменными), то такие выражения называют дробно-рациональными. Например, выражения $\frac{6a}{b}$; $\frac{4}{(a-b)^2}$; $\frac{7a}{c} - \frac{b}{2a} + \frac{3c}{4b}$ – относятся к дробно-рациональным.

Целые рациональные выражения подробно изучаются в курсе алгебры 7-го класса. Здесь такие выражения приобретают название одночлена и многочлена. Также, в 7 классе подробно изучаются различные преобразования рациональных выражений, упрощение и приведение их к стандартному виду. Эти знания необходимы для дальнейшего изучения математических выражений, с которыми ученики сталкиваются в старшей школе и продолжают изучение преобразований таких выражений.

В широком смысле преобразование — это изменение, превращение чего-либо во что-либо другое. [8]

Линия тождественных преобразований является одной из четырех основных содержательных линий школьного курса алгебры (учение о числе, функции, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Она является постоянной частью программы и проходит через весь курс школьной математики. [3]

Основы тождественных преобразований алгебраических выражений закладываются еще в начальной школе (законы арифметических действий), но это изучение носит предварительный характер. В пропедевтическом курсе математики тождественных преобразований немного. Главной целью тождественных преобразований в 5 и 6 классах является подготовка обучающихся к изучению тождественных преобразований многочленов (приведение их к стандартному виду). Как мы уже говорили, систематически и углубленно эти вопросы изучаются в курсе алгебры, начиная с седьмого класса. При изучении тождественных преобразований любого вида выражений необходимо рассмотреть следующие вопросы: теоретические основы преобразований; определение (или описание); виды преобразований. [14]

Изучение тождественных преобразований дает возможность постоянно повторять действия с рациональными числами, что способствует отработке вычислительных навыков, в том числе и техники устных вычислений. Также, в процессе изучения преобразований алгебраических выражений учащиеся овладевают техникой выполнения тождественных преобразований, т.е. учатся свободно выполнять и обосновывать преобразования.

Преобразование рациональных выражений включает в себя применение формул сокращённого умножения (квадрат суммы и разности, разность квадратов, разность кубов, куб суммы и разности), приведение

подобных слагаемых, разложение выражения на множители (методом группировки, методом, вынесением общего множителя за скобку).

Считается, что для успешного усвоения преобразований рациональных выражений, ученик должен владеть понятийным аппаратом, а именно знать такие определения как тождество, тождественное преобразование выражения, одночлен и коэффициент одночлена. Помимо этого важно знать, что такое подобные одночлены, а также, определение понятию «многочлен».

Кроме того, успешному усвоению преобразований рациональных выражений способствует знание видов преобразований и умение применять преобразования над рациональными выражениями. Так, например, сюда мы относим умение приводить подобные слагаемые в рациональном выражении, знание формул сокращённого умножения и умение их применять, знание способов разложения рационального выражения на множители методом группировки и вынесением общего множителя за скобку. Вдобавок ко всему вышеперечисленному, ученик также должен знать правила раскрытия скобок в математическом выражении.

Преобразования рациональных выражений используется не только в тех заданиях, где нужно упростить алгебраическое выражение, но и при решении уравнений или неравенств. А уравнения и неравенства, в свою очередь, могут являться частью решения алгебраической задачи. Так, например, на протяжении всего курса математики при решении задач используется алгебраический метод, суть которого заключается в составлении математической модели, иными словами – уравнения, после чего решение данной задачи сводится к нахождению корней составленного уравнения.

Проанализировав всё вышесказанное, я выделила основные критерии, по которым определяется уровень сформированности у обучающихся преобразований рациональных выражений. Я сгруппировала их следующим образом:

1. Первая группа – «Понятия». По этому критерию определяется уровень сформированности у обучающихся понятийного аппарата, сюда входит знание основных понятий, входящих в тему «Преобразования рациональных выражений», умение дать определение этим понятиям и умение классифицировать данные понятия по темам.
2. Вторая группа – «Преобразования». Данный критерий определяет, на каком уровне ученик знает основные виды преобразований рациональных выражений, а также способен ли ученик подбирать алгоритм преобразований, на каком уровне он умеет выполнять преобразования: использование формул сокращенного умножения, разложение на множители вынесением общего множителя за скобки и методом группировки.
3. Третья группа – «Применение». По данному критерию определяется уровень сформированности у обучающегося применять преобразования рациональных выражений на практике, а именно при решении линейных, квадратных уравнений, уравнений высшей степени, а также решение неравенств первой, второй и повышенной степеней. Также, определяется, умеет ли ученик решать задачи методом составления математической модели в виде уравнения (неравенства) с одной, либо двумя неизвестными, либо в виде систем уравнений (неравенств) с двумя неизвестными, и на каком уровне у него сформировано данное умение.

По результатам изученного я сформулировала основные умения, которыми должен владеть ученик на разных уровнях сформированности, а именно на низком, среднем и высоком уровнях. Уровни сформированности у обучающихся умения преобразовывать рациональные выражения представлены в Таблица 1.

Таблица 1. Уровни сформированности преобразований рациональных выражений

Критерии		Уровни сформированности		
		Низкий уровень	Средний уровень	Высокий уровень
Понятия	1. Знание основных понятий: Тождество Тождественное преобразование выражения Одночлен Коэффициент одночлена Подобные одночлены Многочлен	Без помощи учителя и одноклассников не может дать определение основных понятий.	Может самостоятельно дать определения некоторым понятиям; Даёт определения в понятных для себя формулировках.	Знает основные понятия и правильно даёт им определения; Соотносит понятие с его определением; Умеет дать определение понятия на простом доступном языке и на языке математики. Умеет классифицировать понятия по темам.
	Преобразования	2. Знание и умение применять преобразования: 2.1. Приведение подобных слагаемых 2.2. Формулы сокращённого умножения 2.3. Метод группировки 2.4. Вынесение общего множителя за скобку 2.5. Раскрытие скобок	Без помощи педагога не способен самостоятельно определить алгоритм, по которому следует выполнять преобразования; Не понимает, или плохо понимает, при каких обстоятельствах использовать то или иное преобразование, а именно: формулы сокращённого умножения, разложение на множители (вынесение общего множителя за скобку, метод группировки).	Самостоятельно, но требуя дополнительных указаний со стороны учителя, выполняет преобразования, используя формулы сокращённого умножения, разложение на множители (вынесением общего множителя за скобки, методом группировки).

Применения	3. Умение применять преобразования рациональных выражений в уравнениях и неравенствах.	Допускает ошибки в решении линейных уравнений, Не умеет решать квадратные уравнения и уравнения повышенной степени; Не знает алгоритма составления математической модели в задаче; Без помощи учителя не справляется с решением систем линейных уравнений.	Совместно с педагогом или одноклассниками выполняет решение линейных, квадратных и уравнений повышенной степени; С помощью учителя выполняет решение задачи методом составления математической модели в виде уравнения, либо систем уравнений.	Самостоятельно выполняет решение линейных уравнений, квадратных уравнений, уравнений высшей степени; Успешно находит решение неравенств первой, второй и повышенной степеней; Самостоятельно решает задачи методом составления математической модели в виде уравнения с одной, либо двумя неизвестными, либо в виде систем уравнения с двумя неизвестными.
------------	--	--	--	--

Соотнеся приведённую выше таблицу и ФГОС ООО п.10, можно сделать вывод о том, что формирование умения преобразования рациональных выражений способствует развитию таких метапредметных результатов как:

- умение анализировать поставленную задачу и те условия, в которых она должна быть реализована;
- умение сопоставить содержание указанной задачи с имеющимися знаниями и умениями;
- умение самостоятельно спланировать способы достижения поставленных целей, находить эффективные пути достижения результата, умение искать альтернативные нестандартные способы решения познавательных задач;
- умение рассматривать разные точки зрения и выбрать правильный путь реализации поставленных задач;

- умение оценить свои действия, изменять их в зависимости от существующих требований и условий, корректировать в соответствии от ситуации;
- умение определять суть понятий, обобщать объекты;
- умение создавать схемы и модели для решения различных познавательных или учебных задач. [26]

§1.2. Роль и место темы рациональных выражений в школьном курсе математики.

В каждой области а знаний, которая использует математику, возникает потребность в замене одного выражение другим, для простоты и удобства в решении рассматриваемой задачи. Другими словами, появляется необходимость в выполнении тождественных преобразований. Рассмотрим приведенные ниже упражнения.

1. Упростить выражение: $x^2 + y^3 - 3y^3 + 1,5x^2 - 2,3y^3$
2. Решить уравнение: $4x + 2x + x = 14$;
3. Доказать, что выражение: $\frac{(2k+1)^4-1}{4k^2+4k+2}$, где $k \in \mathbb{N}$, кратно 8 .

Обязательным условием для решения данных упражнений, отличающихся друг от друга по содержанию, является предварительное выполнение тождественных преобразований содержащихся в них выражений. [4]

Еще в начальной школе закладываются основы тождественных преобразований (законы арифметических действий). В пропедевтическом курсе уроков математики начинают отрабатываться навыки тождественных преобразований, такие как:

- a) приведение подобных слагаемых:

- б) раскрытие скобок и заключение в скобки;
- в) вынесение за скобки общего множителя.

Преобразования такого рода продолжают применяться на уроках алгебры при изучении темы «Многочлены» в 7 классе.

Выполнение преобразований учащимися происходит на основе законов и свойств арифметических действий:

- $a + b = b + a$ – коммутативность сложения (переместительный закон сложения);
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ – ассоциативность сложения (сочетательный закон сложения);
- $a \cdot b = b \cdot a$ – коммутативность умножения (переместительный закон умножения);
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – ассоциативность умножения (сочетательный закон умножения);
- $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ – умножение на ноль;
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ – умножение на единицу;
- $a \cdot (b + c) = ab + ac$ – умножение дистрибутивно относительно операции сложения (распределительный закон);
- $a \cdot (b - c) = ab - ac$ – умножение дистрибутивно относительно операции вычитания (распределительный закон);
- если $a = b$, то $b = a$ и $b = c$, то $a = c$ – свойства равенств.[10]

Место рациональных выражений в школьном курсе математики отображено в схеме (Рисунок 1. Математические выражения).

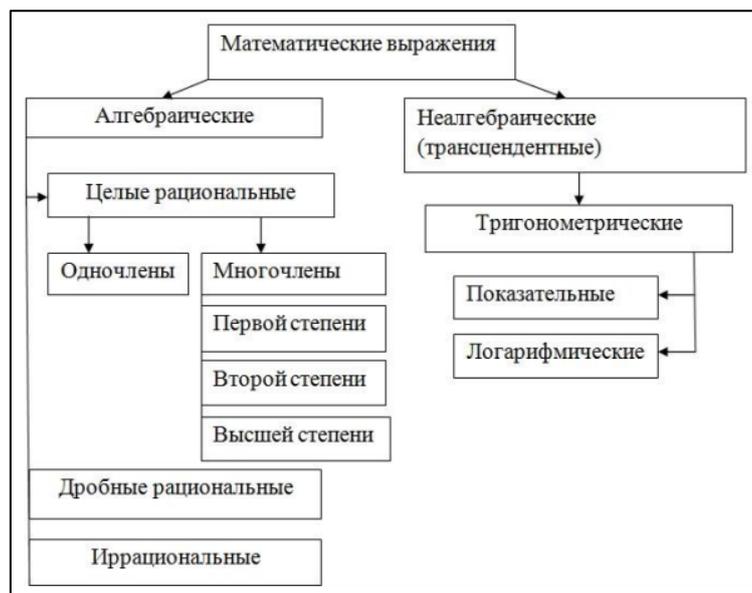


Рисунок 1. Математические выражения

Рациональные выражения встречаются на протяжении всего курса алгебры. Для того чтобы успешно выполнять решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств, а также сложных текстовых задач, необходимо уметь работать с такими выражениями, упрощать их, раскладывать на множители.

Для упрощения рациональных выражений необходимо не только знать формулы сокращённого умножения, но также уметь видеть их там, где, на первый взгляд, ничего нет, уметь их применять. Для рациональных выражений второй степени требуется знать и уметь применять правила разложения квадратного трёхчлена на множители через дискриминант.

Изучение преобразований рациональных выражений служит аналитическим аппаратом при:

- доказательстве теорем и выводе формул;
- решении уравнений, неравенств и их систем;
- упрощении выражений;
- нахождении значений выражений;
- исследовании функций и др. [29]

Для того чтобы определить, в каком объеме изучается вопрос преобразований рациональных выражений, я провела анализ учебников за 7 класс Никольского С. М. и Мерзляка А. Г. (

Таблица 2. Объем изучения преобразований в 7 классе)

Таблица 2. Объем изучения преобразований в 7 классе

	Содержание	Объем учебника С. М. Никольского «Алгебра 7 класс» [19] Ошибка! Источник ссылки не найден.	Объем учебника А. Г. Мерзляка «Алгебра 7 класс» [13]
Понятия	Буквенные выражения. Сумма, разность, произведение и частное алгебраических выражений.	Тема «Рациональные выражения» имеет начало во второй главе «Алгебраические выражения». Перед тем, как перейти к буквенным выражениям, Никольский предлагает тему «Числовые выражения», после чего приводит примеры буквенных выражений, а также затрагивает такие понятия, как сумма, разность, произведение и частное алгебраических выражений. Приведено в пример 4 задачи с подробным решением, после чего предлагается 10 заданий на закрепление.	
	Целые рациональные выражения		Данное определение встречается в самом начале изучения раздела рациональных выражений. Параграф №2 «Целые рациональные выражения» начинается с темы «Тождественно равные выражения».

	<p>Тождественно равные выражения Тождество Тождественное преобразование выражения</p>		<p>Тема «Тождественно равные выражения» имеет большой теоретический материал, в котором рассматриваются определения «тождество», «тождественное преобразование», «тождественно равные выражения». На каждое определение даётся не менее одного примера. После теоретического материала рассматривается 2 примера на доказательство тождества с подробным решением. Для закрепления изученного материала в учебнике предлагается 7 устных упражнений, а также 8 упражнений, требующих выполнения действий.</p>
	<p>Степень Основание степени Показатель степени Свойства степеней</p>	<p>Степень и свойства степени рассматриваются при изучении темы «Произведение одночленов».</p>	<p>В теме «Степень с натуральным показателем» в теоретическом материале рассматривается, что такое степень, основание и показатель степени, а также рассматриваются основные свойства степеней. Изучение темы также предлагает примеры с подробным решением. В первом примере рассмотрено решение уравнения, второй и третий примеры на доказательство. Тема также включает в себя 37 заданий с открытым решением, но среди них встречается и 7 заданий для устного выполнения.</p>

	<p>Одночлен Стандартный вид одночлена Коэффициент одночлена Подобные одночлены</p>	<p>Тема «Одночлены» изучается перед знакомством учеников с понятием «степень». Степень и её свойства являются частью темы «Произведение одночленов». В целом на тему предлагается 6 заданий, 4 из которых для устного решения, и всего 2 – для подробного.</p>	<p>Тема «Одночлены» имеет своё начало уже после изучения темы «Степень. Свойства степеней». В понятийную составляющую темы входят такие понятия, как «стандартный вид одночлена», «коэффициент одночлена», «степень одночлена». Рассматривается два примера с решением, после чего необходимо проверить усвоение изученной темы, тем самым выполнив 4 устных задания и 19 заданий, требующих решение.</p>
	<p>Многочлен: - первой степени - второй степени - высшей степени</p>	<p>Большой раздел «Многочлены» включает в себя изучение тем «Свойства многочленов», «Многочлены стандартного вида», «Произведение одночлена и многочлена», «Произведение многочленов», «Целые выражения», «Числовое значение целого выражения», «Тождественное равенство целых выражений». В каждой подтеме содержится достаточное количество теоретического материала, в котором представлены основные понятия и их определения. Также, в каждой подтеме представлено не менее 5 заданий для закрепления. Тема «Произведение многочленов» включает в себя 21 задание.</p>	<p>В теме «Многочлены» представлены основные понятия: «многочлен», «двучлен», «трехчлен», «многочлен стандартного вида», а также «степень многочлена стандартного вида». После теоретического материала дано 2 устных и 5 заданий для письменного выполнения. Отдельной темой рассматривается сложение и вычитание многочленов, после чего изучается тема «Умножение одночлена на многочлен», а следом «Умножение многочлена на многочлен». Каждая тема достаточно объёмная, имеет большое количество теоретического материала, примеры встречаются на каждой теме, а также большое количество заданий на закрепление усвоения темы.</p>

	<p>Рациональн ые выражения</p>	<p>Впервые понятие «рациональное выражение» встречается в 7 параграфе «Алгебраические дроби». После изучения алгебраических дробей и их свойств, приведения дроби к общему знаменателю, арифметических действий с алгебраическими дробями, автор даёт определение рациональному выражению – «выражение, в котором несколько алгебраических дробей соединены знаками арифметических действий». Также, отдельной темой рассматривается числовое значение рационального выражения, которая также включает в себя как теорию, так и практику.</p>	
<p>Преобразования</p>	<p>Приведение подобных слагаемых Разложение на множители: - вынесение общего множителя за скобки - метод группировки</p>	<p>Данный вид преобразования встречается в теме «Одночлены», подтеме «Подобные». Разложение многочлена на множители Никольский в учебнике «Алгебра 7 класс» предлагает изучать после изучения формул сокращенного умножения, тем самым обобщая все изученные формулы, и предлагая их для применения при разложении многочлена на множители. Помимо этого, автор предлагает метод вынесения общего множителя за скобки, выделение полного квадрата и метод группировки. В учебнике представлены все методы, после чего следует большая практическая часть, включающая в себя около 30 заданий по теме «Одночлены».</p>	<p>Приведение подобных слагаемых подробнее изучается в теме «Многочлены». После изучения основных определений темы «Многочлены» имеет своё начало изучение преобразований рациональных выражений, а именно вынесение общего множителя, метод группировки. Каждый вид преобразования – это отдельная тема, которая включает в себя рассмотрение примеров с подробным решением, основные понятия и формулировки, а также большую теоретическую часть.</p>

	<p>- формулы сокращённого умножения (произведение разности и суммы двух выражений, разность квадратов двух выражений, квадрат суммы и квадрат разности двух выражений, сумма и разность кубов)</p>	<p>В учебнике Никольского «Алгебра 7 класс» формулам сокращённого умножения посвящён целый раздел. Изначально автор предлагает изучение формулы «квадрат суммы», где предоставляет её определение, формулу в общем виде, пример, и после чего 12 заданий для усвоения и закрепления умения применять формулу. Следом изучается формула «квадрат разности», где также предоставлена формула в общем виде, определение и примеры.</p>	<p>«Произведение разности и суммы двух выражений» – это тема, с которой начинается изучение формул сокращённого умножения. Следом идёт тема «Разность квадратов двух выражений», которая тесно связана с предыдущей темой. Тема «Квадрат суммы и квадрат разности» предполагает изучение сразу двух формул и отработку навыка преобразования как, используя формулу квадрата суммы, так и формулу квадрата разности. После изучения этой темы</p>
		<p>«Выделение полного квадрата» включает в себя 7 примеров с подробным решением, небольшое количество теоретического материала, и 10 заданий для выполнения. «Разность квадратов», «Сумма кубов», «Разность кубов», «Куб суммы», «Куб разности» - все эти формулы рассматриваются в учебнике Никольского как отдельные подтемы, везде имеется небольшой теоретический материал и около 8 практических заданий.</p>	<p>отдельно рассматривается преобразование многочлена в квадрат суммы или квадрат разности, что является обратным действием к предыдущей теме. Завершают перечень формул сокращённого умножения формулы суммы и разности кубов двух выражений. Каждая тема полна теоретического материала, а также большим количеством практического материала. Помимо этого, на каждую формулу имеется конкретный разобранный пример, который способствует успешному усвоению и запоминанию формул.</p>

Виды рациональных выражений	Линейные выражения	Используются при изучении темы «Многочлены», а также в заданиях, где необходимо найти значение выражения, при решении линейных уравнений и систем линейных уравнений с двумя неизвестными.	
	Квадратичные выражения	Имеют место в теме «Многочлены», в основе формул сокращённого умножения, а также в квадратных уравнениях, системах уравнений и неравенств.	
	Выражения третьей и высшей степени	Применяются при изучении темы «Многочлены», входят в формулы сокращённого умножения (куб суммы, куб разности, сумма кубов, разность кубов)	
Применение	Уравнения Неравенств а Системы уравнений и неравенств Методы решения систем уравнений и неравенств с двумя неизвестными	Глава 3 «Линейные уравнения» включает в себя два параграфа, которые разбиты на отдельные темы. В параграфе «Линейные уравнения с одной неизвестной рассматриваются линейные уравнения и решение линейных уравнений, а также решение задач с помощью линейных уравнений. Параграф «Системы линейных уравнений» включает в себя системы уравнений первой степени с двумя неизвестными, решение систем уравнений первой степени методом подстановки и методом уравнивания коэффициентов. В каждой теме подробный теоретический материал, приводятся примеры выполнения заданий. Практических заданий в каждой теме не больше пяти.	Тема «Функции» включает в себя определение линейной функции, её свойств и графика. После объёмной темы «Функции» следует тема «Системы линейных уравнений с двумя переменными». В теме изучается решение систем линейных уравнений с двумя неизвестными методом подстановки, методом сложения и графическим методом. Отдельным разделом идёт решение задач с помощью систем линейных уравнений, в котором предложено множество различных задач. Каждая подтема оснащена большим количеством примеров с подробным объяснением выполнения хода решения, помимо этого в учебнике содержится большая практическая часть.

Проанализировав учебники Мерзляка и Никольского, я заметила, что в учебнике Никольского большую часть составляет теоретическая часть, а

практические задания редко превосходят пяти, половина из которых для устного выполнения. Это говорит о том, что для закрепления изученного материала заданий из учебника будет недостаточно. Несмотря на это, в учебнике содержатся примеры по выполнению конкретных заданий с подробным решением, что является неким помощником при решении практических заданий.

В отличие от Никольского, в учебнике Мерзляка каждая тема содержит не только богатый объём теоретического материала, к которому можно обратиться при самостоятельном изучении темы, но и каждая теория поддерживается большим количеством разобранных заданий с подробным решением. Также сам объём практических заданий превосходит десяти, куда включены как задания для устного выполнения, так и задания, требующие подробное решение.

Но, несмотря на различия в содержании учебников, различия имеются и в последовательности изучения тем. Так, например, изучение рациональных выражений в учебнике Никольского начинается с определения, что такое числовые выражения, буквенные выражения, алгебраические выражения в целом. Затем тема сводится к понятию одночлена и многочлена, и только после изучения формул сокращенного умножения, понятия алгебраической дроби и т.д., автор знакомит нас с определением «рациональное выражение». Помимо этого, последовательность изучения тем различна в том, что в учебнике Никольского тема, касающаяся степени и её свойств, вытекает из темы «Одночлены». А в учебнике Мерзляка автор сначала нас знакомит с понятием степени, после чего переходит к изучению одночленов и многочленов. Понятия рационального выражения в чистом виде в учебнике Мерзляка по алгебре за 7 класс не встречается, но активно используется понятие многочлена. Пожалуй, на этом использование понятие многочлена и заканчивается.

Начиная с 8 класса, в учебнике Мерзляка понятие «многочлен» заменяется на понятие «рациональное выражение». С этих пор понятие многочлена осталось в 7 классе и больше нигде не используется. Все преобразования, которые в 7 классе относились к многочленам и изучались на основании темы «Многочлены» теперь является неотъемлемой частью рациональных выражений. Таким образом, можно сделать вывод, что, начиная с 8 класса, происходит замена понятий. Понятие «многочлен» и «рациональное выражение» - это одно и то же. Но при изучении темы «Рациональные выражения» у учеников возникают трудности, поскольку они не понимают, что преобразования, выполняемые над многочленами, точно также выполняются и во всём курсе алгебры с рациональными выражениями.

§1.3. Значение и способы визуализации в обучении школьников математике

В современном процессе образования визуализация играет значимую роль. А именно, она позволяет сделать процесс обучения более увлекательным за счёт большого разнообразия мультимедийных возможностей и программных продуктов. Кроме того, визуализация эффективно решает проблему наглядности в обучении, расширить возможности визуализации учебного материала, делая его более понятным и доступным для учащихся.

Визуализировать информацию можно с использованием таблиц, схем, чертежей, а также используя диаграммы и ментальные карты. Применение же компьютера позволило эти способы визуализации перенести на более высокий уровень. С приходом компьютера в образовательный процесс появилась возможность анимировать визуальные образы, сделать их «живыми», увеличить объем охватываемого пространства примеров. Кроме

того, с применением современных компьютерных технологий процесс создания визуальных образов перестает быть только прерогативой учителя, учащиеся могут активно включаться в этот процесс. Это позволяет учащимся лучше осмысливать учебный материал, проводить более глубокий анализ и, самое на наш взгляд главное, создавать образы, которые будут близки восприятию именно этого учащегося или группы учащихся. [16] [21]

Компьютерная визуализация в современном мире – это уже неотъемлемая часть образовательного процесса, ее используют для решения таких задач, как:

- Наглядное представление информации;
- Сжатое, красочное и понятное описание каких-либо закономерностей, которые характерны для определенного набора данных;
- Уменьшение размера запоминаемой информации. [7]

К основным средствам компьютерной визуализации, используемым в школах, можно отнести презентации, видеоуроки, анимации и 3D графику.[22] Рассмотрим возможности каждого средства по отдельности.

С помощью презентации можно очень легко, удобно и эффективно представлять информацию на компьютере. В статье Шелудкова Е.А. [30] рассматривают два типа презентаций: линейную и интерактивную. Линейная презентация представляет собой динамичный ролик с видеофрагментами, звуковым сопровождением, яркой графикой, и отсутствием системы навигации. Поочередно сменяют друг друга слайды презентации. Пользователь пассивен, его роль в управлении презентацией незначительна. Акцентируется внимание читателя на конкретном просматриваемом слайде.

Интерактивная презентация – совокупность мультимедийных компонентов, структурированных по иерархическому принципу и управляемых через специальный пользовательский интерфейс. [30]

Также, презентация позволяет демонстрацию текстовой информации, добавление диаграмм, схем, графиков, таблиц и различных числовых данных.

Анимация же дает возможность наглядно показать объект в движении – а это один из лучших методов визуализации при изучении математики. Анимацию можно использовать как самостоятельное средство, так и в совокупности с презентацией. Благодаря анимации многоугольников можно сделать акцент на их свойствах и особенностях, что сложно будет показать на плоскости.

Для отображения объёмных фигур также используется 3D графика. Например, такие программы как «GeoGebra» или «Живая математика». Эти программы позволяют соединить всю математику вместе, т.е. геометрию, алгебру и математический анализ.

GeoGebra – это программная среда, которая благодаря своей динамической структуре, объединила в себе важные представления математических понятий: табличное, алгебраическое и геометрическое. GeoGebra позволяет создавать различные конструкции из точек, отрезков, векторов, прямых, окружностей, математических функций и других базовых элементов, а затем динамически изменять их и строить анимации. Благодаря тому, что в программе реализована возможность напрямую вводить уравнения и работать с координатами, можно наглядно строить графики функций, работать с ползунками для подбора параметров. Созданные в данной динамической среде чертежи можно просматривать в режиме презентации на компьютере или проецируя их на экран с помощью мультимедийного проектора. В связи с этим особенно эффективно использование приложения на уроках геометрии при изучении раздела стереометрии. Демонстрационные чертежи и 3D – модели помогают ученикам детально разобраться в основных понятиях стереометрии. [15]

С помощью программы «Живая Математика» можно также конструировать интерактивные математические модели, которые помогают получить начальные представления о понятиях формы тела, числах и т.п.

Видеоурок – анимированный урок, озвученный диктором. Легкость использования видеоурока в процессе обучения состоит в том, что видеоурок можно остановить в любой момент, для того чтобы объяснить обучающимся, если что-то не понятно, или проделать описанные действия самостоятельно, всегда можно перейти к интересующему моменту назад и просмотреть снова. [1]

Можно выделить следующие уровни взаимодействия визуального и других способов представления информации:

1. Динамическое визуальное представление: реальный процесс; виртуальная реальность; видеоизображение.
2. Статическое визуальное представление: реальный объект; фотография; иллюстрация/рисунок/картина.
3. Абстрактное визуальное представление: образ/график/чертеж; концептуальная карта/схема; абстрактный знак/обозначение.
4. Символическое/вербальное представление: определение/описание; название/ярлык; класс/род. [6]

Рассмотрим несколько примеров методов визуализации при обучении школьников математике, алгебре и геометрии.

При изучении темы «Обыкновенные дроби» в 5 классе отличным методом визуализации будет являться статистическое визуальное представление иллюстрации. Такой пример изображён на *Рисунок 2. Обыкновенные дроби.*

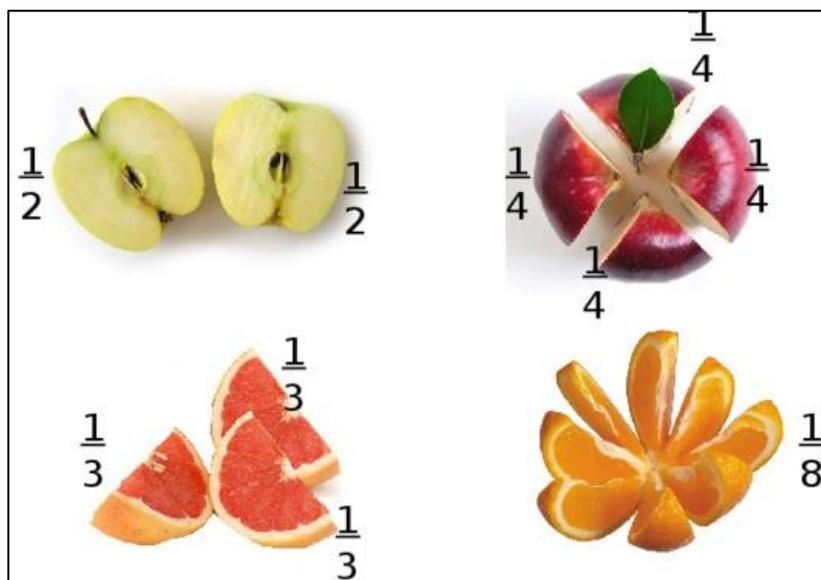


Рисунок 2. Обыкновенные дроби

Здесь наглядно изображены такие дроби как $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ с представлением частей разрезанных фруктов.

Изучая в 10-ом классе в курсе алгебры график функции $y = \sin kx$, можно изобразить, как меняется график функции в зависимости от k , используя динамическое визуальное представление видеоизображения (анимации). Мы знаем, что при $k > 1$ график функции будет сужаться, а при $k < 1$ наоборот, расширяться. На Рисунок 3. Графики функции $y = \sin kx$ представлены примеры графиков $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin \frac{1}{2}x$.

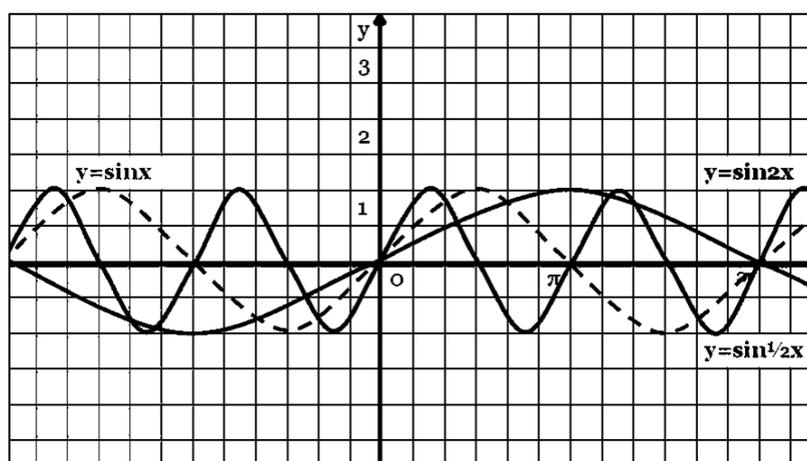


Рисунок 3. Графики функции $y = \sin kx$

Используя компьютерные технологии можно наглядно изобразить расширение и сужение графика в зависимости от коэффициента перед x . В

данном случае изображение является абстрактным визуальным представлением, но оно является менее наглядным и простым для восприятия и запоминания.

В качестве ещё одного примера я приведу изучение темы «Прямоугольный параллелепипед» в 5-ом классе курса математики. Здесь возможно статическое визуальное представление реального объекта (из бумаги, например), на основании которого подсчитывается количество граней, рёбер и вершин многогранника.

Последним примером представлю изучение в 9-ом классе курса геометрии темы «Тела вращения». В данном случае тему можно раскрыть, используя как статическое визуальное представление реального объекта (из бумаги или картона, например), так и используя динамическое визуальное представление видеоизображения. Если в первом случае вращать тела придётся вручную, то во втором случае тела будут вращаться анимационно и изображаться на экране компьютера, проектора или виртуальной доски.

Таким образом, визуализация математической информации посредством современных средств новые информационные технологии позволяет:

- воспроизвести большинство математических понятий за курс основной школы;
- изменить или дополнить полученную информацию;
- зафиксировать взаимосвязи различных математических понятий;
- повысить уровень заинтересованности в изучении математики; увеличить объём запоминаемой информации;
- обеспечить систематизацию полученных математических знаний;
- отразить связь математических понятий с различными областями знаний;
- стимулировать креативные процессы — логические выводы и ассоциации;

- обеспечение интенсификации обучения;
- активизации учебной и познавательной деятельности;
- формирование и развитие критического и визуального мышления; зрительного воспитания;
- образного представления знаний и учебных действий;
- передачи знаний и распознавания образов;
- повышения визуальной грамотности и визуальной культуры. [28]

Вывод по главе I

Изучив школьную литературу, я сделала вывод о том, что в курсе алгебры основной школы 7-9 классов сконцентрирована основная нагрузка по формированию умений и навыков выполнения тождественных преобразований рациональных выражений.

Также, проведя анализ критериев и уровня сформированности умения преобразования рациональных выражений, я пришла к выводу о том, что на высоком уровне усвоения умения и применения преобразований рациональных выражений обучающийся должен владеть понятийным аппаратом, знать и уметь применять основные формулы сокращённого умножения. Помимо этого, обучающийся должен уметь раскладывать алгебраическое выражение на множители с использованием метода вынесения общего множителя за скобку, метода группировки и т.д.

Для достижения у обучающихся высокого уровня сформированности умения выполнять действия над рациональными выражениями, необходимо использовать наглядный метод, а именно средства визуализации. Визуализация играет одну из главных ролей при обучении школьников математике. Перечисленные в параграфе 1.3 средства и способы визуализации позволяют наглядно представить изучаемый материал школьникам, благодаря чему ученики могут также его воспроизвести в дальнейшем при решении различных математических задач. Из §1.3 можно сделать вывод, что нагляднее всего и, соответственно, эффективнее будет использование компьютерных средств визуализации на уроках математики.

Глава II. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ВИЗУАЛЬНЫХ ОБРАЗОВ К РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ ДЕЙСТВИЯМ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

§2.1. Исследование актуального уровня сформированности умения действий с рациональными выражениями у обучающихся 9 класса.

Диагностическая программа для определения уровня сформированности умения преобразования рациональных выражений у учеников 9 класса состоит из трёх составляющих:

1. Тест;
2. Разноуровневые задания для письменного решения;
3. Задания на соотнесение и заполнение пропусков.

На основе анализа психолого-педагогической литературы по теме исследования были рассмотрены теоретико-методические аспекты проблемы формирования умения действий с рациональными выражениями в ходе проведения уроков математики и составлена программа опытно-экспериментальной части исследования.

Опытно-экспериментальная работа велась на базе Муниципального автономного общеобразовательного учреждения «Лицей №12», Красноярский край, г. Красноярск.

В исследовании принимали участие 9 обучающихся 9-го класса. В школе созданы благоприятные условия для обучения и воспитания детей, классы оборудованы современными средствами информационно-коммуникативных технологий, школа ведёт активное взаимодействие с родителями и в целом психологический климат в образовательной среде МАОУ «Лицей №12» благоприятный. Согласно устной справке классного руководителя и учителя математики, дети, задействованные в опытно-экспериментальной работе активны, психологическое развитие соответствует возрасту.

Для диагностирования уровня сформированности умения действий с рациональными выражениями составили 3 методики, которые включают в себя задания, работающие на проверку определённых критериев. Для них в свою очередь определены уровни сформированности критерия.

Учащимся были выданы задания согласно каждой методике, которые учащиеся выполняли на уроках математики.

Таблица 3. Уровни усвоения понятий учащегося в соответствии с выведенными критериями на основе проведенных методик

Критерии сформированности	Методика и задания	Низкий уровень (1-2 балла)	Средний уровень (3-4 балла)	Высокий уровень (5 баллов)
Понятия Критерий 1. Знание основных понятий: Тождество Тождественное преобразование выражения Одночлен Коэффициент одночлена Подобные одночлены Многочлен	Методика 3. Задания на соотнесение и заполнение пропусков.	Без помощи учителя и одноклассников не может дать определение основных понятий.	Может самостоятельно дать определения некоторым понятиям; Даёт определения в понятных для себя формулировках.	Знает основные понятия и правильно даёт им определения; Соотносит понятие с его определением; Умеет дать определение понятия на простом доступном языке и на языке математики. Умеет классифицировать понятия по темам.
Преобразования Критерий 2. Знание и умение применять преобразования: 2.1. Приведение подобных слагаемых 2.2. Формулы сокращённого	Методика 1. Тест Методика 2. Разноуровневые задания для письменного решения. Методика 3. Задания на соотнесение и заполнение	Без помощи педагога не способен самостоятельно определить алгоритм, по которому следует выполнять преобразования; Не понимает, или плохо понимает, при каких обстоятельствах	Самостоятельно, но требуя дополнительных указаний со стороны учителя, выполняет преобразования, используя формулы сокращённого умножения, разложение на множители (вынесением	Способен самостоятельно и быстро подобрать алгоритм преобразований; Умеет выполнять преобразования: использует формулы сокращённого умножения, разложение на множители (вынесение общего

	<p>умножения 2.3. Метод группировки и 2.4. Вынесение общего множителя за скобку 2.5. Раскрытие скобок</p>	пропусков.	использовать то или иное преобразование, а именно: формулы сокращенного умножения, разложение на множители (вынесение общего множителя за скобку, метод группировки).	общего множителя за скобки, методом группировки).	множителя за скобки, метод группировки).
Применения	<p>Критерий 3. 3. Умение применять преобразования рациональных выражений в уравнениях и неравенствах.</p>	<p>Методика 2. Разноуровневые задания для письменного решения.</p>	<p>Допускает ошибки в решении линейных уравнений, Не умеет решать квадратные уравнения и уравнения повышенной степени; Не знает алгоритма составления математической модели в задаче; Без помощи учителя не справляется с решением систем линейных уравнений.</p>	<p>Совместно с педагогом или одноклассникам и выполняет решение линейных, квадратных и уравнений повышенной степени; С помощью учителя выполняет решение задачи методом составления математической модели в виде уравнения, либо систем уравнений.</p>	<p>Самостоятельно выполняет решение линейных уравнений, квадратных уравнений, уравнений высшей степени; Успешно находит решение неравенств первой, второй и повышенной степеней; Самостоятельно решает задачи методом составления математической модели в виде уравнения с одной, либо двумя неизвестными, либо в виде систем уравнения с двумя неизвестными.</p>

Баллы оценивания уровней сформированности.

- «5» – ставится при высоком уровне усвоения, безошибочное выполнение заданий и при допущении 1-2 ошибок, но найденных и исправленных самостоятельно до проверки работы.

- «4» – ставится при среднем уровне усвоения, когда учащимся совершается 1-2 ошибки, но при указании учителем на их наличие исправляет ошибки самостоятельно.
- «3» – средний уровень усвоения, когда учащийся совершает 1-3 ошибки, самостоятельно не может найти их все, но может исправить большую часть при указании на них учителем.
- «2» - низкий уровень усвоения, когда учащийся совершает 1-4 ошибок, часть из них видит только при указании на них учителем, но не может исправить.
- «1» - Если совершено 4 и более ошибок, часть их может найти самостоятельно, но не может их исправить.

1. Методика закрытого теста

Цель: определение уровня сформированности таких критериев, как:

- 2.1. Приведение подобных слагаемых
- 2.2. Формулы сокращённого умножения
- 2.3. Метод группировки
- 2.4. Вынесение общего множителя за скобку.
- 2.5. Раскрытие скобок

Средства: раздаточные листы с заданиями.

Инструкция: учащимся раздаются листы с заданиями для выполнения.

После выполнения заданий учитель собирает работы для проверки. Оценка проводится в соответствие с приведённой таблицей уровней.

Особенность данных заданий в том, что учащемуся предлагаются варианты ответов, а задачей учащегося будет выбрать верный вариант из предложенных.

Перед тем, как приступить к выполнению теста, учащимся необходимо будет вспомнить, как приводятся подобные слагаемые в выражении, также вспомнить формулы сокращённого умножения. Помимо этого, важно вспомнить, как раскладывать выражение на множители методом группировки и вынесением общего множителя за скобки.

Требования к организации теста:

1. Два варианта теста;
2. Тест рассчитан на 25 минут;
3. Задания обязательной части предполагают один вариант ответа из четырёх;
4. Решение выполняется на отдельном листе и сдаётся на проверку;
5. Задания дополнительной части обязательны для выполнения для обучающихся с высоким уровнем знаний и оформляются на отдельном листе.

Балл снижается только в том случае, если ошибка совершена при выполнении условий задания, за все прочие ошибки балл не снижается.

I вариант	II вариант
<p><u>Обязательная часть.</u> A1. Преобразуйте в многочлен $(2x - 3y)(x - y) - 2x^2$. Варианты ответов: а) $3y^2 - 5xy$ б) $5xy - 3y^2$ в) $3y^2 + 5xy$ г) $5xy + 3y^2$ Ответ: _____ A2. Упростите выражение $-3(y - x)^2 + 7x(x - y)$. Варианты ответов: а) $4x^2 + xy - 3y^2$ б) $4x^2 - xy - 3y^2$ в) $10x^2 - 13xy - 3y^2$ г) $4x^2 - 3y^2$ Ответ: _____ A3. Разложите на множители</p>	<p><u>Обязательная часть.</u> A1. Преобразуйте в многочлен $(3x - 5y)(y + x) - 3x^2$. Варианты ответов: а) $8xy - 3y^2$ б) $5xy + 3y^2$ в) $5xy - 5y^2$ г) $-5xy - 5y^2$ Ответ: _____ A2. Упростите выражение $-2(y - x)^2 + 4x(x - y)$. Варианты ответов: а) $2x^2 + xy - 2y^2$ б) $2x^2 - 2y^2$ в) $2x^2 + 2y^2$ г) $2x^2 - 4xy - 2y^2$ Ответ: _____ A3. Разложите на множители</p>

$16xy^2 - 4xa^2$. Варианты ответов: а) $4x(2y - a)(2y + a)$ б) $4x(2y + a)(2y + a)$ в) $xya(16y - 4a)$ г) $4x(a-2y)(a + 2y)$ Ответ: _____ A4. Представьте в виде произведения $3y^2 - 2y - 1$. Варианты ответов: а) $(y - 1)(3y + 1)$ б) $(y - 1)(y + 2)$ в) $(3y - 1)(y + 2)$ г) $(y + 1)(3y - 1)$ Ответ: _____ <u>Дополнительная часть.</u> V1. Разложите на множители $xy^3 - y^3 - y^4 + xy^4$. Ответ: _____ V2. Найдите значение выражения $(5x - 1)(5x + 1) - 5x(5x + 2)$ при $x = 0,2$. Ответ: _____	$50xy^2 - 2xa^2$. Варианты ответов: а) $2x(5y - a)(5y + a)$ б) $2x(5y + a)(5y + a)$ в) $xya(25y - 2a)$ г) $2x(a-5y)(a + 5y)$ Ответ: _____ A4. Представьте в виде произведения $2y^2 - y - 6$. Варианты ответов: а) $(y - 2)(2y + 3)$ б) $(y - 2)(2y + 3)$ в) $(2y - 2)(2y + 1)$ г) $(y + 1)(2y - 1)$ Ответ: _____ <u>Дополнительная часть.</u> V1. Разложите на множители $xy^2 - y^2 - y^3 + xy^3$. Ответ: _____ V2. Найдите значение выражения $(3x - 2)(3x + 2) - 3x(3x - 1)$ при $x = 0,2$. Ответ: _____
--	---

Максимальное количество баллов за каждое задание – 5 баллов. Таким образом, за весь тест ученик может набрать максимум 30 баллов.

2. Методика «Разноуровневые задания для письменного решения»

Цель: определение уровня сформированности таких критериев, как:

2.1. Приведение подобных слагаемых

2.2. Формулы сокращённого умножения

2.5. Раскрытие скобок

3. Умение применять преобразования рациональных выражений в уравнениях и неравенствах.

Средства: раздаточные листы с заданиями.

Инструкция: учащимся раздаются листы с заданиями для выполнения. Задания представлены на трёх уровнях. Ученик сам выбирает уровень,

задания которого будет выполнять. После выполнения заданий учитель собирает работы для проверки. Оценка проводится в соответствии с приведённой таблицей уровней.

При подготовке к тестированию необходимо повторить формулы сокращённого умножения и как приводятся подобные слагаемые в выражении. Кроме того, необходимо повторить разложение многочлена на множители вынесением общего множителя за скобки и методом группировки.

Требования к организации теста:

1. Задания рассчитаны на 30 минут;
2. Ученик имеет возможность выполнить задания любого из двух уровней (уровень заданий определяет уровень знаний обучающегося) – Средний уровень – I уровень, Высокий уровень – II уровень сложности;
3. Два варианта заданий;
4. Решение оформляется на отдельном листе;

Максимальное количество баллов за каждое задание – 5 баллов. Таким образом, за весь тест ученик может набрать максимум 20 баллов.

Задания	
I уровень	
I вариант	II вариант
1. Решите неравенство: а) $(x + 2)(x - 4) > 0$; б) $x(x - 4) \leq 0$.	1. Решите неравенство: а) $(x - 1)(x + 3) \geq 0$; б) $x(2 - x) < 0$.
2. Решите неравенство: $\frac{2x - 3}{1 - x} < 4$	2. Решите неравенство: $\frac{3x + 1}{2 - x} < 2$
3. Найдите область определения выражения: $\sqrt{\frac{25 - x^2}{x^2 + x + 47}}$	3. Найдите область определения выражения: $\sqrt{\frac{x^2 - 3x - 4}{9 - x^2}}$
4. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2a - 1 \geq 0 \\ 4 - 2a \leq 0 \end{cases}$	4. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 3b + 4 < 0 \\ 2b + 8 \geq 0 \end{cases}$
II уровень	
I вариант	II вариант
1. Решите неравенство: а) $x \cdot x > 9$; б) $\frac{x(x - 1)}{3 - x} < 0$	1. Решите неравенство: а) $x \cdot x < 16$; б) $\frac{x(2 - x)}{x + 3} \geq 0$
2. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2p + 4 > 0 \\ p^2 + 2p - 3 \geq 0 \end{cases}$	2. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 3q - 6 \leq 0 \\ 2q^2 + 5q + 2 > 0 \end{cases}$
3. Найдите область определения функции: $y = \frac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt{x^2-4}}$	3. Найдите область определения функции: $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{16-x^2}}$
4. Решите неравенство: $\frac{2a^3 + 5a^2 + 2a}{36 - a^2} \geq 0$	4. Решите неравенство: $\frac{b^3 + 2b^2 + b}{16 - 9b^2} \leq 0$

Балл снижается только в том случае, если ошибка совершена при выполнении условий задания, за все прочие ошибки балл не снижается.

3. Методика «Задания на соотнесение и заполнение пропусков»

Цель: определение уровня сформированности таких критериев, как:

1. Знание основных понятий (тождество, тождественное преобразование выражения, одночлен, коэффициент одночлена, подобные одночлены, многочлен).

2.1. Приведение подобных слагаемых

2.2. Формулы сокращённого умножения

2.5. Раскрытие скобок

Средства: раздаточные листы с заданиями.

Инструкция: учащимся раздаются листы с заданиями для выполнения. В заданиях необходимо заполнить пропуски, для этого необходимо знать основные понятия темы «Преобразование рациональных выражений», а также формулы сокращённого умножения и правила приведения подобных слагаемых в выражении.

Требования к организации теста:

1. Задания рассчитаны на 25 минут;
2. Один вариант на всех;
3. Задания предусматривают проверку знания понятийного аппарата темы «Преобразование рациональных выражений»;
4. Решение оформляется на бланке ответов;
5. Оценивание результатов проводится в соответствии с приведенной ниже таблицей.

За каждое задание ученик максимум может набрать 5 баллов. Таким образом, за весь тест ученик может набрать максимум 10 баллов.

Балл снижается только в том случае, если ошибка совершена при выполнении условий задания, за все прочие ошибки балл не снижается.

Задание	Вариант ответа
<i>I. Закончите формулировку понятия, заполнив пропуски вариантами.</i>	
<p>1. Два выражения называются тождественно равными, если их соответственные значения _____</p> <p>2. Тождество – это равенство, верное при _____</p> <p>3. Чтобы привести подобные слагаемые нужно _____ их коэффициенты и результат _____ на общую буквенную часть.</p> <p>4. Если перед скобками стоит знак «-», то скобки можно _____</p> <p>5. Подобные слагаемые – это слагаемые, имеющие _____.</p> <p>6. Одночленом называется выражение, являющееся _____.</p> <p>7. Одночленом стандартного вида называется одночлен, представленный в виде произведения _____, стоящего _____, и _____.</p> <p>8. Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно _____ одного многочлена _____ на _____ другого многочлена и полученные произведения _____.</p>	<p>a) сложить</p> <p>b) равны</p> <p>c) каждый член</p> <p>d) одинаковую буквенную часть</p> <p>e) сложить</p> <p>f) любых значениях переменных</p> <p>g) числового множителя</p> <p>h) опустить, поменяв знак каждого слагаемого на противоположный</p> <p>i) умножить</p> <p>j) каждый член</p> <p>k) на первом месте</p> <p>l) произведением чисел), переменных и их степеней</p> <p>m) степеней различных переменных</p> <p>n) умножить</p>
<i>II. Заполните пропуски, чтобы получились верные равенства.</i>	
<p>1. $(m + \dots)^2 = m^2 + 6m + 9$.</p> <p>2. $(\dots - 2a)^2 = 16 - \dots + 4a^2$</p> <p>3. $(a - \dots)^2 = x^2 + \dots + 9$</p> <p>4. $(6x + \dots)^2 = \dots + \dots + 25y^2$</p> <p>5. $(3x - \dots)(3x + \dots) = 9x^2 - 16y^2$.</p> <p>6. $a^2 - \dots = a(a - 5b)$</p> <p>7. $a^2 - 25 = (a - 5)(\dots + \dots)$</p> <p>8. $x^3 + 64 = (x + 4)(\dots - 4x + \dots)$</p> <p>9. $a^3 - 25a = a(a - \dots)(a + \dots)$</p> <p>10. $x^3 + x^2y - 4y - \dots = (x + \dots)(x - 2)(\dots + 2)$</p>	

После полного проведения диагностики подсчитываем результаты проверки уровня сформированности умения действий с рациональными выражениями.

§2.2. Результаты проверки уровня сформированности умения действий с рациональными выражениями

После проведения диагностического теста были получены результаты, представленные по каждой из методик. Максимальное количество баллов, которое можно было набрать за выполнение всего диагностического теста – 60 баллов.

При проверке работ учащихся была проверена не только правильность выполнения задания, но и количество исправленных ошибок, а так же аргументированность ответов. В результате мы получили следующие данные, что представлены в таблицах 4 и 5.

Беря во внимание эти результаты, мы можем судить об уровне сформированности критериев во всем классе. Мы знаем, что максимальное количество баллов, которое можно набрать за выполнение всего диагностического теста – 60 баллов. Исходя из этого можно было посчитать процент от максимального балла, набранный каждым участником исследуемой группы.

Если учесть, что из обучающихся 9 класса МАОУ «Лицей №12» проходило диагностику 9 человек, то максимальный балл (МАХ), полученный всем классом, будет равняться 540 баллам.

Таблица 4. Подсчет результатов по методикам

	№ задания	Результаты учащихся									Σ
		Г.С.	Е.Н.	К.В.	К.Д.	Л.В.	Н.В.	П.И.	Т.А.	У.П.	
Методика закрытого теста	A1	5	4	5	5	5	4	5	4	4	
	A2	4	3	3	4	4	5	4	4	3	
	A3	5	4	5	5	4	5	5	4	4	
	A4	3	3	2	3	2	3	3	2	3	
	B1	4	4	4	4	3	4	4	3	3	
	B2	5	4	5	5	4	4	4	3	4	
	Итого		26	22	24	26	22	25	25	20	21

Методика «Разноуровневые задания для письменного решения»	Уровень										
	I	II									
	1	5	4	3	5	3	3	4	4	4	
	2	3	3	4	5	4	4	5	4	4	
	3	3	4	2	4	3	3	4	3	2	
	4	3	4	2	2	2	2	3	1	2	
	Итого	14	15	11	16	12	12	16	12	12	120
Методика «Задания на соотнесение и заполнение пропусков»	1	5	4	4	5	3	4	3	3	4	
	2	5	3	4	4	4	5	4	4	3	
	Итого	10	7	8	9	7	9	7	7	7	71
	Σ	50	44	43	51	41	46	48	39	40	402
	% от максимум а	83,3 %	73,3 %	71,7 %	85%	68,3 %	76,7 %	80%	65%	66,7 %	74,4 %

Глядя на результаты, которые приведены в таблице 4, можно отметить, что большинство учащихся при допущении ошибок при указании на них могли исправить их самостоятельно.

Рассмотрим результаты участников исследуемой группы по критериям. При этом будем учитывать, что если перераспределить набранные за задания баллы по критериям согласно диагностической карте (таблица 3), то по критерию 1 обучающийся мог набрать максимально 10 баллов (методика 3), по критерию 2 максимально 60 баллов, а по критерию 3 максимально 20 баллов. Таким образом, в общем каждый обучающийся за все критерии мог набрать 90 баллов. При этом будем считать, что:

За критерий 1: 3-5 баллов – низкий уровень, 6-8 – средний и 9-10 – высокий;

За критерий 2: 20-30 – низкий, 31-50 – средний, 51-60 – высокий;

За критерий 3: 6-10 – низкий, 11-17 – средний, 18-20 – высокий;

Общий итог: от 30-46 баллов это низкий уровень, 47-77 – средний, 78-90 – высокий.

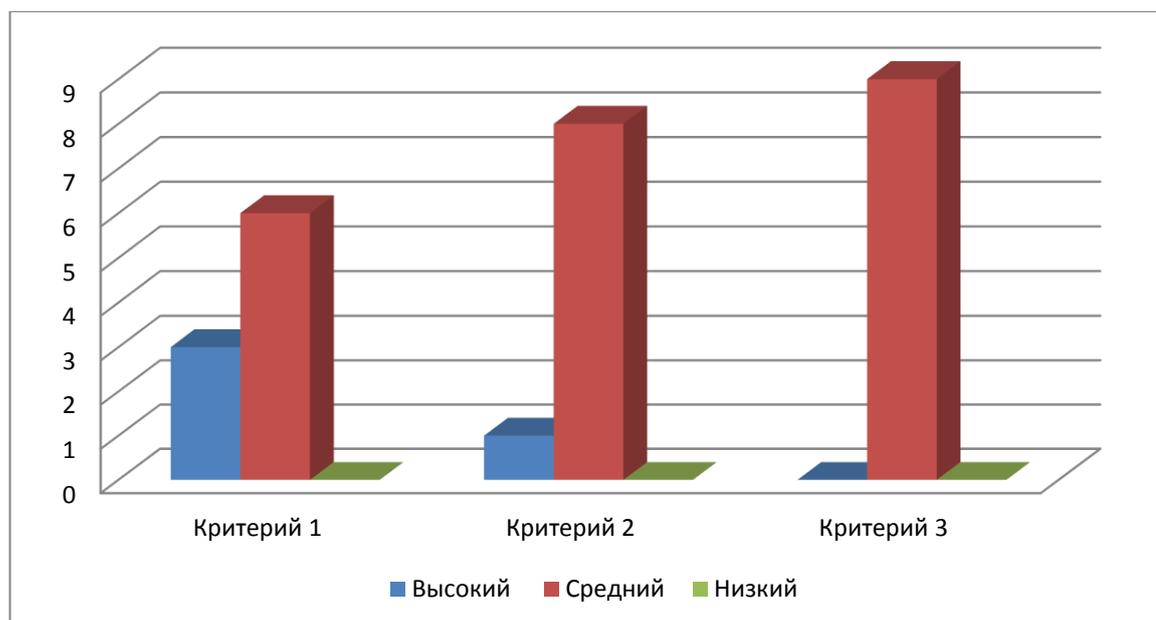
Теперь мы соотнесем полученные учащимися баллы с проверяемыми критериями и получим уровни развития умения у исследуемой группы по каждому из критериев.

Таблица 5. Результаты проверки уровня сформированности умения преобразования рациональных выражений по критериям

	Критерий 1		Критерий 2		Критерий 3		Сумма по критериям	уровень
	Σ	Уровень	Σ	Уровень	Σ	Уровень		
ГС	10	высокий	50	средний	14	средний	74	С
ЕН	7	средний	44	средний	15	средний	66	С
КВ	8	средний	43	средний	11	средний	62	С
КД	9	высокий	51	высокий	16	средний	76	С
ЛВ	7	средний	41	средний	12	средний	60	С
НВ	9	высокий	46	средний	12	средний	67	С
ПИ	7	средний	48	средний	16	средний	71	С
ТА	7	средний	39	средний	12	средний	58	С
УП	7	средний	40	средний	12	средний	59	С
	0-Н-0% 6-С-67% 3-В-33%		0-Н-0% 8-С-89% 1-В-11%		0-Н-0% 0-С-0% 9-В-100%			

Принимая во внимание данные таблицы видно, что уровень сформированности умения действий с рациональными выражениями находится у всех участников группы на среднем уровне. Радует тот факт, что ни по одному из проверяемых критериев не выявлен низкий уровень сформированности. Но и высокий уровень сформированности проявляется очень редко – у трети исследуемой группы в первом критерии и всего у 11% во втором критерии, и 0 – в третьем. Данное отношение ярко представлено на графике 1.

График сформированности умения решения квадратных уравнений у проверяемой группы обучающихся относительно выделенных критериев



Исходя из полученных данных мы видим, что в классе уровень сформированности умения преобразования рациональных выражений развит на среднем уровне, а это говорит о том, что большинство обучающихся способны находить алгоритм выполнения задания, но при раскрытии скобок допускают ошибки, также не все способны находить и приводить подобные слагаемые в математическом выражении. Кроме того, часть учеников допускают ошибки при использовании формул сокращённого умножения и разложении математического выражения на множители. Всё вышеперечисленное является основой того, что ученики не способны применять преобразования рациональных выражений в различных задачах. Это подтверждает те выводы, которые напрашивались еще в теоретической главе – отсутствие преемственности в изучении данной темы приводит к тому, что обучающимся трудно достигнуть высокого результата.

Средний уровень сформированности отражает то, что обучающимся трудно запомнить формулы, применяемые для преобразования рациональных выражений. А на запоминание как формул, так и остальных составляющих

умения преобразования рациональных выражений успешно могут повлиять методы визуализации при формировании этого умения.

§2.3. Способы реализации преемственности в обучении школьников действиям с рациональными выражениями с помощью визуальных образов

Как уже было сказано вначале, основы изучения рациональных выражений и действий над ними закладываются ещё в начальной школе. Но при этом стоит отметить, что основная терминология и алгоритмы вводятся в 7 классе. Здесь рациональные выражения именовываются как многочлены, и все основные действия выполняются над многочленами. При дальнейшем изучении рациональных выражений терминологию, которая использовалась в 7 классе, уже не используют, тем самым разрывается связь между рациональными выражениями и многочленами. Разрыв этой связи влечёт за собой последствия, связанные с тем, что обучающиеся не способны выполнить над алгебраическим выражением те же действия, что и требуются для преобразования многочлена. Именно на этом этапе перехода от термина «многочлен» к термину «рациональное выражение» (или «алгебраическое выражение») и происходит переломный момент в формировании у обучающихся умения выполнять действия над рациональными выражениями, что влечёт за собой низкий или средний уровень сформированности у обучающихся этого умения.

Вдобавок к вышесказанному также стоит отметить, что в классах разных ступеней и в различных дисциплинах есть примеры на рациональные выражения, но их решение осуществляется разными неэффективными способами, без использования терминологии и алгоритмов, изученных в 7

классе. И только в старших классах отчасти вспоминается этот материал, но он уже хорошо забыт школьниками. А при обучении в высшем учебном заведении идёт опора на этот материал, как уже изученный учениками в старших классах, таким образом получается провал. В таком случае необходимо, чтобы ученики видели, что то, что они изучают в 8,9, 10 и 11 классах напрямую связано с материалом 7 класса по рациональным выражениям. Это поспособствует тому, что не произойдёт разрыва той связи между рациональными выражениями и многочленами, о которой мы говорили не так давно. Именно поэтому и нужна преемственность в обучении действиям с рациональными выражениями. Я считаю, что средства визуализации помогут этому способствовать.

Как мы уже говорили ранее, в современном процессе обучения визуализация играет большую роль. Используя именно средства визуализации, процесс обучения становится более увлекательным и интересным благодаря большому разнообразию мультимедийных возможностей. С использованием средств визуализации изучение учебного материала становится более понятным и доступным. Визуализировать можно как понятия и определения, так и формулы и другие составляющие. Одним из самых эффективных средств визуализации является анимация. Но кроме анимации есть и другие средства.[9]

Я предлагаю общую систему визуальных представлений, которая позволит связать изученный материал 7-го класса в дальнейшем при изучении алгебры.

Поскольку изучение формул сокращённого умножения начинается в 7 классе и используются в период 8-11 классов, то первым делом, я предлагаю разработать мини-сборник основных формул преобразования рациональных выражений, в который будут входить формулы сокращённого умножения (*Рисунок 5. Основные формулы. Обучающиеся могут пользоваться данным*

сборником на протяжении всего учебного процесса и дополнять его другими различными формулами.

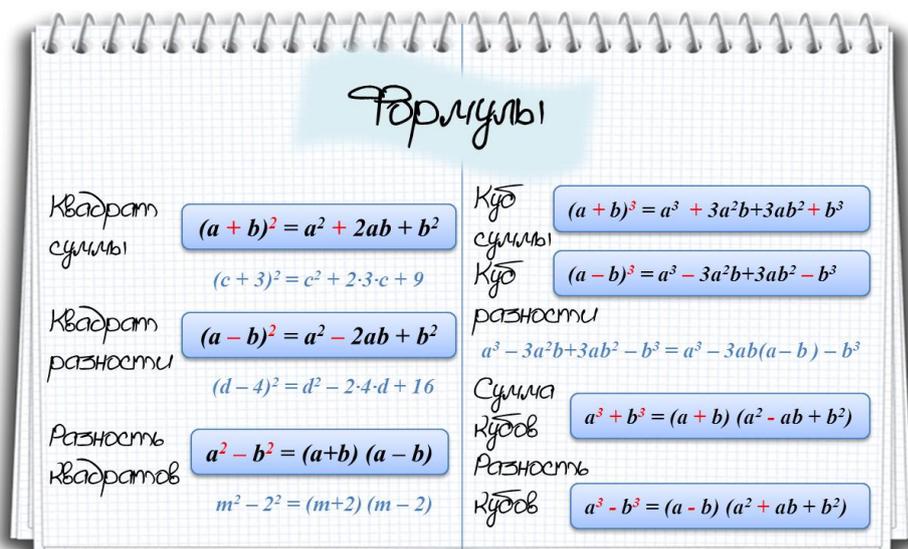


Рисунок 4. Формулы сокращённого умножения

Кроме того, в мини-сборник также можно внести основные действия над многочленами, которые также используются на протяжении всего курса алгебры. Сюда входит приведение подобных членов многочлена, сложение и вычитание многочленов, умножение многочлена на многочлен, умножение одночлена на многочлен, умножение многочленов. Помимо этого важно включить сюда и правила разложения многочлена на множители вынесением общего множителя за скобки, а также методом группировки, а также примеры использования формул сокращенного умножения и способа группировки. (Рисунок 5. Основные формулы



Рисунок 5. Основные формулы

Использование мини-сборника формул поспособствует скорейшему усвоению умений преобразования рациональных выражений. Учащиеся более наглядно будут видеть использование тех или иных формул и периодически обращаться к ним для формирования умения применять формулы в разных алгебраических задачах. Также, учитывая, что в 8-11 классах не используются формулировки тех понятий, которые закладываются в 7 классе, обращаясь к такому справочнику, обучающиеся будут поддерживать связь с изученным в 7 классе материалом.

Так, например, задание для 9 класса формулируется так:

Задание. Упростите выражение: $25c(4c + 2 - 3a) - 5c(20c + 1 - 15a)$

Здесь мы видим, что нам понадобится правило умножения одночлена на многочлен. Таким образом, после выполнения этого действия мы получим многочлен: $100c^2 + 50c - 75a - 100c^2 - 5c + 75a$. Следующим этапом будет приведение подобных членов многочлена, и в результате мы получим ответ: **45c**.

В качестве ещё одного примера возьмём несколько заданий из 8-11 классов и проанализируем их. (Рисунок 6)

8 класс	<u>Задание: Решите уравнение.</u> $(7a + 3)(7a - 3) - (3 - 4a)(4a + 3)$
9 класс	<u>Задание: Решите неравенство.</u> $4z^2 - 4z(z + 5) \geq 100$
10 класс	<u>Задание: Упростите функцию</u> $5x(2x^2 - 3x + 1)(x^3 + 2x) - 15x^5$ <u>и найдите её производную</u>
11 класс	<u>Задание: Выполните действия.</u> $(0,6 - \sqrt[4]{g}) \cdot (0,36 + 0,6\sqrt[4]{g} + \sqrt{g})$

Рисунок 6. Задания 8-11 классов

Если внимательно посмотреть на математические выражения, содержащиеся в заданиях, то можно сделать вывод о том, что во всех заданиях используются многочлены. В задании 8 класса необходимо использовать формулу разности квадратов, в задании 9 класса – правило умножения одночлена на многочлен, в задании 10 класса используются правила умножения одночлена на многочлен, а также правило умножения многочлена на многочлен. В задании 11 класса нужно воспользоваться правилом умножения многочлена на многочлен. В некоторых из представленных заданиях также необходимо использовать правило приведения подобных членов многочлена.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что материал, изученный в 7 классе, встречается и в дальнейшем при изучении алгебры. Поэтому очень важно применять различные способы, способствующие поддержанию связи материала 7-го класса и материала остального курса алгебры.

Использование подобных визуальных средств обучения помогает представить информацию в ясной, привлекательной и убедительной форме, даёт их целостное видение, облегчает запоминание содержащейся в сборнике

информации, а также обеспечивает повышение эффективности обучения и развития потребностей обучающихся в процессе обучения.

Все формулы сокращённого умножения можно прочитать математически. Так, например, сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат разности. Но такие формулировки не совсем легки для запоминания, поэтому я предлагаю такое средство, как представление формул в виде небольшого стихотворения с добавлением визуального представления:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

*Как проблему мне решить и сумму кубов разложить?
Ладонкой кубики прикрой – первая скобка пред тобой!
Вторая скобка – их квадраты, произведёную тоже рады.
А вот минус один раз проявляет рвение:
То в первой скобке он стоит, то перед произведением!*

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

*Чтоб сумму умножить на разность, ребята,
Вы запишите мне разность квадратов!*

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

*Чтоб сумму возвести в квадрат и не сидеть нам без движенья,
В квадрат нам нужно возвести оба этих выраженья.
Потом умножить их на два (мы это сделать сможем),
Ответ получим, если все мы результаты сложим!
А если в скобке «минус» стойкий, то ставь его лишь перед
двойкой!*

Такой способ представления информации относится к символическому/вербальному представлению. Использование такого способа

позволит обучающимся не только запомнить формулы, но и записать их алгебраически.

Упрощение рациональных выражений – это применение тождественных преобразований, с целью упростить запись выражения (сделать его короче и удобнее для дальнейшей работы). Для преобразования рациональных выражений нам также потребуются формулы сокращенного умножения.

Как показывает практика, обучающимся сложно запомнить формулы сокращенного умножения. Для упрощения запоминания формул квадрата суммы (разности) и куба суммы (разности) можно воспользоваться треугольником Паскаля. Треугольник Паскаля – это бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму.[23][25] В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Назван в честь Блеза Паскаля. Числа, составляющие треугольник Паскаля, возникают естественным образом в алгебре, комбинаторике, теории вероятностей, математическом анализе, теории чисел. [20]

Использовать треугольник Паскаля в нашем случае для упрощения запоминания формул квадрата суммы (разности) и куба суммы (разности) можно следующим образом. Для этого необходимо изобразить треугольник из трёх единичек, как показано на *Рисунок 7*:

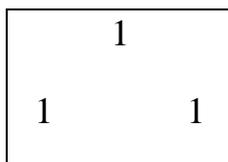


Рисунок 7. Единичный треугольник

Первая строка, с одной единичкой – нулевая. Потом идет первая, вторая, третья и так далее. Чтобы получить вторую строку, нужно по краям

снова приписать единички, а в центре записать число, полученное сложением двух чисел, стоящих над ним (Рисунок 8):

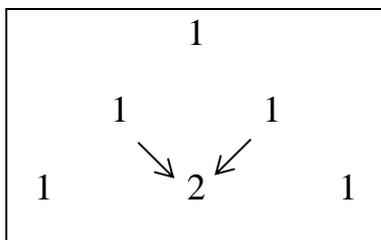


Рисунок 8. Треугольник Паскаля

Аналогичным образом составим третью строку и получим коэффициенты при разложении формул, как показано на Рисунок 9.

		1			
		1	1		
$(a + b)^2$	1	2	1		$a^2 + 2ab + b^2$
$(a + b)^3$	1	3	3	1	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Рисунок 9. Развёрнутый треугольник Паскаля

В примере рассмотрены квадрат и куб суммы, но в случае с квадратом и кубом разности знак при первом коэффициенте остаётся неизменным, а далее чередуется. Таким образом, изобразив на бумаге треугольник Паскаля, можно с лёгкостью соотнести его с формулами сокращённого умножения, и таким образом восстановить формулу в памяти.

При изучении формул сокращенного умножения наглядным будет анимационно изобразить, как «сворачиваются» и «разворачиваются»

формулы. Для выполнения такой анимации я воспользовалась программой для создания презентаций Power Point.

Первоначально на экране написана формула разности квадратов, как представлено на *Рисунок 10*.

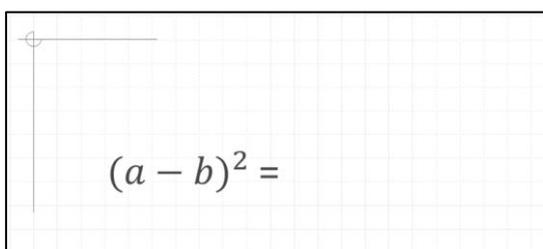

$$(a - b)^2 =$$

Рисунок 10. Квадрат разности

Затем стрелками указываются этапы раскрытия скобок, и постепенно появляется результат. Итоговый вид анимации представлен на *Рисунок 11*. В *Приложение 1* представлено пошаговое раскрытие.

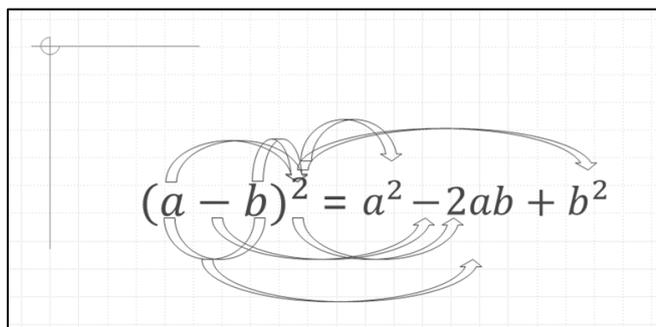

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Рисунок 11. Развёрнутый квадрат разности

Также, при изучении темы «Разложение многочлена на множители методом группировки», можно использовать такой метод визуализации как представление в виде алгоритма. Для этого необходимо выделить основные этапы алгоритма при группировке членов многочлена. Я рассмотрела алгоритм на примере многочлена $ac - 2ad - 2bd + bc$ и для наглядности

оформила его в презентации Power Point (Рисунок 12). Все этапы алгоритма последовательно появляются на экране, а также, каждый этап сопровождается анимационным представлением. Пошаговое представление можно посмотреть в Приложение 2.

$$ac - 2ad - 2bd + bc =$$

1. Выделим повторяющиеся буквенные множители в одночленах.

$$ac - 2ad - 2bd + bc =$$

2. Выпишем в последовательном порядке одночлены с одинаковыми буквенными множителями.

$$= \underbrace{ac + bc}_{1 \text{ группа}} - \underbrace{2ad - 2bd}_{2 \text{ группа}} =$$

3. Вынесем общий множитель за скобки у каждой группы одночленов.

$$= c(a + b) - 2d(a + b) =$$

4. В полученном результате вынесем общий множитель за скобки.

$$= (a + b)(c - 2d)$$

Рисунок 12. Метод группировки

Таким образом, хочется сделать вывод о том, что визуальное представление информации на уроках математики положительно влияет на усвоение этой информации обучающимися. Визуализация позволяет наглядно представить изучаемый материал школьникам, благодаря чему они могут также его воспроизвести в дальнейшем при решении различных задач.

Вывод по главе 2

Проведя разработанную диагностическую работу, состоящую из трёх методик, и подведя итоги, мы пришли к тому, что у учеников умение выполнять действия над рациональными выражениями сформировано на среднем уровне. Средний уровень сформированности умения говорит о том, что обучающимся недостаточно знаний, которые необходимы для выполнения действий над рациональными выражениями, а это говорит о том, что ученикам нелегко даётся запоминание формул, применяемых для преобразования рациональных выражений. В свою очередь, на запоминание может успешно повлиять визуальное представление изучаемого материала.

Визуализировать можно как понятия, так и различные формулы. Это можно организовать с использованием видеоизображения (анимации), иллюстрации, рисунка или картинка, а также образа, графика или чертежа, различных карт, схем и т.д. Как показывает практика, эффективнее всего влияет на формирование умения компьютерная визуализация, т.к. именно благодаря ей можно более наглядно отобразить изучаемый материал.

Многочисленны разработаны способы визуального представления информации по теме «Действия над рациональными выражениями», которые представлены и описаны в §2.3. К ним относятся символически-вербальное представление, мини-сборник с формулами, необходимых для выполнения действий над рациональными выражениями. Это важно по той причине, что обучающиеся сталкиваются с использованием этих формул на протяжении всего курса алгебры. Именно поэтому стоит разработать такой сборник, которым обучающиеся смогут пользоваться в процессе обучения.

Кроме того, я предлагаю анимационное представление раскрытия формулы квадрата разности, визуальное представление выполнения алгоритма метода группировки. На примере формулы разности квадрата с использованием программы для создания презентаций Power Point я изобразила, как «разворачивается» формула. В случае в методом

группировки я воспользовалась методом визуального представления алгоритма и изобразила его в программе для создания презентаций Power Point. Оба перечисленные способа относятся к компьютерной визуализации. Такой способ позволит обучающимся с лёгкостью запомнить формулы и способы их применения. Кроме того, в §2.3 представлен способ лёгкого запоминания формул сокращенного умножения с помощью треугольника Паскаля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По завершению работы была достигнута основная цель – разработаны средства визуализации, которые могут повлиять на успешное формирование у обучающихся умения выполнения действий над рациональными выражениями.

На пути к достижению цели были решены следующие задачи:

- ✓ изучена структура действий над рациональными выражениями;
- ✓ исследованы школьные учебники для определения объёма изучения преобразований рациональных выражений в 7 классе;
- ✓ разработана и проведена диагностическая работа в 9 классе для выявления у обучающихся уровня сформированности умения выполнять действия над рациональными выражениями;
- ✓ подведены и проанализированы результаты проведённой диагностической работы;
- ✓ выявлен уровень сформированности у обучающихся умения выполнения действий над рациональными выражениями;
- ✓ разработаны способы визуализации действий над рациональными выражениями для успешного формирования умения.

В первой главе были рассмотрены роль и место рациональных выражений в школьном курсе математики, а также возможные средства и методы визуализации на уроках математики в разных классах. Во второй главе представлена разработанная диагностическая работа по определению уровня сформированности у обучающихся 9 класса умения выполнения действий над рациональными выражениями, подведены итоги этой диагностической работы. Кроме того, во второй главе представлены разработанные средства визуализации, необходимые для успешного формирования у обучающихся умения выполнять действия над рациональными выражениями.

Данное исследование показало, что повысить уровень сформированности умения выполнения действий над рациональными выражениями возможно, если в процессе формирования умения применить средства визуализации.

Библиографический список

1. Баландина И.В. Компьютерная визуализация как развитие дидактического принципа наглядности // Психология и педагогика: методика и проблемы практического применения – Новосибирск, 2010.- №12-2. – С.9-13.
2. Балашов, Ю. В. Когнитивно-визуальный подход к обучению математике как эффективное средство математического развития учащихся / Ю. В. Балашов. — Текст // Педагогическое мастерство : материалы V Междунар. науч. конф. (г. Москва, ноябрь 2014 г.). — Москва : Буки-Веди, 2014. — С. 62-65. — URL: <https://moluch.ru/conf/ped/archive/144/6562>
3. Баум И.В. Тождественные преобразования выражений/ И.В. Баум, Ю.Н. Макарычев // Преподавание алгебры в 6-8 классах / Сост. Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк.– М.: Просвещение, 1980.С. 77-90.
4. Блох А.Я. О тождественных преобразованиях в курсе алгебры VI-VIII кл. [Текст] / Метод. рекомендации и указания по методике преподавания математики в средней школе: Сб. статей / А.Я. Блох. - М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 2005.– 83 с.
5. Визуализация учебной информации как неотъемлемая часть процесса обучения. Методика использования инфографики [Электронный ресурс] // URL: <https://znanio.ru/medianar/53>
6. Громова Т.Н. Применение когнитивно-визуального подхода в обучении математике // URL: <https://www.calameo.com/books/001458192001ca1c33445>
7. Данилов О. Е. Компьютерная визуализация распределений физических величин в пространстве // Молодой ученый. –2013. –№11. – С. 582-587.
8. Дмитриев Д.В. Преобразование // Толковый словарь русского языка Дмитриева [Электронный ресурс] // URL: <https://dic.academic.ru/contents.nsf/dmitriev/>

9. Калыбек, Н. К. Диагностика потребности детей в визуализации учебного материала / Н. К. Калыбек. — Текст : непосредственный // Молодой ученый. — 2017. — № 10.1 (144.1). — С. 44-47. — URL: <https://moluch.ru/archive/144/40410>
10. Крючкова В.В. Об опыте работы с правилами в теме «Многочлены». В.В. Крючкова // Математика в школе. - 2004 - №5.
11. Кузнецова Н.Н. Использование методов визуализации на уроках математики // Городское методическое объединение учителей математики. URL: http://gmomatematik.blogspot.ru/p/blog-page_1383.html
12. Макарычев Ю.Н. Тождественные преобразования многочленов / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин // Математика в школе. - 1973. -№ 31. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец./ А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др; Сост. В.И. Мишин.- М.: Просвещение, 1987.-Гл.5.- 416 с.
13. Мерзляк А.Г.Алгебра: 7 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, МС. Якир. - М., 2013. - 256 с.
14. Миндюк Н.Г. Основные этапы формирования навыков тождественных преобразований алгебраических выражений классов/ Н.Г.Миндюк//Математика в школе. – 1985 – №5.
15. Мордашева Т.Ю. Использование приложения GeoGebra на уроках математики // Педагогический опыт: теория, методика, практика : материалы IX Междунар. науч.–практ. конф. (Чебоксары, 14 окт. 2016 г.) / редкол.: О.Н. Широков [и др.] – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2016. – С. 170-173. – ISSN 2412-0529.
16. Мордовина О.Н. Визуализация учебной информации как неотъемлемая часть процесса обучения [Электронный ресурс] // URL: <https://infourok.ru/vizualizaciya-uchebnoj-informacii-kak-neotemlemaya-chast-processa-obucheniya-4022398.html>

17. Мухортова, Д. Д. Визуалы, аудиалы, кинестетики / Д. Д. Мухортова. — Текст // Молодой ученый. — 2016. — № 12 (116). — С. 787-789. — URL: <https://moluch.ru/archive/116/31787>
18. Николаева С.В. Методика обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы. / Николаева С.В. // Учебное пособие / 2016. — 78 с.
19. Никольский С.М. Алгебра 7 класс / С.М. Никольский, М.К.Потапов — Учебное пособие / 2013. — 289 с.
20. Паскаля треугольник // Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. — М.: Педагогика, 1985. — С. 230-232. — 352 с.
21. Потапова, Н. В. Природа визуализации / Н. В. Потапова. — Текст // Молодой ученый. — 2010. — № 11 (22). — Т. 2. — С. 64-66. — URL: <https://moluch.ru/archive/22/2265/>
22. Рыжов, С. С. Подходы к визуализации вычислительных процессов / С. С. Рыжов. — Текст // Молодой ученый. — 2018. — № 16 (202). — С. 138-144. — URL: <https://moluch.ru/archive/202/49636>
23. Соловьева, О. А. Комбинаторные приложения треугольника Паскаля / О. А. Соловьева. — Текст // Молодой ученый. — 2016. — № 11 (115). — С. 75-79. — URL: <https://moluch.ru/archive/115/30958>
24. Темуров, С. Й. Основные визуальные способы представления и обработки учебной информации по математическим дисциплинам / С. Й. Темуров, Б. Н. Алимов, У. Х. Халимов. — Текст : непосредственный // Молодой ученый. — 2013. — № 6 (53). — С. 733-736. — URL: <https://moluch.ru/archive/53/7113/> (дата обращения: 08.06.2020).
25. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. — М.: Наука, 1979. — 48 с. — (Популярные лекции по математике). — 200 000 экз.
26. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Текст] / М-во образования и науки Рос. Федерации. — М.: Просвещение, 2010. — 6 с.

27. Федорова Е. И. Инфографика как метод визуализации данных [Электронный ресурс] // URL: <http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/110801/1/%D1%81%D1%82%D1%80.145-149.pdf>
28. Филиппова, Н. В. Применение систем компьютерной математики и компьютерных технологий при изучении дисциплин высшей математики как один из видов педагогических технологий / Н. В. Филиппова. — Текст // Молодой ученый. — 2009. — № 7 (7). — С. 254-259. — URL: <https://moluch.ru/archive/7/500>
29. Черкасов Р.С., Столяр А.А. Методика преподавания математики в средней школе. М.: Просвещение, 2010.—336 с.
30. Шелудкова Е.А. Презентация как способ визуализации результатов профессиональной деятельности // Научное сообщество студентов XXI столетия. ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ: сб. ст. по мат. XLII междунар. студ. науч.-практ. конф. № 5(41). URL: [https://sibac.info/archive/technic/5\(41\).pdf](https://sibac.info/archive/technic/5(41).pdf)

Приложение 1

Шаг 1

$$(a - b)^2 = a^2$$

Шаг 2

$$(a - b)^2 =$$

Шаг 3

Шаг 4

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab +$

$(a - b)^2 = a^2 -$

Шаг 5

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Шаг 1

$$\underline{ac} - \underline{2ad} - \underline{2bd} + \underline{bc} =$$

Шаг 2

$$ac - 2ad - 2bd + bc =$$

Шаг 3

Шаг 4

$$\begin{aligned} & \underline{ac} - \underline{2ad} - \underline{2bd} + \underline{bc} = \\ & = ac + bc - 2ad - 2bd = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{ac} - \underline{2ad} - \underline{2bd} + \underline{bc} = \\ & = \underline{ac + bc} - \underline{2ad - 2bd} = \\ & \quad \quad \quad \text{1 з'явна} \quad \quad \quad \text{2 з'явна} \end{aligned}$$

Шаг 5

Шаг 6

$$\begin{aligned} & \underline{ac} - \underline{2ad} - \underline{2bd} + \underline{bc} = \\ & = \underline{a\textcircled{c} + b\textcircled{c}} - \underline{2ad - 2bd} = \\ & \quad \quad \quad \text{1 з'явна} \quad \quad \quad \text{2 з'явна} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{ac} - \underline{2ad} - \underline{2bd} + \underline{bc} = \\ & = \underline{a\textcircled{c} + b\textcircled{c}} - \underline{2ad - 2bd} = \\ & \quad \quad \quad \text{1 з'явна} \quad \quad \quad \text{2 з'явна} \end{aligned}$$

Шаг 7

$$\begin{aligned} & \underline{ac} - 2ad - 2bd + \underline{bc} = \\ & = \underbrace{ac + bc}_{1 \text{ згрупа}} - \underbrace{2ad - 2bd}_{2 \text{ згрупа}} = \\ & = c(a + b) - 2d(a + b) = \end{aligned}$$

Шаг 8

$$\begin{aligned} & \underline{ac} - 2ad - 2bd + \underline{bc} = \\ & = \underbrace{ac + bc}_{1 \text{ згрупа}} - \underbrace{2ad - 2bd}_{2 \text{ згрупа}} = \\ & = c(a + b) - 2d(a + b) = \end{aligned}$$

Шаг 9

$$\begin{aligned} & \underline{ac} - 2ad - 2bd + \underline{bc} = \\ & = \underbrace{ac + bc}_{1 \text{ згрупа}} - \underbrace{2ad - 2bd}_{2 \text{ згрупа}} = \\ & = c(a + b) - 2d(a + b) = \\ & = (a + b)(c - 2d) \end{aligned}$$

