

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА»
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Выпускающая кафедра: математики и методики обучения математике

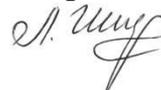
Можаев Александр Владимирович
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ
(ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ В СИСТЕМЕ
ПРЕДПРОФИЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ ДЕВЯТИКЛАССНИКОВ)

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) образовательной программы: Математика

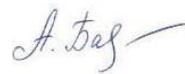
ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой д.п.н., профессор Шкерина Л.В.



Руководитель: к.ф.-м.н., доцент каф. МиМОМ

Багачук А.В.



Дата защиты _____

Обучающийся Можаев А.В.



Оценка _____
прописью

Красноярск 2020

Содержание

<i>Введение</i>		4
<i>Глава 1. Предпрофильная подготовка девятиклассников</i>		8
§ 1. Информационные и организационные аспекты предпрофильной подготовки.....		8
§ 2. Профильная ориентация как компонент предпрофильной подготовки.....		11
§ 3. Курсы по выбору в рамках предпрофильной подготовки.....		13
§ 4. Требования к программам курсов по выбору.....		16
<i>Глава 2. Элективный курс «Функции, их свойства и графики»</i>		19
§ 1. Анализ представления информации по функционально-графической линии в программах и учебниках по математике различных авторов для общеобразовательных школ (VII – IX кл.).....		19
§ 2. Элективный курс «Функции, их свойства и графики».....		27
1. Программа		27
2. Методические рекомендации.....		30
Занятие 4. Тема. Кусочные функции.....		30
Занятие 8. Тема. Биквадратная функция.....		35
Занятие 13. Тема. Действия с графиком.....		43
Занятие 14. Тема. Графический способ решения систем уравнения и неравенств.....		50
Занятие 16. Тема. Звездный час функции.....		55
3. Библиографический список.....		60
§ 3. Аprobация разработанного элективного курса.....		62
<i>Заключение</i>		65

<i>Библиографический список</i>	66
---------------------------------------	----

Введение

«Результаты освоения основной образовательной программы основного общего образования должны отражать формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию, осознанному выбору и построению дальнейшей индивидуальной траектории образования на базе ориентировки в мире профессий и профессиональных предпочтений, с учётом устойчивых познавательных интересов, а также на основе формирования уважительного отношения к труду, развития опыта участия в социально значимом труде» [44, с. 5].

Согласно закону «Об образовании» [45] основное общее образование – завершающий уровень обязательного образования в Российской Федерации. Поэтому одним из базовых требований к содержанию образования на этом уровне является достижение выпускниками уровня функциональной грамотности, необходимой в современном обществе, как по математическому и естественнонаучному, так и по социально-культурному направлениям.

Одной из важнейших задач основной школы является подготовка обучающихся к осознанному и ответственному выбору жизненного и профессионального пути, о чем свидетельствуют стратегические документы, принятые в последние годы [33, 44]. Условием решения этой задачи является последовательная индивидуализация обучения, предпрофильная подготовка на завершающем этапе обучения в основной школе.

В концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования отмечается, что реализация идеи профилизации обучения на старшей ступени ставит выпускника основной ступени перед необходимостью выбора – предварительного самоопределения в отношении профилирующего направления собственной деятельности.

Предпрофильная подготовка это важный компонент учебно - воспитательного процесса, одно из главных условий процесса индивидуализации обучения и подготовки обучающихся к важному выбору -

их профессиональному самоопределению, от правильности которого будет зависеть в целом их жизненный успех. В связи с этим предпрофильная подготовка отображается в виде системы информационной, организационной педагогической и психологической поддержки обучающихся основной школы, способствующей их самоопределению при окончании основного общего образования. К предпрофильной подготовке относится информирование и ориентация обучающихся девятых классов в отношении их возможного выбора профиля обучения в старшей школе, направлений для продолжения обучения в системе профессионального образования.

Среди специальных курсов, которые будут наполнять предпрофильную подготовку, предлагаются:

- предметные курсы, которые ориентированны на расширение знаний по конкретной учебной дисциплине;
- ориентировочные курсы (или краткосрочные модули), способствующие выбору дальнейшего профиля обучения.

Организация предпрофильного обучения предполагает обеспечение условий для создания обучающимся индивидуального образовательного маршрута, который позволит ему посетить несколько курсов по выбору (элективных курсов) в течении учебного года. Общеобразовательные организации должны предлагать элективные курсы разной направленности, ориентированные на интересы и склонности разных групп обучающихся.

К сожалению, в настоящее время нет достаточного количества таких разработанных курсов. Разработка их содержания и методического обеспечения является весьма важной и актуальной.

На наш взгляд, элективный курс «Функции, их свойства и графики» может быть востребован обучающимися 9-го класса по ряду причин.

Прежде всего, математика – гуманитарный предмет, который позволяет субъекту правильно ориентироваться в окружающей действительности. Реальные процессы математика описывает на особом математическом языке в виде математических моделей. Математические модели напрямую связаны с

функциями. Одним из требований к уровню подготовки выпускников основной школы является требование: «в результате изучения математики обучающийся должен понимать, как математически определенные функции могут описывать реальные зависимости; приводить примеры такого описания» [44, с. 23]. Во многих случаях кусочные функции являются математическими моделями реальной ситуации. Однако на их изучение в содержании школьного курса математики уделяется мало внимания и времени.

Понятие функциональной зависимости, является одним из главных в математике, оно охватывает все ее приложения, и, как ни одно другое, приучает воспринимать величины в их реальной изменчивости, во взаимной связи и обусловленности. Изучение поведения функций и построение их графиков представляют собой важный раздел школьной программы. Для понимания курса алгебры в целом важно, прежде всего, чтобы обучающиеся полноценно усвоили функции. Это значит, что нужно организовать их деятельность по изучению той или иной функции так, чтобы рассмотреть новый объект системно, с разных сторон, в разных ситуациях. Но в основной школе материал, связанный с этим вопросом, изучается не достаточно полно.

Между тем, элективный курс на тему «Функции, их свойства и графики», на наш взгляд, будет способствовать подготовке обучающихся к восприятию математики на профильном уровне в старших классах.

Некоторые задания Единого государственного экзамена связаны с кусочными функциями, графическим способом решения систем уравнений, аналитическим способом решения систем неравенств (хотя графический способ, в некоторых случаях, был бы намного быстрее и проще). Однако, у выпускников они вызывают затруднения.

Из всего вышеизложенного, можно сделать заключение об актуальности темы выпускной квалификационной работы «Функции, их свойства и графики (элективный курс по математике в системе предпрофильной подготовки девятиклассников)».

Цель работы: разработка и апробация элективного курса «Функции, их свойства и графики» в системе предпрофильной подготовки девятиклассников.

Объект исследования: предпрофильное обучение в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: элективный курс «Функции, их свойства и графики» для обучающихся 9-х классов общеобразовательной школы.

Гипотеза: элективный курс «Функции, их свойства и графики» будет способствовать ориентации девятиклассников на те профили обучения в старших классах, где математика относится к числу профилирующих предметов, если его содержание и методика проведения будут разработаны в соответствии с требованиями, которые предъявляются к структуре и содержанию элективных курсов.

В соответствии с целью исследования, определены следующие **задачи:**

1. Сравнительный анализ представления информации по функционально-графической линии в программах и учебниках по математике различных авторов для общеобразовательных школ (VII – IX кл.) с целью отбора содержания элективного курса.
2. Составление программы элективного курса.
3. Методическая разработка занятий.
4. Проведение апробации курса.

Выпускную квалификационную работу составляют: введение, две главы, заключение и библиографический список.

Глава 1. Предпрофильная подготовка девятиклассников

Смыслом предпрофильной подготовки является создание такого образовательного пространства, которое будет способствовать самоопределению обучающихся 9 класса, через организацию курсов по выбору, информационно - просветительскую работу и профильную ориентацию. Одной из основных задач предпрофильной подготовки в девятом классе является совокупная работа с обучающимися по мотивированному и жизненно значимому выбору дальнейшего пути обучения, которое позволит им в дальнейшем быть успешными.

Перед девятиклассником после окончания основного курса школы будет стоять не простая задача не только правильного, осознанного выбора профиля, но и перспективы поступления на этот профиль и успешного обучения на нем.

Обучающийся и его родители (законные представители) после окончания основной ступени школы должны овладеть полной и достоверной информацией о возможных путях продолжения образования, о доступных образовательных учреждениях, находящихся на данной территории, которые будут удовлетворять их интересам и предлагают профиль дальнейшего обучения, который интересен им.

§ 1. Организационно-методические аспекты предпрофильной подготовки

Кто владеет информацией, тот владеет миром.

Современная пословица.

Одной из задач, решаемых в процессе введения профильного обучения, является работа по организации информирования. Предпрофильная подготовка должна начинаться с планирования действий по информированию обучающихся и их семей об образовательных возможностях территориально доступной им муниципальной образовательной сети. При этом информация необходима каждому участнику образовательного процесса в максимальном

объеме. Информацию об учреждениях, где можно получить или продолжить образование, посетить курсы по выбору, пройти психологическое тестирование, пробу по предметным областям, тестовые или рейтинговые задания, продолжить обучение по выбранному профилю, обучающиеся, родители (законные представители), педагоги, руководители образовательных учреждений должны получить в муниципальном управлении образования.

В соответствии с этим, в каждой муниципальной сети в зависимости от ее возможностей должны быть определены формы и методы информирования родителей и обучающихся о возможных путях и способах организации предпрофильной подготовки на следующем уровне общеобразовательной школы.

Одним из лучших подходов организации информирования обучающихся и родителей (законных представителей) является образовательная карта.

Образовательная карта – это карта муниципального района, на которой нанесены все образовательные учебные заведения, а также учреждения дополнительного образования, начального профессионального образования и другие организации и учреждения, на в которых можно осуществлять предпрофильную подготовку и профильное обучение.

Образовательная карта может быть создана и издана в виде буклета, брошюры или плаката, а также может быть представлена в электронном виде, на образовательном сайте Управления образования и сайтах школ, которые располагаются в данном муниципальном районе.

Обязательными составляющими образовательной карты являются:

1. Общая характеристика образовательной сети района, которая включает в себя реестр образовательных учреждений, специфику их образовательных программ, предпрофильной подготовки и профильного обучения.
2. Местоположение образовательных организаций на карте (схеме) района с направлениями движения общественного транспорта, которые следуют до места обучения. Полезно, чтобы в дополнение к маршрутам

было представлено расписание движения транспорта, указано расстояние между образовательными организациями.

3. Рубрикация образовательных организаций по приказу реализуемых профильных образовательных программ с их конкретными адресами.
4. Информация о каждой образовательной организации, с указанием полного адреса, телефонных номеров, структуры организации, специфики образовательной программы. Характеристика направлений специализации, количества обучающихся, педагогический состав, материально-техническое оснащение, связи с вузами. Правила и критерии зачисления в 10 класс общеобразовательной организации, реализующей ту или иную профильную программу. Разъяснение прав обучающихся, специфика портфолио и т.д. Программа предпрофильной подготовки с указанием возможного перечня курсов по выбору, факультативов. Дата проведения дней открытых дверей, дни и часы приема посетителей администрацией школы. Информация о координаторе, курирующем программы профильного обучения в данной образовательной организации.
5. Условия получения профильного образования в других образовательных организациях района: учреждениях дополнительного образования, заочных школах и т.д.
6. Информация о центрах или пунктах профориентации, в которых можно получить соответствующие консультации и рекомендации по выбору профиля обучающимся.
7. Полная информация о работниках районной системы образования, отвечающих за программы профильного образования и предпрофильной подготовки.

§ 2. Профильная ориентация как компонент предпрофильной подготовки

Необходимым условием создания образовательного пространства, способствующего профессиональному самоопределению обучающихся основного уровня, является введение предпрофильной подготовки.

С этой целью в школе:

- создаются классы предпрофильной подготовки, где организуется целенаправленная опережающая, т.е. профориентационная работа по освоению обучающимися самого механизма принятия решения, поля возможностей и ответственности, в которой принимают участие классные руководители, школьный психолог (анкетирование, беседы с родителями (законными представителями) и др.);
- увеличиваются часы вариантного (школьного) компонента учебного плана в выпускном классе основного уровня общего образования;
- в рамках предпрофильной подготовки школьников готовят не только усваивать информацию, но и обучают работать с ней различными способами.

К основным целям профильной ориентации как составляющей предпрофильной подготовки относятся:

- создание условий для качественной подготовки выпускников основной школы к социальному, профессиональному и культурному самоопределению.
- психолого-педагогическое сопровождение обучающихся в выборе профиля обучения, направления дальнейшего образования и возможного трудоустройства с учётом ситуации на рынке труда;

В процессе реализации целей предполагается пройти три этапа подготовки обучающихся к выбору профиля: пропедевтический, основной и завершающий.

Пропедевтический этап позволяет дифференцировать обучающихся в соответствии с их потребностями в процессе обучения в профильной школе путем пробы сил на курсах по выбору и т.п. На этом этапе осуществляется:

- презентация образовательной карты муниципального района;
- предварительная диагностика образовательного запроса обучающихся с учетом мнения их родителей (законных представителей), основных мотивов предстоящего выбора, интересов и склонностей (на основе анкетирования и собеседования).

На основном этапе предусматривается:

- обучение способам принятия решений о выборе индивидуального маршрута образовательной деятельности;
- организация процедур психолого-педагогической диагностики и самодиагностики, позволяющих сделать вывод о предрасположенности к тем или иным направлениям образовательной деятельности в условиях профильного обучения;
- анализ образовательных ситуаций, которые создают условия для выявления основных ограничителей (затруднений, проблем) свободы выбора профиля обучения.

На завершающем этапе:

- реализуются пробы выбора профиля обучения, серии эвристических ориентированных заданий, прогнозирующих соответствие личностной заинтересованности школьника в обучении на данном профиле и его возможностей требованиям избираемого профиля;
- используют матрицы и схемы альтернативного выбора, позволяющие формулировать, ранжировать и наглядно, количественно соотносить аргументы «за и против» совершаемого выбора профиля.

Сложным и не имеющим до сих пор однозначного, полного ответа в рамках предпрофильной подготовки, остается вопрос определения критериев готовности обучающихся 9 классов к выбору профиля.

При завершении профильной подготовки выпускников основной школы желательно учитывать не только академические достижения, но и портфолио, особенно, раздел «Отзывы и рекомендации». Именно в этом разделе, предполагается увидеть оценку ученика по различным аспектам его деятельности: отношение к обучению, к какому-либо конкретному разделу или предмету, изучаемому в рамках общеобразовательной школы или в системе дополнительного образования, к полученному опыту работы, социальным практикам, коммуникативной деятельности и т.п.

§ 3. Курсы по выбору в рамках предпрофильной подготовки

В рамках реализации профильного обучения и его начального уровня – предпрофильной подготовки – становятся нормой переходы из одного образовательного учреждения в другое. В 9 классе эти переходы вызваны необходимостью пробы сил через прохождение курсов по выбору, на старшем уровне общеобразовательной школы – необходимостью выбора профиля обучения, а также комфортности и доступности образовательного учреждения

Объективно оценить свои возможности, обучающимся помогут курсы по выбору, которые организуются в рамках предпрофильной подготовки в 9 классе школы. *Элективный курс предпрофильной подготовки* – обязательный для посещения учебный курс по выбору обучающихся, направленный на выбор или уточнение профиля дальнейшего обучения и (или) пути дальнейшего образования; реализуется за счет школьного компонента учебного плана [23].

Курсы по выбору в рамках предпрофильной подготовки подразделяются на две основных группы: предметно-ориентированные (пробные) и межпредметные (ориентированные) курсы. Исходя из основных задач, которые решаются в рамках реализации вышеназванных курсов, образовательное учреждение определяет необходимую направленность и перечень курсов.

При выборе и разработке курсов следует учитывать следующие факторы:

1. Набор предлагаемых курсов должен носить вариативный характер, их количество должно быть необходимым для реального выбора обучающихся.

Название курсов должно быть привлекательным для обучающихся, а сами курсы должны иметь интересное содержание. Перечень курсов лучше определить в конце 8 класса на основе собеседования, опросов, анкетирования, и т.п.

2. Нужно обеспечить такие условия в организации учебного процесса, которые позволяют обучающему изменять насыщение индивидуального учебного плана курсами по выбору как минимум два раза за учебный год. Поэтому нужно обратить особое внимание на их продолжительность. Чтобы обучающийся имел возможность поменять за учебный год несколько курсов по выбору, которые не должны быть длительными. Оптимальная продолжительность находится в пределах 6 -16 часов.
3. Наполнение курсов предпрофильной подготовки должно содержать в себе не только информацию, увеличивающую сведения по учебным предметам, но и знакомить обучающихся со способами деятельности, необходимыми для успешного изучения программы того или другого профиля.
4. Для повышения интереса и положительной мотивации к тому или иному профилю, содержание курсов предпрофильной подготовки может включать оригинальный материал, выходящий за рамки школьной программы.

Программы предметно-ориентированных курсов включают углубление отдельных тем основных общеобразовательных программ, а также их расширение, т.е. освоение некоторых тем, выходящих за пределы их содержания. Альтернативой таких курсов могут быть обычные факультативы, которые дополняют базовую программу, не нарушая ее целостности. Программы факультативов могут быть модифицированы, дополнены элементами подготовки к экзаменам по выбору.

В процессе реализации предметно-ориентированных (пробных) курсов по выбору решают следующие задачи:

- реализация обучающимся интереса к выбранному предмету;
- уточнение готовности и способности осваивать предмет на повышенном уровне;

- создание условий для подготовки к экзаменам по выбору, т.е. наиболее вероятным предметам будущего профилирования.

Межпредметные (ориентационные) курсы предполагают выход за рамки традиционных учебных предметов. Они знакомят школьников с комплексными проблемами и задачами, требующими синтеза знаний и способами их разработки в различных профессиональных сферах.

Задачами данных курсов являются:

- создание базы для ориентации обучающихся в мире современных профессий, планирования своей карьеры;
- ознакомление на практике со спецификой типичных видов деятельности, соответствующих наиболее распространенным профессиям, знакомство со спецификой современного рынка труда;
- поддержание мотивации обучающегося к тому или иному профилю.

Предпрофильная подготовка может реализовываться в виде различных комбинаций курсов предложенных типов. В процессе реализации курсов используются разнообразные подходы к организации занятий: как академическая лекция, семинары, уроки, диспуты, круглые столы так и проектная, исследовательская деятельность, практические занятия, игровые технологии и т.п. Грамотный подход в деятельности образовательной организации позволяет ей выполнять целенаправленную, опережающую работу по развитию у обучающихся способности принятия решений по выбору профиля, а выполняемые в ходе курсового обучения проекты и исследования могут пополнить портфель индивидуальных достижений – портфолио.

Учебный план предпрофильной подготовки имеет гибкую структуру. Она включает в себя три компонента. Из имеющихся 100 часов рекомендуется большую часть времени (ориентировочно 2/3, т.е. 2 часа в неделю) отводить на специально организованные, краткосрочные (от месяца до полугодия) курсы по выбору. Предполагается, что содержание этих курсов будет, прежде всего, способствовать самоопределению ученика относительно профиля обучения в старшей школе.

1/3 объема предпрофильной подготовки (30 – 35 часов в год) предполагается отводить на информационно - просветительскую работу (знакомство с образовательными учреждениями, в которых можно продолжить образование после окончания основной школы, изучение особенностей их образовательных программ, условий приема и т.д.), а также на мероприятия профориентационного характера: профессиональные пробы, психолого-педагогическую диагностику, консультирование. Таким образом, распределение времени учебного плана предпрофильной подготовки выглядит следующим образом:

Структура учебного плана предпрофильной подготовки

Курсы по выбору	70 часов
Информационная работа	15 часов
Профконсультирование, профориентационная работа	15 часов

§ 4. Требования к программам курсов по выбору

На основе анализа нормативной документации [4, 40], определяющей стратегические ориентиры развития предпрофильной подготовки обучающихся основной школы, а также научно-методической литературы по рассматриваемой проблематике мы выделяем следующие требования к программам курсов по выбору:

1. *Соответствие положению концепции профильного и предпрофильного обучения.* Программа должна позволять обучающимся осуществить пробы, оценить свои потребности и возможности и сделать обоснованный, правильный выбор профиля обучения в старшей школе.
2. *Степень новизны для обучающихся.* Программа должна включать новые для обучающихся знания, не содержащиеся в базовых программах.
3. *Мотивирующий потенциал программы.* Программа должна содержать знания, вызывающие познавательный интерес обучающихся и

представляющие ценность для определения ими профиля обучения в старшей школе.

4. *Полнота содержания.* Программа должна содержать все знания, необходимые для достижения запланированных в ней целей подготовки.
5. *Научность содержания.* В программу должны быть включены передовые научные знания и наиболее ценный опыт практической деятельности человека.
6. *Инвариантность содержания.* Включенный в программу материал может быть применён для различных групп обучающихся, за счёт обобщенности включенных в него знаний, их отбором в соответствии с общими задачами предпрофильной подготовки, а также модульным принципом построения программы.
7. *Степень обобщенности содержания.* Степень обобщенности включенных в программу знаний должна соответствовать поставленным в ней целям обучения и развития мышления обучающихся.
8. *Практическая направленность курса.* Программа должна позволять осуществлять эвристические пробы и формировать практическую деятельность школьников в изучаемой области знаний.
9. *Связность и систематичность учебного материала.* Развертывание содержание знаний в программе должно быть структурировано таким образом, что изучение всех последующих тем обеспечивается на основе усвоения предыдущих.
10. *Соответствие способов развертывания учебного материала поставленным в программе задачам.* Способ развертывания содержания учебного материала должен соответствовать стоящим в программе целям и задачам обучения.
11. *Выбор методов обучения.* Программа должна давать возможность проведения эвристических проб, что обеспечивается ее содержанием и использованием в преподавании активных методов обучения.

12. *Степень контролируемости.* Программа должна обладать достаточной для проведения контроля:

- операционностью и иерархичностью описания включенных в нее знаний;
- конкретностью определения результатов подготовки по каждой из ведущих тем или по программе в целом.

13. *Чувствительность к возможным сбоям.* Программа должна давать возможность установить степень достижения промежуточных и итоговых результатов и выявить сбой в прохождении программы в любой момент процесса обучения.

14. *Реалистичность с точки зрения ресурсов.* Материал программы должен быть распределен во времени с учетом его достаточности для качественного изучения знаний и получения запланированных результатов, устранения возможных при прохождении программы сбоев, использование наиболее эффективных (активных) методов обучения.

15. *Эффективность затрат времени на реализацию учебного курса.* Программой должна быть определена такая последовательность изучения материала, которая является наиболее быстрой и доступной в достижении поставленных целей. Это последовательность, при которой на восстановление забытых или уже утраченных знаний по какой-то теме не нужно будет тратить много времени, изучение нового материала будет опираться на недавно пройденный и легко восстанавливающийся в памяти учебный материал.

Глава 2. Элективный курс «Функции, их свойства и графики»

§ 1. Анализ представления информации по функционально-графической линии в программах и учебниках по математике различных авторов для общеобразовательных школ (VII – IX кл.)

Анализируя программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев составителя Л.В. Кузнецовой [40], мы выяснили, что, в результате изучения курса математики по теме «Функции» обучающиеся должны:

- понимать, что функция – это математическая модель, позволяющая описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами, что конкретные типы функций (прямая и обратная пропорциональность, линейная, квадратичная функции) описывают большое разнообразие реальных зависимостей;

- правильно употреблять функциональную терминологию (значение функции, аргумент, график функции, область определения, возрастание и др.), понимать ее в тексте, в речи учителя, в формулировке задач;

- находить значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком, решать обратную задачу;

- находить по графику функции промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значения;

- строить графики функций: линейной, прямой и обратной пропорциональности, квадратичной, корень квадратный, модуль;

- использовать графики функций для решения уравнений, неравенств и систем;

- интерпретировать в несложных случаях графики реальных зависимостей между величинами, отвечая на поставленные вопросы.

Проанализировав литературу ([8] – [10]), ([16] – [18]), ([19] – [21]), ([24] – [26]), ([35] – [37]), можно сделать следующие выводы.

1. «Математика 7: Арифметика. Алгебра. Анализ данных», «Математика 8: Алгебра. Функции. Анализ данных», «Математика 9: Алгебра. Функции. Анализ данных», авторы: Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.

7 класс: рассматриваются различные множества точек на числовой прямой и на координатной плоскости (на числовой прямой – лучи, отрезки, интервалы, на координатной плоскости – горизонтальные и вертикальные прямые, полуплоскости, полосы, прямоугольники).

Осуществляется знакомство с некоторыми графиками функций. График здесь выступает как геометрическое изображение соотношений, связывающих координаты точек на плоскости. Формируются умения быстро строить степенных функций: $y = x$, $y = -x$, $y = x^2$, $y = x^3$.

Рассматривается построение графиков кусочно-заданных зависимостей. Здесь же – график функции $y = |x|$. Авторы уделяют внимание работе с графиками реальных зависимостей. Акцент делается на умение считывать с графика нужную информацию.

8 класс: вводится функциональная терминология, акцент не на собственно определение понятия функции, а на многообразие использования этого термина в математическом языке. При рассмотрении графиков формируется представление об общих свойствах функции (нули, промежутки монотонности, сохранение знака).

Рассматриваются процессы, протекающие с постоянной скоростью, которые описывает линейная функция. В заключении рассматривается функция $y = \frac{k}{x}$, ее график и свойства.

9 класс: сначала обучающиеся знакомятся с функцией $y = ax^2 + bx + c$. Им сообщается, что графиком квадратичной функции является парабола, рассматриваются готовые графики квадратичных функций и анализируются их особенности (наличие оси симметрии, вершины, направление ветвей,

расположение по отношению к оси абсцисс), строится парабола по точкам с опорой на ее симметрию.

Далее рассматриваются свойства и график функции $y = ax^2$, затем показывается, как при сдвигах параболы $y = ax^2$ вдоль осей координат получаются графики новых квадратичных функций. Формируется умение находить вершину и ось симметрии графиков квадратичных функций, заданных формулами

$$y = ax^2 + q, \quad y = a(x + p)^2, \quad y = a(x + p)^2 + q.$$

Рассматриваются примеры, связанные с переносом вдоль осей координат произвольных графиков.

Доказывается, что график любой квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ может быть получен с помощью сдвигов вдоль координатных осей параболы $y = ax^2$. Значительное место отводится задачам прикладного характера, которые решаются с опорой на графические представления. В завершении рассматривается графический метод решения неравенств.

2. «Алгебра 7», «Алгебра 8», «Алгебра 9», авторы: Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова.

В 7 классе обучающиеся знакомятся с понятием функция, ее областью определения, способами задания, графиком функции, функциями $y = kx + b$, $y = kx$, $y = x^2$, $y = x^3$ и их графиками.

Функция трактуется как зависимость одной переменной от другой. Идет работа по формированию у обучающихся умений находить по формуле значение функции по известному значению аргумента, выполнять то же задание по графику и решать с помощью графика обратную задачу.

Функциональные понятия получают свою конкретизацию при изучении линейной функции и ее частного вида – прямой пропорциональности. Особое внимание обучающихся обращается на то, как влияет знак коэффициента k на расположение графика функции $y = kx$, где $k \neq 0$ в координатной плоскости,

как зависит от значений k и b взаимное расположение графиков двух функций вида $y = kx + b$. Изучение функции сопровождается рассмотрением примеров реальных зависимостей между величинами, что способствует усилению прикладной направленности курса алгебры.

Изучение функции $y = \sqrt{x}$, ее свойств и графика составляет продолжение функциональной линии в 8 классе. Авторы предлагают остановиться на вопросе о связи функции $y = \sqrt{x}$ с функцией $y = x^2$, где $x \geq 0$.

В 9 классе изучается квадратичная и степенная функции. Вводятся понятие функции, понятие о возрастании и убывании функции. Рассматривается функция $y = |x|$, ее свойства и график.

Изучение квадратичной функции начинается с рассмотрения функции $y = ax^2$, ее свойств и особенностей графика, а также других частных видов квадратичной функции: $y = ax^2 + b$, $y = a(x - m)^2$. Далее изучается квадратичная функция, записанная в общем виде, простейшие преобразования графиков функций. Внимания учащихся обращается на то, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ может быть получен из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов вдоль осей. Приемы построения графика квадратичной функции отрабатываются на конкретных примерах. Уделяется внимание формированию умения указывать координаты вершины параболы, ее ось симметрии, направление ветвей параболы.

Затем обучающиеся развивают умения находить по графику промежутки возрастания и убывания функции, а также промежутки, в которых сохраняется знак.

Далее с опорой на сведения о графике квадратичной функции (направление ветвей параболы, ее расположение относительно оси абсцисс) формируются умения решать неравенства вида $y = ax^2 + bx + c > 0$, $y = ax^2 + bx + c < 0$.

В завершении функциональной линии в 9 классе представлен материал о степенной функции. В данной теме продолжается изучение свойств функции: вводятся понятия четной и нечетной функции, рассматриваются свойства степенной функции с натуральными показателем.

3. *«Алгебра 7», «Алгебра 8», «Алгебра 9», авторы: А.Г. Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир.*

В 7 классе обучающиеся знакомятся с понятиями «функция», «функциональная зависимость», «независимая переменная» и «график функции». Функция трактуется как правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной. Вводятся понятия: область определения и область значения функции, рассматриваются способы задания функций. Под графиком функции подразумевается геометрическая фигура состоящая из тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции. Начинается формирование у обучающихся умений находить значение функции, заданной формулой или графически, по известному значению аргумента.

Затем перед изучением линейной функции обучающиеся знакомятся с ее частным случаем, а именно, функцией $y = kx + b$ и ее графиком. Рассматривается зависимость расположения графика функции от значения коэффициента k и числа b . Внимание обучающихся обращено на то, как влияет знак коэффициента k на расположение графика. Здесь же на физических примерах происходит первое знакомство с понятиями прямой и обратной пропорциональности.

Авторы делают акцент на то, что построение графика линейной функции и чтение графика – важнейшие умения, необходимые обучающимся для изучения как других разделов математики, так и смежных дисциплин. По этой причине при решении традиционных математических примеров, а также и в процессе моделирования реальных процессов, протекающих по закону линейной зависимости, идет формирование этих умений.

В 8 классе обучающиеся последовательно знакомятся со свойствами и графиками функций $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, рассматриваются основные свойства функции (область определения, область значения, нули функции, свойства графика). Построение графиков этих функций для конкретных примеров осуществляется по точкам. Здесь не только изучаются свойства и графики конкретных функций, но и показывается прикладной аспект их применения. С помощью функции $y = \frac{k}{x}$ уточняется понятие обратной пропорциональности.

В 9 классе на примерах функций $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ рассматриваются их основные свойства (область определения, нули функции, четность и нечетность функции, возрастание и убывание функции, промежутки знакопостоянства). Уделено внимание построению графиков функций $y=kf(x)$, $y=f(x)+b$, $y=f(x+a)$. При изучении темы формируются умения определять по графику промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, нули функции.

Основное внимание уделяется изучению квадратичной функции, построению графика с использованием координат вершины параболы, нулей функций (если они имеются) и нескольких дополнительных точек. Преобразование графиков является вспомогательным материалом.

При изучении темы формируются умения определять по графику промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, нули функции, наибольшее и наименьшее значение функции.

Квадратные неравенства решаются с помощью графика квадратичной функции. $y = ax^2$, $y = x^2 + px + q$, $y = ax^2 + bx + c$

4. «Алгебра 7», «Алгебра 8», «Алгебра 9», автор: А.Г. Мордкович, и задачки «Алгебра 7», «Алгебра 8», «Алгебра 9», авторы: А.Г. Мордкович, Е.Е. Тульчинская, Т.Н. Мишуткина.

Функциональная линия в 7 классе начинается с темы «Линейная функция». Сначала изучается не линейная функция, а линейное уравнение с двумя переменными. Это не случайно, а напрямую связано с идейным стержнем всего курса – с математическим моделированием реальных процессов, поскольку равномерные процессы чаще всего моделируются в неявном виде – в виде уравнения $ax + by + c = 0$, а в явном виде – в виде линейной функции $y = kx + m$.

Внимание обучающихся обращается на то, что график линейного уравнения с двумя переменными проще строить, если уравнение преобразовано к виду $y = kx + m$, для которого используется термин «линейная функция». Общее определение функции не дается. Такие понятия, как «функция», «область определения функции», «непрерывность функции», «наибольшее и наименьшее значение» употребляются на описательном, наглядно-интуитивном уровне.

Далее вводится функция $y = x^2$. Рассматривается решение уравнений графическим методом, построение графиков кусочных функций, подход к одной из основных математических моделей всей математики – к уравнению вида $y = f(x)$.

В 8 классе рассматриваются функции $y = ax^2$, $y = \frac{k}{x}$ их свойства и графики; построение графиков функции $y = f(x+t) + m$ и $y = -f(x)$ по известному графику функции $y = f(x)$; график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$); вводится понятие ограниченной функции; решаются задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значения квадратичной функции на заданном промежутке; идет графическое решение квадратных уравнений; построение и чтение графиков кусочных функций, составленных из функций вида $y = C$, $y = kx$, $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$,

$y = ax^2 + bx + c$. Изучается функция $y = \sqrt{x}$, ее свойства и график; рассматривается графическое решение уравнений с одной и двумя переменными. В заключении изучается функция $y = |x|$, ее свойства и график.

В 9 классе вводится определение функции. Рассматриваются ее способы задания; область определения и множество значений функции (на первый план выдвигается графический прием отыскания множества значений); свойства функций (монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значение функции заданной на отрезке даны в виде формальных определений, а непрерывность и выпуклость – на наглядно-геометрическом уровне); обзор свойств и графиков всех изученных функций; функции $y = x^n$, $y = x^{-n}$, их свойства и графики; построение графика функции $y = mf(x)$ по известному графику функции $y = f(x)$.

В 9 классе также изучаются функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, их свойства и графики.

5. «Алгебра 7», «Алгебра 8», «Алгебра 9», авторы: С.М. Никольский, М.К. Потанов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.

Следует отметить, что функциональная линия реализуется не с 7-го, а с 8-го класса. В 8 классе сначала рассматриваются числовые неравенства, их свойства, изображение числовых промежутков на координатной оси. Далее вводятся понятия функции и ее графика, рассматриваются примеры простейших функций ($y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$), изучаются их свойства и графики. При доказательстве свойств функций используются свойства неравенств. На интуитивной основе вводятся понятия непрерывности функции и непрерывности графика функции.

Затем изучается частный случай линейной функции – прямая пропорциональная зависимость, исследуется расположение прямой в зависимости от углового коэффициента, решаются традиционные задачи,

связанные с принадлежностью графику заданных точек, знаком функции и т.п. Потом вводится понятие линейной функции, показывается, как можно получить график линейной функции из соответствующего графика прямой пропорциональности. Рассматривается параллельный перенос графика вдоль осей, однако, основным способом построения графика линейной функции остается построение прямой по двум точкам. Рассматриваются кусочно-заданные функции, а также функция $y = |x|$ и переносы ее графика по осям координат.

Изучение темы «Квадратичная функция» начинается с функции $y = ax^2$ и изучения ее свойств. Далее обучающимся показывается, что график функции $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ получается переносом графика функции $y = ax^2$. Большое внимание уделяется построению графика квадратичной функции по точкам с вычислением абсциссы вершины параболы.

9 класс: свойства функции $y = x^n$ и ее график; функция $y = \sqrt[n]{x}$. Особое внимание уделяется степенным функциям $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

§ 2. Элективный курс «Функции, их свойства и графики»

1. Программа

Основной задачей модернизации российского образования является обеспечение нового качества школьного образования, соответствующего требованиям изменившейся системы общественных отношений и ценностей. В связи с введением профильного обучения в старшей школе и предпрофильного – в основной мы создали элективный курс «Функции, их свойства и графики» для предпрофильного обучения, направленного на помощь обучающимся 9 классов в выборе направлений дальнейшего обучения, которое может осуществляться в профильной старшей школе или в системе профессионального образования.

Данный курс рассчитан на 16 часов.

Основные цели данного курса:

-дополнение программного материала, связанного со свойствами функций;
-систематизация и углубление знаний по теме «Функции, их свойства и графики»;

-создание условий для формирования и развития практических умений обучающихся строить графики элементарных функций, используя различные методы и приемы;

-создания условий для формирования и развития практических умений обучающихся использовать свойства функций при решении различных задач прикладного характера;

-создания условий для овладения языком математики в устной и письменной форме, математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения школьных естественнонаучных дисциплин, продолжения образования и для самостоятельной деятельности математики и ее приложениях;

-создание условий для осуществления рефлексивной деятельности.

В процессе изучения данного элективного курса девятиклассники познакомятся с историей возникновения понятия «функция», различными методами построения графиков функций, некоторыми свойствами функций, а так же с новыми элементарными функциями. Элективный курс предусматривает не только получение различных знаний, связанных с функциями, их свойствами и графиками, но и создает условия формирования мировоззрения ученика, логической и эвристической составляющих мышления. Девятиклассники, изучившие данный материал, смогут реализовать полученные знания и умения на итоговой аттестации.

Занятия элективного курса построены так, что учитель включает обучающихся в учебно-познавательную деятельность, организованную на основе внутренней мотивации; обеспечивает диалоговое общение не только между учителем и учениками, но и между обучающимися.

На занятиях элективного курса учителю в учебной деятельности предлагается применять средства ИКТ: с помощью тестов проверить знания обучающихся, представить в виде презентации материал, связанный с историей возникновения понятия функции, а также использовать компьютер в качестве демонстрационного материала. Некоторые задачи, предлагаемые в данном курсе, не просты в решении, что позволяет повысить учебную мотивацию обучающихся и проверить им свои способности к математике.

Тематическое планирование курса

№	Тема	Кол-во часов
1	Рисуем графиками функций.	1
2	Преобразование графиков функций.	1
3	Что такое функция?	1
4	Кусочная функция.	1
5	Построение графиков функций, содержащих знак модуля	1
6	График функции вида $y = \frac{1}{f(x)}$.	1
7	Целая и дробная части числа.	1
8	Биквадратная функция.	1
9	Задачи на нахождение экстремумов функций.	1
10	Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.	1
11	Умножение уравнения на функцию.	1
12	Умножение неравенства на функцию.	1
13	Действия с графиками.	1
14	Графический способ решения систем уравнений и неравенств.	1
15	Свойства функций. Асимптота.	1
16	«Звездный час функции»	1
	Итого	16

2. Методические рекомендации

Занятие 4. Тема. Кусочная функция.

Цели: знакомство обучающихся с понятием кусочная функция; формирование у них умения находить значения кусочной функции, строить график этой функции; развитие логического мышления.

Структура занятия: актуализация знаний (3 мин.), объявление темы и целей занятия (2 мин.), объяснение нового материала (13 мин.), выполнение заданий на закрепление новой темы (22 мин.), пояснение домашнего задания (2 мин.), подведение итогов занятия (3 мин.).

Комментарий к занятию

В начале занятия полезно повторить: 1) определение функции; 2) понятие об области определения и множестве ее значений; 3) способ задания функции с помощью формулы.

Далее объявляется тема и цели занятия.

На доске записывается функция $y = |x|$. Учащимся предлагается построить ее график.

Учитель ставит вопрос: можно ли задать функцию $y = |x|$ другой формулой?

Если ребята затрудняются ответить, стоит спросить определение модуля действительного числа. Тогда $y = |x|$ можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Далее сообщается, что такое задание функции называется кусочным заданием функции. Дается следующее определение: *кусочная функция* – это функция, заданная несколькими разными аналитическими выражениями на различных частях ее области определения

Затем рассматривается, как вычисляются значения кусочной функции на примере функции:

$$y = \begin{cases} -x, & \text{если } x < -2, \\ 0,5x + 3, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ 7 - x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Находятся значения функции при $x = -3$, $x = 2$, $x = 4$.

Напоминается, что способ задания функции одной или несколькими формулами называется *аналитическим способом* (известно из курса алгебры).

Сначала, чтобы освоиться с записью кусочной функции, предлагаются следующие задания.

Задание 1.

Является ли данная запись возможной и правильной для записи функции?

Если нет, обоснуйте ответ.

$$1) y = \begin{cases} 2x - 3, & \text{если } x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 1. \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 3x - 2, & \text{если } x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$3) y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geq -1. \end{cases}$$

Ответ: 1) Нет. Одному значению аргумента соответствует два значения функции: $f(1) = -1$ и $f(1) = 1$. Противоречие с определением функции; 2) Да;

3) Нет. Так как $\sqrt{-1}$ не существует.

Следующие задания на нахождение значений, области определения кусочной функции и на построение ее графика.

Задание 2.

Функция f задана тремя выражениями:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{если } x \leq -1, \\ 1/2x + 1/2, & \text{если } -1 < x < 5, \\ x - 4, & \text{если } x \geq 5. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-3)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(8)$;

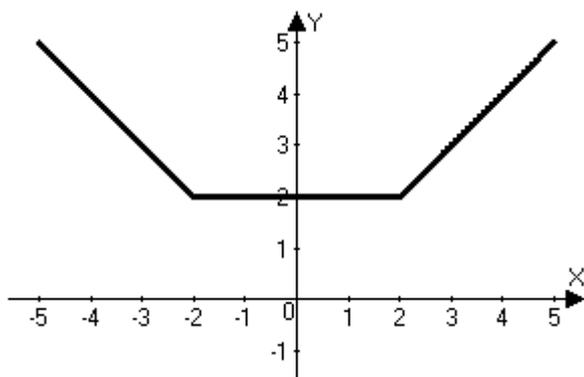
б) Какова область определения функции?

Задание 3.

Постройте графики функций. Укажите область определения и множество значений функций:

$$1) f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq -2, \\ 2, & \text{если } -2 < x < 2, \\ x, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

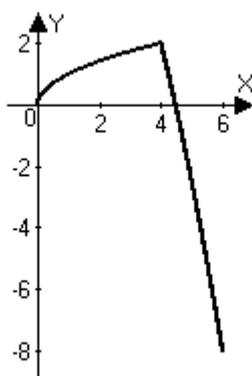
Решение:



$$D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = [2; +\infty).$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } x < 4, \\ 10 - 0,5x^2, & \text{если } x \geq 4. \end{cases}$$

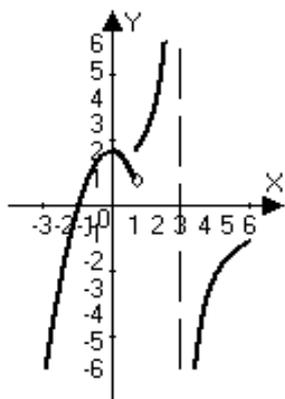
Решение:



$$D(f) = [0; +\infty), \quad E(f) = (-\infty; 2].$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3-x}, & \text{если } x \geq 1, \\ 2-x^2, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

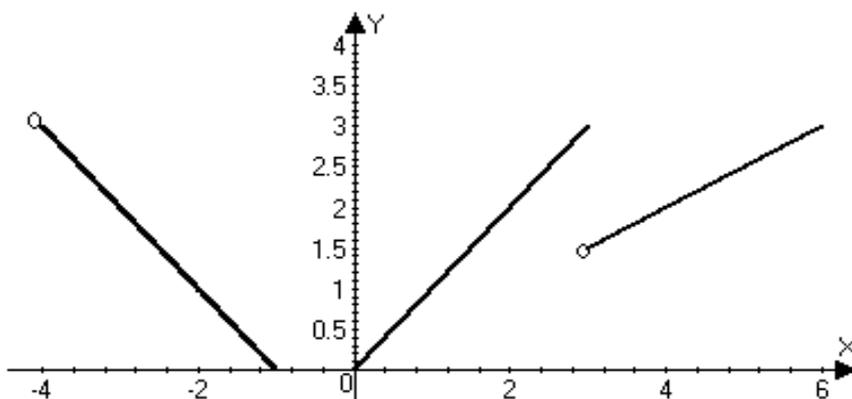
Решение:



$$D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty), \quad E(f) = (-\infty; +\infty).$$

Задание 4.

Функция f задана графиком, изображенным на рисунке. Задайте эту функцию аналитически.



$$\text{Ответ: } y = \begin{cases} -x - 1, & \text{если } -4 < x \leq -1, \\ x, & \text{если } 0 \leq x \leq 3, \\ x/2, & \text{если } 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

В конце занятия учитель задает домашнее задание. Оно состоит из двух частей.

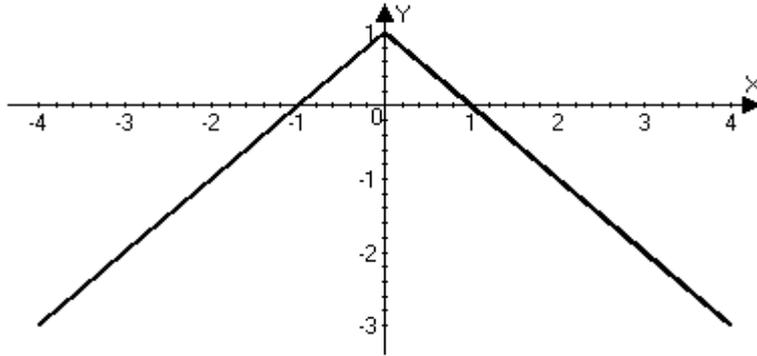
I часть

Постройте графики заданных функций. Укажите область определения и множество значений функций:

$$1) y = \begin{cases} \frac{2}{x-2}, & \text{если } x \geq 0, \\ x^2 - 1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{если } x < -1, \\ x - x^2, & \text{если } x > -1. \end{cases}$$

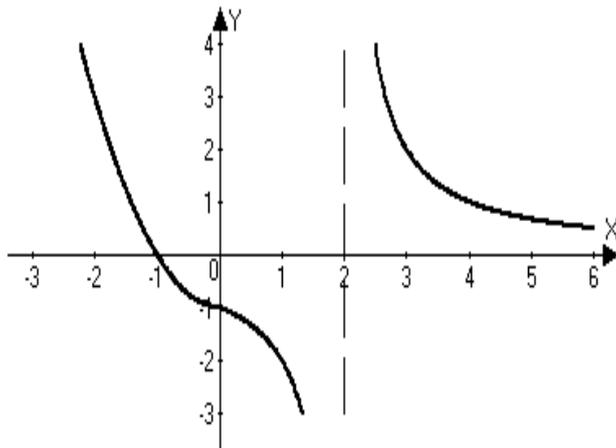
II часть

Функция f задана графиком, изображенном на рисунке. Задайте эту функцию аналитически.



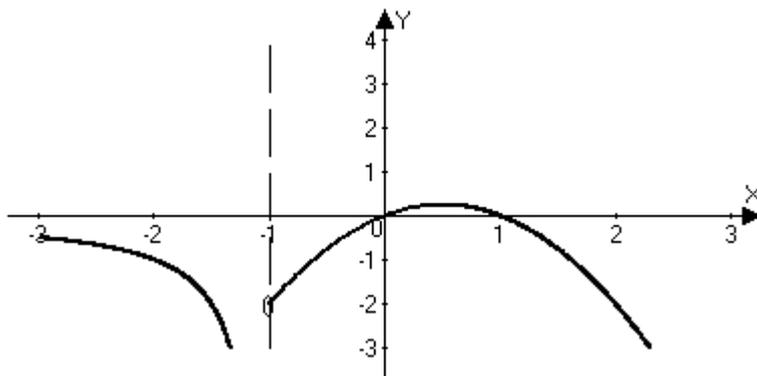
Ответы: I часть

1)



$$D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty), \quad E(f) = (-\infty; +\infty)$$

2)



$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty), \quad E(f) = (-\infty; 0,5].$$

II часть

$$y = \begin{cases} -x + 1, & \text{если } x > 0, \\ x + 1, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Подводя итог занятия, можно спросить, что понимают под кусочной функцией? Как находить значение этой функции?

Можно предложить ребятам самим придумать пример кусочной функции.

Занятие 8. Тема. Биквадратная функция

Цели: знакомство с определением биквадратной функции; создание условий для формирования у них умения строить график биквадратной функции; развитие умения слушать, логического мышления; применение полученных знаний при выполнении заданий на построение графиков различных биквадратных функций.

Структура занятия: проверка домашнего задания (3 мин.), актуализация знаний (3 мин.), объявление темы и целей занятия (3 мин.), знакомство с определениями максимума и минимума функции (2 мин.), знакомство с определением биквадратной функции (2 мин.), построение графика биквадратной функции (10 мин.), выполнение заданий на построение биквадратных функций (12 мин.), пояснение домашнего задания (2 мин.), учащиеся отвечают на вопросы теста (5 мин.), подведение итогов занятия (3 мин.).

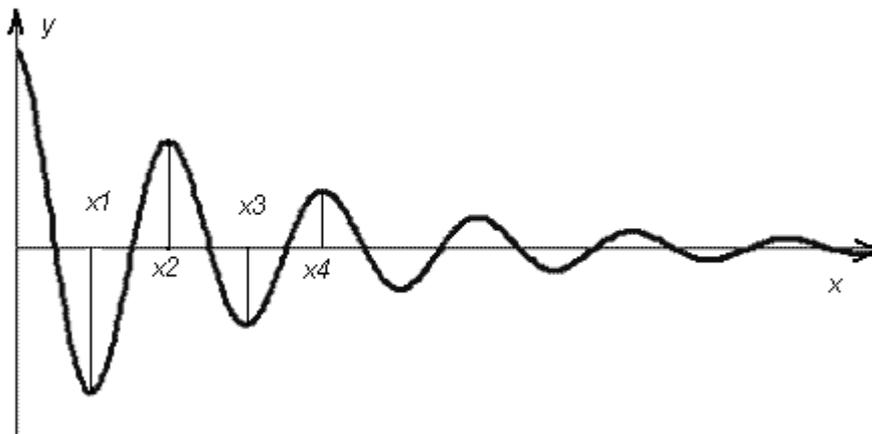
Комментарий к занятию

В начале занятия проверяется домашнее задание. Следует спросить у обучающихся, с помощью каких преобразований были построены графики функции. Затем повторить, что называется квадратичной функцией, и что представляет собой график квадратичной функции.

Далее можно начать так: «На уроке алгебры вы изучали функции: линейную, квадратичную функции, функции вида $y = k/x$, а так же функцию $y = x^3$. Сегодня на занятии вы познакомитесь с еще одной функцией». Сообщаются тема и цели занятия.

Сначала учеников необходимо познакомить с определениями максимума и минимума функции. С их помощью будет легче строить графики биквадратных функций.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, описывающий затухающие колебания.



Здесь x — время, y — отклонение точки от положения равновесия. Замечаем, что, например, значение $f(x_2)$ является наибольшим значением функции по отношению к тем значениям, которые функция принимает в близлежащих точках, например, в интервале $(x_1; x_2)$, также $f(x_4)$ — наибольшее значение, которое функция принимает по отношению к значениям функции в точках, близких к точке x_4 . Аналогично, $f(x_1)$, $f(x_3)$ — наименьшее значение функции по сравнению с теми значениями, которые функция принимает соответственно вблизи точек x_1 , x_3 .

Определение 1: Функция f имеет в некоторой внутренней точке x_0 максимум (*max*), если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех ее точек имеет место неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Определение 2: Функция f имеет в некоторой внутренней точке x_0 минимум (*min*), если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех ее точек имеет место неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Затем вводится определение биквадратной функции, но сначала учитель предлагает вспомнить, как выглядит биквадратное уравнение, и что означает приставка – би:

Определение 3. Функция вида $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) (1) называется биквадратной.

Поскольку $a(-x^4) + b(-x^2) + c = ax^4 + bx^2 + c = y$, то функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат. (Четность функции можно предложить учащимся доказать самим).

Для построения графика биквадратной функции проведем следующие преобразования.

$$y = \frac{b^2}{a} \left(\frac{a^2}{b^2} x^4 + \frac{a}{b} x^2 \right) + c = \frac{b^2}{a} \left(\frac{x^4}{b^2/a^2} + \frac{x^2}{b/a} \right) + c =$$

$$= \frac{b^2}{a} \left[\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{b}{a}}} \right)^4 \pm \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{b}{a}}} \right)^2 \right] + c. \quad (2)$$

Если $b \neq 0$, то из (2) видно, что график функции получается либо из графика функции $y = x^4 + x^2$, либо из графика функции $y = x^4 - x^2$ при помощи растяжений по направлению обеих осей и параллельного переноса вдоль оси ординат (если a – отрицательное, то еще отражение относительно оси абсцисс). Если в равенстве (1) $b = 0$, то график функции $y = ax^4 + bx^2 + c$ получается из графика $y = x^4$.

Построим график функции $y = x^4 + x^2$. Он представляет собой сумму графиков $y = x^4$ и $y = x^2$. Поскольку функции x^4 и x^2 при $x > 0$ положительные и возрастающие, причем графики касаются оси абсцисс в точка 0, то и функция $y = x^4 + x^2$ обладает теми же свойствами (рис 1).

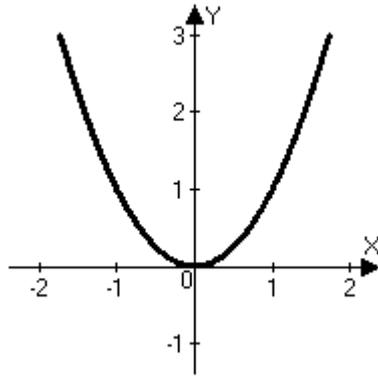


Рис. 1

Построим график функции $y = x^4 - x^2$. Если $x = 0$, то и $y = 0$; следовательно, начало координат принадлежит графику. Поскольку $y = x^2(x+1)(x-1)$, то график проходит через точки $(-1; 0)$ и $(1; 0)$. Очевидно, что если $|x| > 1$, то $x^4 > x^2$, а потому $y > 0$ при $x > 1$ или $x < -1$. Если же $|x| < 1$, то $x^4 < x^2$, и следовательно, $y < 0$ при $-1 < x < 0$ или при $0 < x < 1$. Из последнего следует, что в точке 0 функция имеет максимум.

Далее, пусть $x^4 - x^2 = a$, где a – постоянная. Решим это уравнение относительно x , получим:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}}.$$

Отсюда видно, что корни уравнения будут кратными при $a = -1/4$ или $a = 0$. В первом случае будут две пары кратных корней:

$$x = +\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а во втором $x = 0$. Таким образом, функция достигает минимума при $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, а максимума при $x = 0$. Итак, функция имеет минимумы, равные $-1/4$, при $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из выше сказанного следует, что при изменении x от $-\infty$ до $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ функция убывает от $+\infty$ до $-\frac{1}{4}$, при изменении x от $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ до 0 функция возрастает от $-\frac{1}{4}$ до 0 , при изменении x от 0 до $\frac{\sqrt{2}}{2}$ функция убывает от 0 до $-\frac{1}{4}$ и при изменении x от $\frac{\sqrt{2}}{2}$ до $+\infty$ функция возрастает от $-\frac{1}{4}$ до $+\infty$.

Наконец, так как $y = -x^2(1 - x^2)$, то график функции в окрестности нуля выше параболы $y = -x^2$.

На рис.2 график функции $y = x^4 - x^2$ показан сплошной линией, а график $y = -x^2$ – пунктирной.

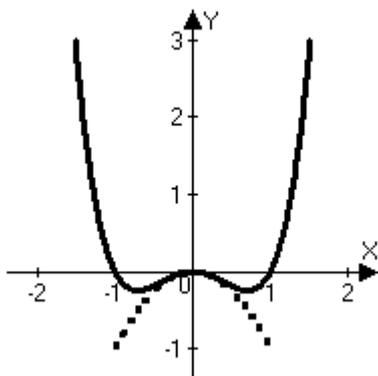


Рис. 2

Для закрепления изученного материала можно предложить учащимся построить графики функций следующих биквадратных функций:

а) $y = x^4 - 2x^2 + 2$; б) $|y| = x^4 - 4x^2$.

Решение:

а) Сначала необходимо выделить полный квадрат данного выражения:

$y = x^4 - 2x^2 + 2 = x^4 - 2x^2 + 1 + 1 = (x^2 - 1)^2 + 1$. В таком виде исходную функцию будет легче исследовать.

Далее предложить ученикам проверить, является ли Даная функция четной или нечетной.

Функция четная, а следовательно, график ее симметричен относительно оси ординат.

Выясняем, что при $x=1$ и при $x=-1$ функция имеет наименьшее значение равное 1. Так как $(x^2 - 1)^2 \geq 0$, то $y = (x^2 - 1)^2 + 1 \geq 1$, а следовательно, график расположен не ниже прямой $y = 1$. При $x=0$ функция $y = 2$.

Поскольку при $0 \leq x \leq 1$ функция $x^4 - 2x^2 \leq 0$, то данная функция достигает максимума, равного 2, при $x = 0$. На основании изложенного заключаем, что в промежутках $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$ функция убывает, а в промежутках $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает.

По полученным данным построим график функции (рис. 3).

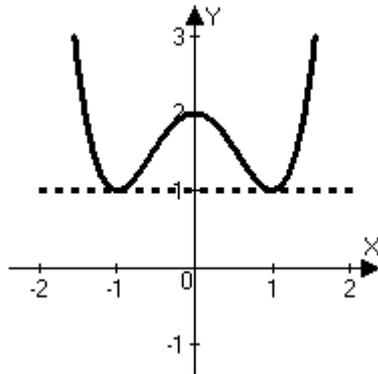


Рис. 2

б) $|y| = x^4 - 4x^2$. Сначала необходимо найти область определения этой функции.

Так как $|y| \geq 0$, то область определения функции находится из неравенства $x^4 - 4x^2 \geq 0$, или $x^2(x^2 - 4x) \geq 0$.

Решив это неравенство, получим, что область определения состоит из двух промежутков $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$ и точка нуль.

Поскольку $|-y| = |y|$ и $(-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2$, то график функции симметричен как относительно оси абсцисс, так и относительно оси ординат.

Если $y > 0$, то $y = x^4 - 4x^2$. Будем придавать аргументу x такие положительные значения, чтобы y был неотрицательным. Если $x = 2$, $y = 0$; если $x = 2,1$, то $y \approx 1,8$; если $x = 2,5$, то $y \approx 14$.

Этих данных достаточно, чтобы построить ту часть графика, которая расположена в первой четверти. Отразив эту часть графика относительно оси ординат, получим ту часть графика, которая расположена во второй четверти. Наконец, отразив уже построенные части относительно оси абсцисс, получим остальные части графика.

Напомним, что к графику относится также начало координат.

Схема графика дана на рисунке 4.

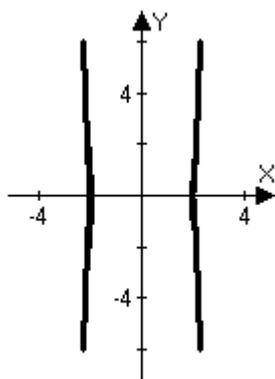
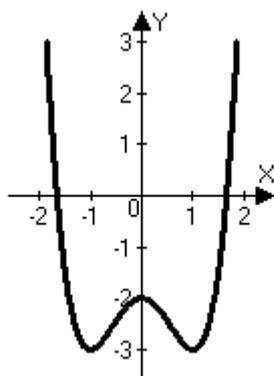


Рис. 3

Первая часть домашнего задания состоит из построения графика квадратичной функции $y = x^4 - 2x^2 - 2$.

Ответ:



В конце занятия можно предложить обучающимся ответить на вопросы теста. Вопросы подобраны так, что ученики повторят изученный на занятиях материал. Тест предлагается на компьютере в программе PowerPoint.

Вопросы теста:

1)

Функция какого вида называется биквадратной?

1. $y = ax^3, (a \neq 0);$
2. $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0);$
3. $y = ax^6 + bx^3 + c, (a \neq 0).$

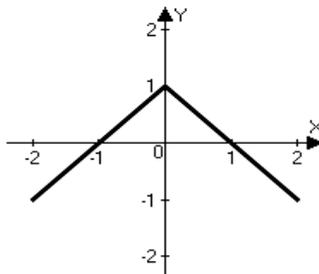
2)

Задайте аналитически функцию f , заданную графиком

1. $y = |x + 1|;$

2. $y = -|x + 1|;$

3. $y = -|x| + 1.$



3)

Кто впервые ввел термин «Функция»?

1. Эйлер;
2. Лейбниц;
3. Бернулли.

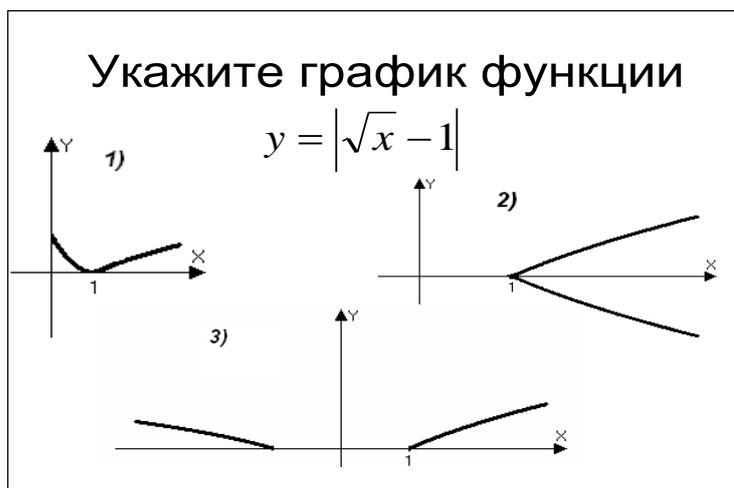
4)

Что представляет собой
график уравнения

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$$

1. Линия;
2. Парабола;
3. Точка.

5)



Ответы к тесту: 1) – 2; 2) – 3; 3) – 2; 4) – 3; 5) – 1.

В конце занятия сообщить вторую часть домашнего задания. Обучающимся необходимо повторить изученный материал, так как на следующей занятии они будут отвечать на вопросы теста. За тест выставить отметки.

Занятие 13. Тема. Действия с графиками

Цель: познакомить обучающихся с методом построения графиков функций с помощью арифметических действий над графиками; формировать у них умение строить графики функций, используя этот метод; развивать умение слушать; применять полученные знания.

Структура занятия: проверка домашнего задания (3 мин.), объявление темы и целей занятия (3 мин.), объяснение нового материала (18 мин.),

закрепление нового материала (16 мин.), пояснение домашнего задания (2 мин.), подведение итогов (3 мин.).

Комментарий к занятию

Сначала проверяется выполнение домашнего задания. Учитель выясняет, на какую функцию было произведено умножение обеих частей уравнения.

Объявляется тема и цели занятия.

Потом учитель сообщает, что над функциями, как и над числами, можно производить арифметические действия, т.е. определять сумму (разность), произведение и частное функций. Графики функций $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = f(x) / g(x)$ можно получить, используя правила сложения (вычитания), умножения и деления графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Осуществлять арифметические действия можно над функциями, имеющими общую область определения или общую часть области определения. При этом частное двух функций определено, если знаменатель отличен от нуля.

Далее вводится определение *суммы функций*.

Суммой двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называется функция $y = h(x)$ с областью определения, являющейся общей частью областей определения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, при этом значение функции $y = h(x)$ равны $f(x) + g(x)$.

Беседуя с обучающимися, выясняем, что ординаты графика суммы функций получаются путем сложения ординат графиков складываемых функций для каждого значения аргумента (для каждой абсциссы) из области определения суммы. Другими словами, чтобы построить график функции $h(x) = f(x) + g(x)$, нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в одной и той же системе координат, а затем в каждой точке к отрезку, изображающему ординату первого графика, пристроить отрезок изображающий ординату второго графика, при этом второй отрезок откладывается вверх, если $g(x) > 0$, и вниз, если $g(x) < 0$ (рис. 5).

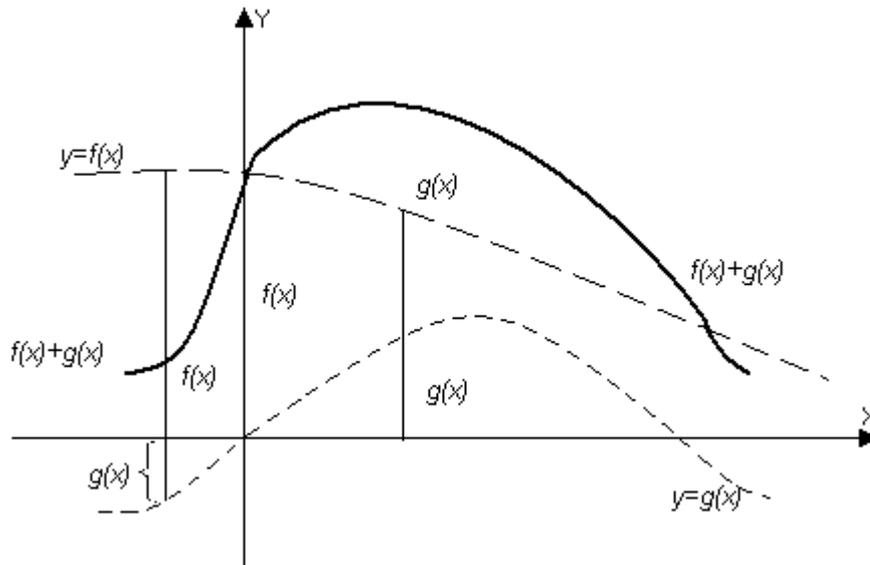


Рис. 5

Аналогично определяется разность двух функций и строится ее график. Ребята могут догадаться, что при построении графика разности можно поступить иначе: построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, затем график функции $y = g(x)$ отобразить симметрично относительно оси Ox , тем самым получить график функции $y = -g(x)$, и, наконец, складываются графики функций $y = f(x)$ и $y = -g(x)$.

Пример. Постройте график функции $y = x + 1/x$.

Строим графики функций $y = x$ и $y = 1/x$. Для каждого значения $x (x \neq 0)$ складываем соответствующие отрезка, изображающие ординаты, получаем искомый график (рис. 6).

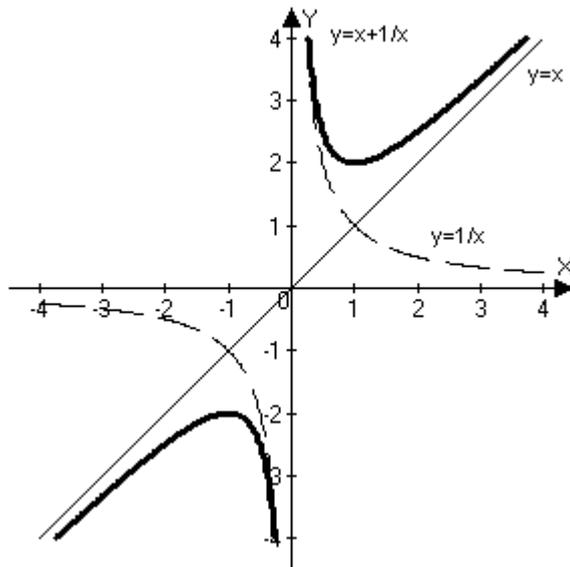


Рис. 6

На следующем этапе вводится определение произведения функций.

Произведением двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называется функция $y = h(x)$ с областью определения, являющейся общей частью областей определения $y = f(x)$ и $y = g(x)$, при этом значение функции $y = h(x)$ равно $f(x) \cdot g(x)$.

Ординаты графика произведения функций получаются путем умножения ординат графиков исходных функций соответствующих одному и тому же значению аргумента (для каждого значения аргумента из области определения произведения). Обучающиеся приходят к выводу: чтобы построить график функции $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в одной и той же системе координат, а затем в каждой точке перемножить длины отрезков, изображающие ординаты графиков, и построить отрезок полученной длины с учетом знака произведения. Множество точек с полученными ординатами представляет график функции $y = f(x) \cdot g(x)$ (рис. 7).

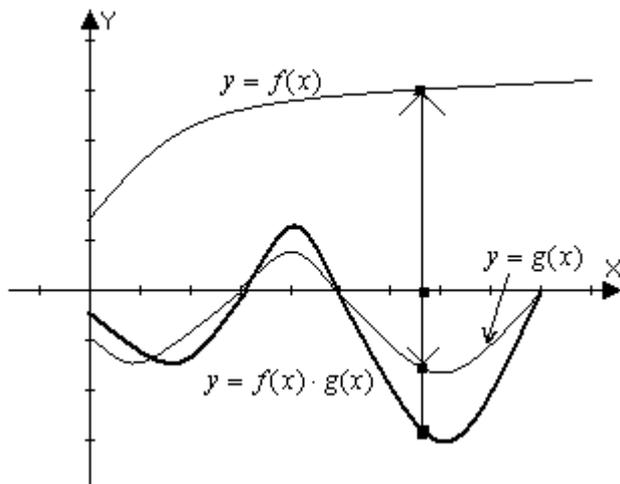


Рис. 7

Пример. Постройте график функции $y = x(x^2 - 4)$.

Строим графики функций $y = x$ и $y = x^2 - 4$. Для каждого значения x перемножаем значение ординат, соответствующих одному и тому же значению аргумента, получаем искомый график (рис. 8).

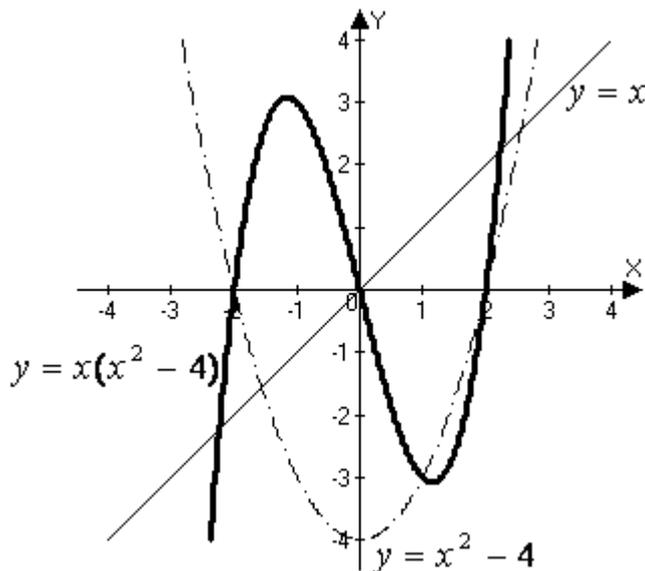


Рис. 8

Вводится определение частного двух функций.

Частным двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называется функция $y = h(x)$, у которой область определения получается следующим образом: из общей части области определения $y = f(x)$ и $y = g(x)$ нужно удалить все значения, при которых $g(x) = 0$, при этом значение функции $h(x) = f(x) / g(x)$.

График функции $y = f(x) / g(x)$ можно получить следующим образом: представить функцию в виде $y = f(x) \cdot (1 / g(x))$, построить графики $y = f(x)$ и $y = 1 / g(x)$, а затем построить график произведения $y = f(x) \cdot (1 / g(x))$.

Для того чтобы построить график функции $y = 1 / g(x)$, надо построить график функции $y = g(x)$, разделить единицу на ординаты графика $y = g(x)$ (с учетом знака) и получить ординаты графика $y = 1 / g(x)$. Заметим, что в тех точках, где функция $y = g(x)$ имеет нули, функция $y = 1 / g(x)$ не определена, т.е. не пересекает некоторую прямую.

Пример. Постройте график функции $y = x / (x^2 + 1)$.

Сначала строим графики функций $y = x$ и $y = 1 / (x^2 + 1)$ (построение графика функции $y = 1 / (x^2 + 1)$ известно обучающимся, поэтому необходимо только вспомнить это построение), затем, перемножая их ординаты, получаем искомый график (рис. 9).

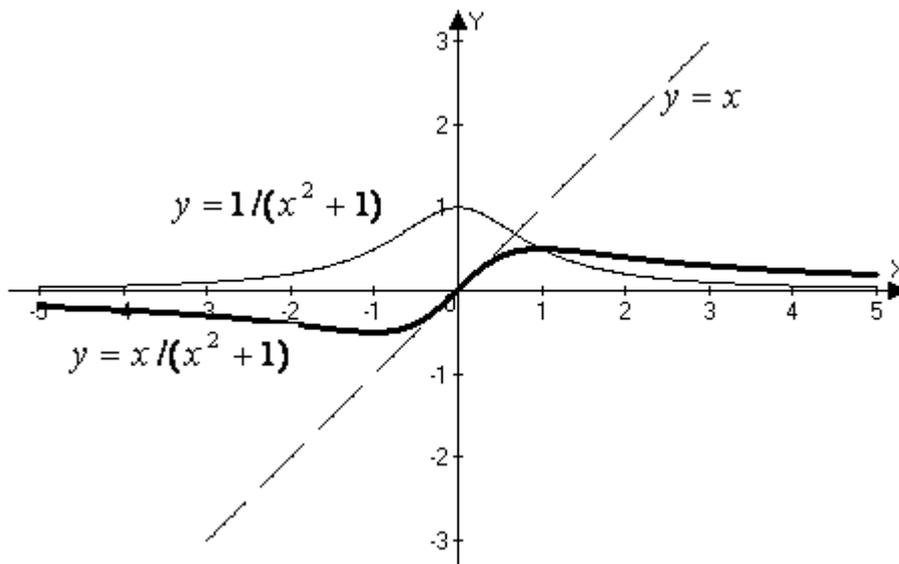


Рис. 9

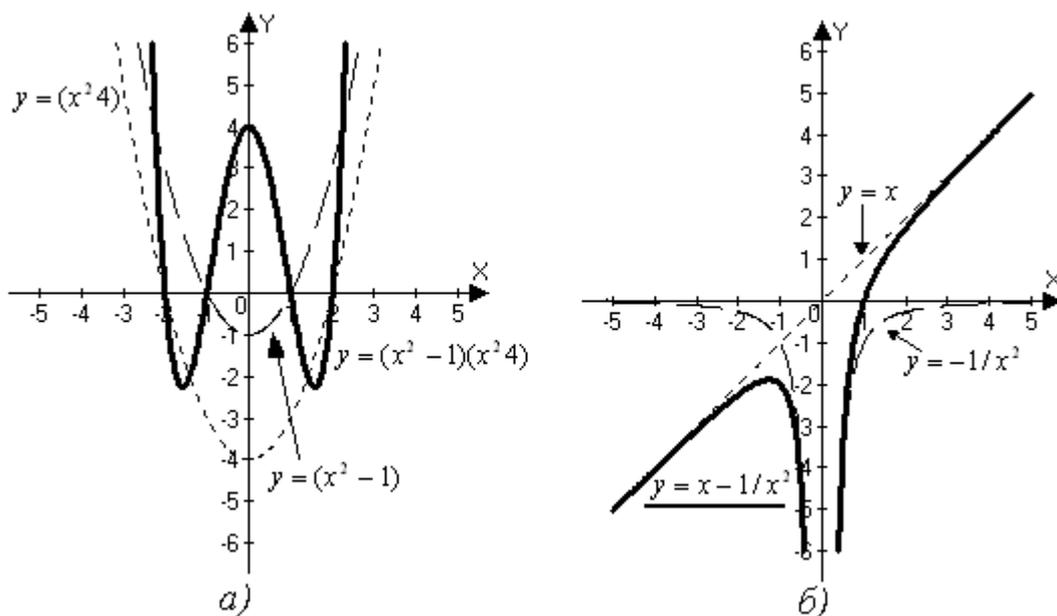
Для закрепления обучающимся предлагается выполнить построение графиков следующих функций:

а) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$;

б) $y = x - 1 / x^2$.

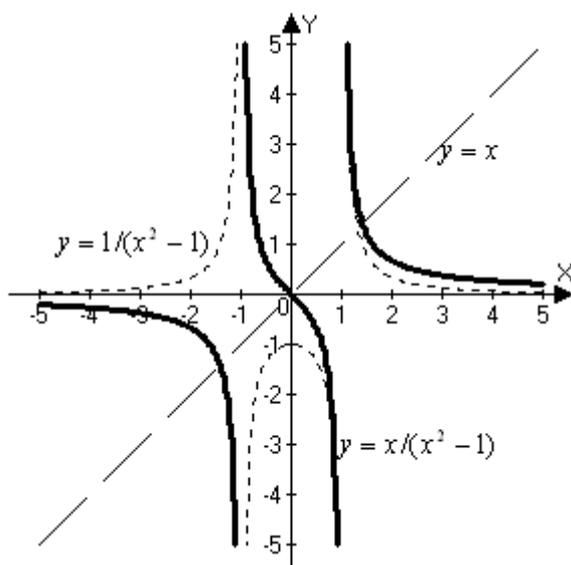
При выполнении заданий необходимо сначала выяснить, из каких функций и с помощью каких арифметических действий были получены данные функции. Построить графики найденных функций, а затем выяснить, как найти значения данных функций с помощью найденных. Потом построить графики данных функций.

Ответ:



В конце занятия учитель предлагает дома построить график следующей функции $y = x/(x^2 - 1)$.

Ответ:



В конце занятия обучающимся можно предложить выполнить следующее задание: на каких рисунках (рис. 10) изображены графики функций?

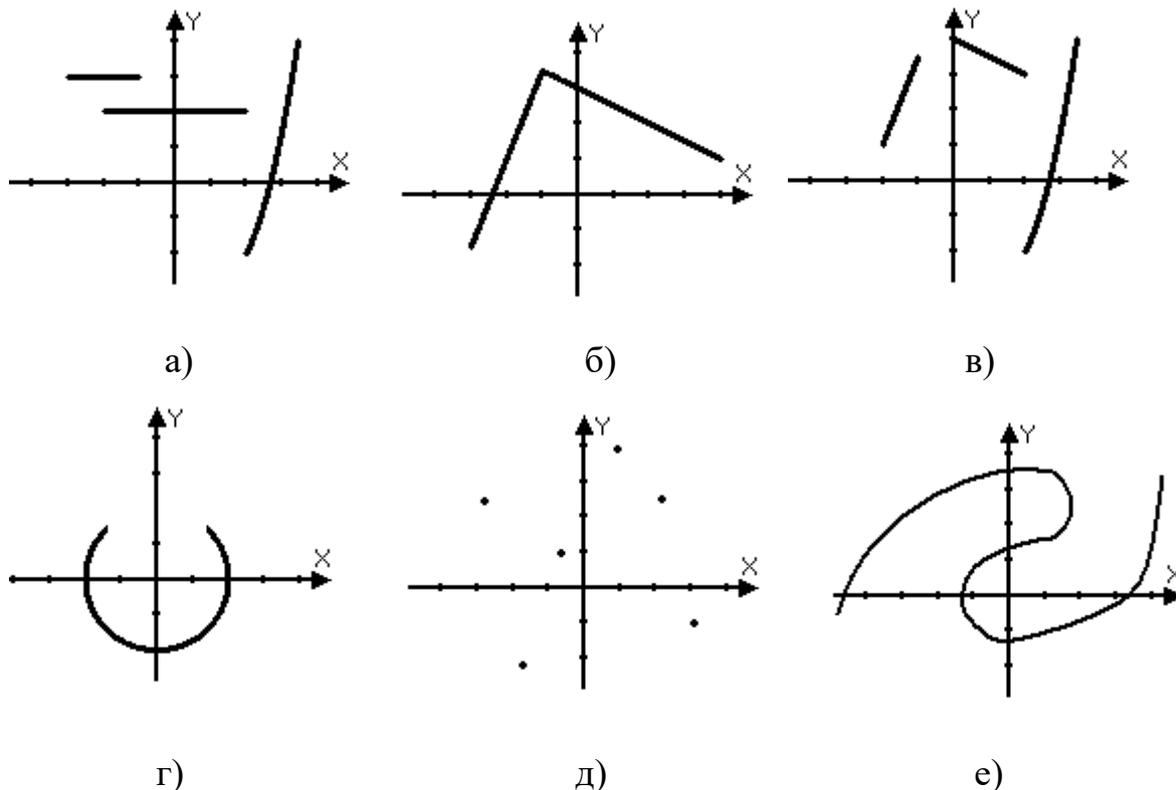


Рис. 10

Чтобы выполнить это задание, обучающимся необходимо вспомнить определение функции. С помощью него легко найти графики функций.

Ответ: на рисунках под буквами б), в), д) изображены графики функций.

Занятие 14. Тема. Графический способ решения систем уравнений и неравенств

Цели: создание условий для формирования и развития практических умений обучающихся решать системы уравнений с двумя переменными и неравенства с одной переменной, используя графический метод; развитие учебно-исследовательской и учебно-познавательной деятельности; развитие самостоятельно приобретать и применять знания.

Структура занятия: проверка домашнего задания (3 мин.), актуализация знаний (3 мин.), решение систем уравнений с двумя переменными (18 мин.),

решение систем неравенств с одной переменной (16 мин.), пояснение домашнего задания (2 мин.), подведение итогов (3 мин.).

Комментарий к занятию

После проверки домашнего задания необходимо повторить следующее: 1) что называется уравнением с двумя переменными, системой уравнений с двумя переменными, системой неравенств с одной переменной, системами уравнений и неравенств первой и второй степени; 2) способы решений систем уравнений и неравенств.

Далее учитель предлагает выполнить задания на повторение изученного материала на уроке алгебры. Оно поможет обучающимся вспомнить графический способ решения систем уравнений с двумя переменными.

Задание 1.

Решите систему уравнений графическим способом:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = |x| - 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение:

1) сначала выясняем, что представляют собой графики уравнений $x^2 + y^2 = 25$ и $y = |x| - 5$. Строим их в одной системе координат (рис. 11). Решением системы уравнений будут являться координаты каждой из точек пересечения этих графиков, они будут удовлетворять как первому уравнению системы, так и второму. Используя рисунок, находим значения координат точек пересечения графиков: (5; 0), (-5; 0), (0, -5). Следовательно, система имеет три решения:

$$x_1 = 5, y_1 = 0; x_2 = -5, y_2 = 0; x_3 = 0, y_3 = -5.$$

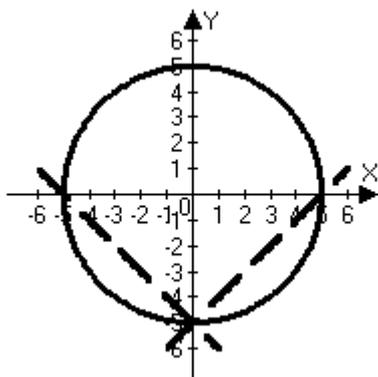


Рис. 11

2) решаем аналогично решению задания под 1). Обратить внимание на то, как будет выглядеть график второго уравнения.

Графики обоих уравнений построены на рис. 12. На рисунке видны приближенные значения координат точек пересечения графиков: $(2,8; 2,8)$, $(-2,8; 2,8)$, $(-2,8; -2,8)$, $(2,8; -2,8)$. Значит, система имеет четыре решения: $x_1 = 2,8$, $y_1 = 2,8$; $x_2 = -2,8$, $y_2 = 2,8$; $x_3 = -2,8$, $y_3 = -2,8$; $x_4 = 2,8$, $y_4 = -2,8$.

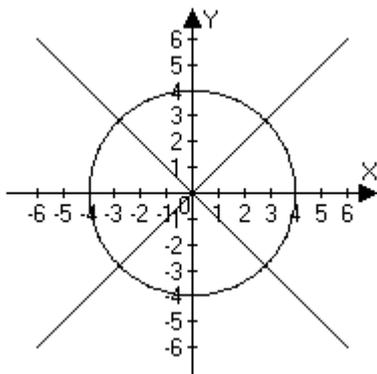


Рис. 12

Следующее задание усложнено тем, что в систему входят три уравнения.

Задание 2.

Найдите множество решений системы:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 4, \\ -x + y = 2, \\ y = -3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy = -6, \\ x + y = 1, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Решение:

1) сначала необходимо выразить y из всех уравнений. Потом решается аналогично решению задания 1 под 1). Получим график уравнений,

изображенный на рисунке 13. Из рисунка видим, что нет такой координаты точки, чтобы она принадлежала трем графикам сразу. Значит, система не имеет решения.

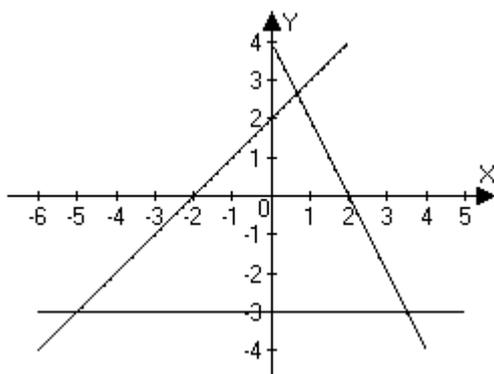


Рис. 13

2) задание аналогично заданию под 1) этого номера. В результате, когда построим все графики уравнений, получим следующий рисунок 14. Используя рисунок, находим значение координаты точки пересечения графиков – (3; -2). Следовательно, система имеет одно решение: $x = 3, y = -2$.

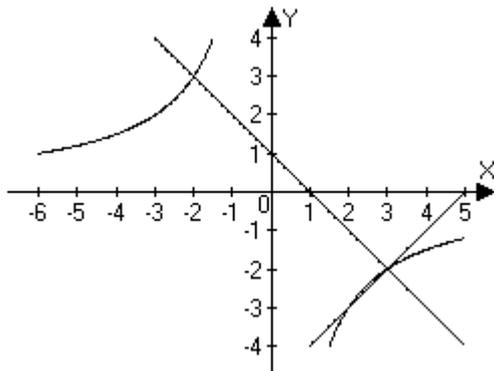


Рис. 14

После решения систем уравнений с двумя переменными учитель переходит к решению неравенств с одной переменной первой и второй степени.

Задание 3.

Решите систему неравенств

$$1) \begin{cases} 2x + 1 \geq 0, \\ x > 3x - 1, \\ 5x + 6 < 2x + 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ 5 - 2x \leq 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0, \\ x^2 > 0. \end{cases}$$

Решение:

1) выясняем, что найти решение системы неравенств, это значит найти пересечение множества решений каждого из неравенств. В данную систему входят неравенства первой степени. Чтобы решить эту систему, необходимо сначала решить неравенства относительно x , отметить решение каждого неравенства на оси абсцисс, а затем найти пересечение этих решений, оно и будет являться множеством решений системы неравенств (рис. 15).

Проделав все выше описанное, получим следующий рисунок. Из рисунка видим, что решением системы неравенств является промежуток - $[1/2; 0)$.

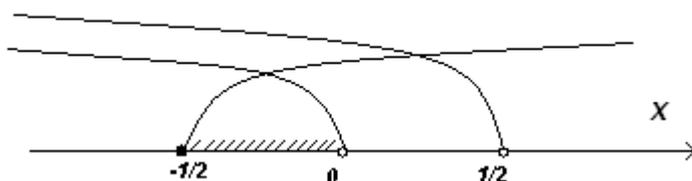


Рис. 15

2) рассмотрим функцию $y = x^2 - 6x + 8$. Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Строим параболу – находим вершину, точки пересечения с осями координат. Решением первого неравенства системы будет являться объединение промежутков $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. В этой же системе координат отмечаем решение второго неравенства, это будет открытый луч $(5/2; +\infty)$. Выясняем, что будет являться общим решением, отмечаем на графике (рис. 16). Следовательно, решением системы неравенств является открытый луч $(4; +\infty)$.

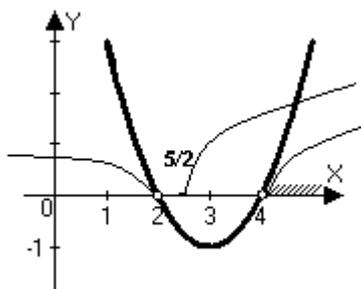


Рис. 16

3) решается аналогично решению предыдущих заданий. Выясняем, что необходимо построить в одной системе координат две параболы, которые являются графиками функций: $y = 4x^2 - 1$ и $y = x^2$. Затем отметить, где первая функция принимает значения больше либо равные нулю, а вторая функция – положительные значения. Пересечением этих множеств и будет решением системы неравенств: $[-1/2; 0) \cup (0; 1/2]$ (рис. 17).

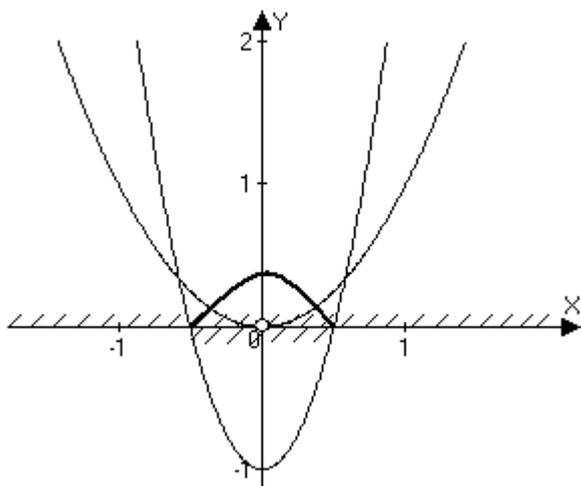


Рис. 17

Домашнее задание будет следующим: обучающиеся сами придумывают по одной системе уравнений с двумя переменными и системе неравенств с одной переменной. Решают их на отдельном листочке и затем сдают учителя для проверки.

При подведении итогов занятия можно спросить у обучающихся:

- Какие преимущества и недостатки графического метода они видят в сравнении с другими методами решения систем уравнений и неравенств?
- Что, на их взгляд, труднее решать графически: системы уравнений или неравенств? Почему?
- Какие трудности возникали при решении систем уравнений и неравенств?

Занятие 16. Тема. Звездный час функции

Цели: проверка усвоения знаний обучающимися по темам пройденного курса; повышение математической культуры учащихся; развитие

исследовательской и познавательной деятельности; интереса к математике; овладение языком математики в письменной и устной форме; применение полученных знаний.

Структура занятия: проверка домашнего задания (3 мин.), объявление темы и целей занятия (2 мин.), выполнение заданий (35 мин.), подведение итогов занятия (5 мин.).

Комментарий к занятию

Учитель еще раз обращает внимание обучающихся на то, что функция – это одно из основных математических и общенаучных понятий. Сообщает, что сегодня на занятии вспомним основные свойства функции, методы построения графиков функций, исследование, а также будем выполнять интересные и занимательные задания.

Далее выполняются задания. Обучающийся, выполнивший задание первым – получает 2 балла.

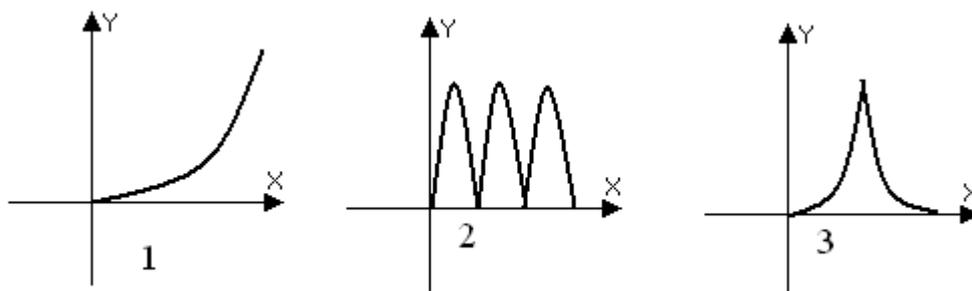
Задание 1.

Изобразите в виде графика смысл следующих поговорок:

1. Чем дальше в лес, тем больше дров.
2. выше меры конь не прыгнет.
3. Пересев хуже недосева.

Учитель поясняет 3 поговорку, что вековой опыт человека свидетельствовал: урожай лишь до некоторой поры растет вместе с плотностью посева, дальше он снижается, потому, что при чрезмерной густоте ростки начинают глушить друг друга.

Ответ:



Функции обладают множеством различных свойств, и, исследуя ту или иную функцию, мы отмечаем их наличие или отсутствие.

Задание 2.

Среди данных шести функций (рис. 18-20) укажите номер той, которая не отвечает свойству остальным пяти.

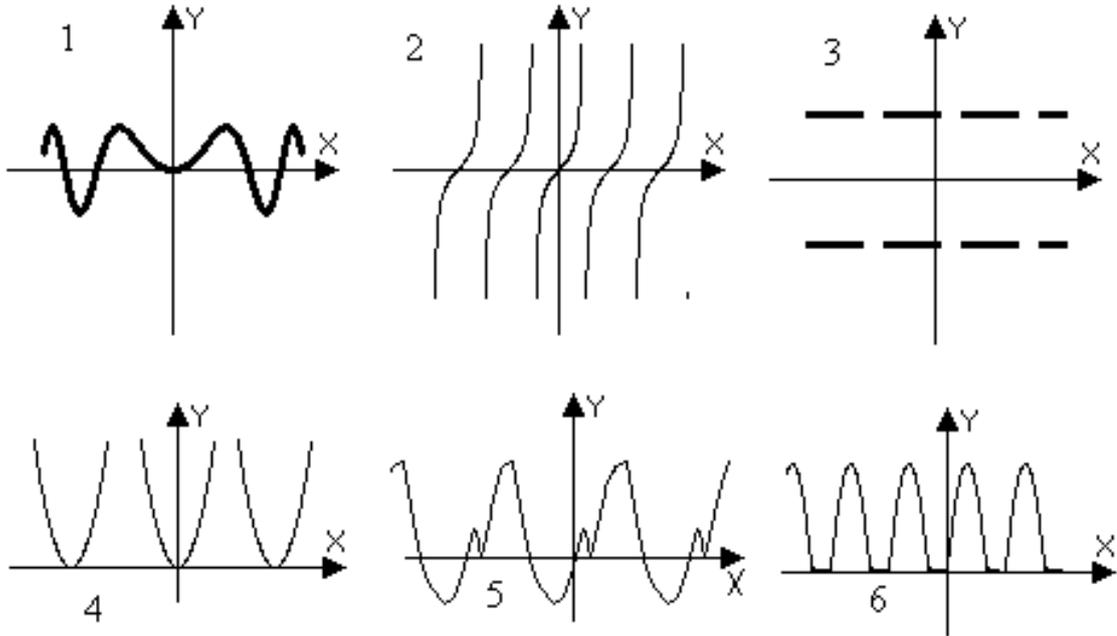


Рис. 18

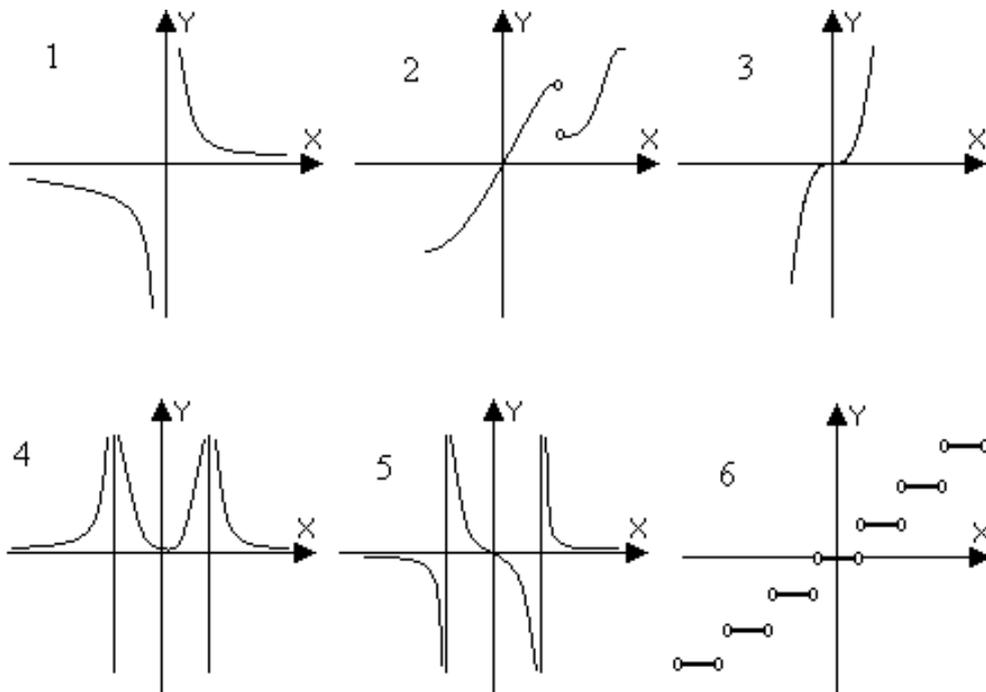


Рис. 19

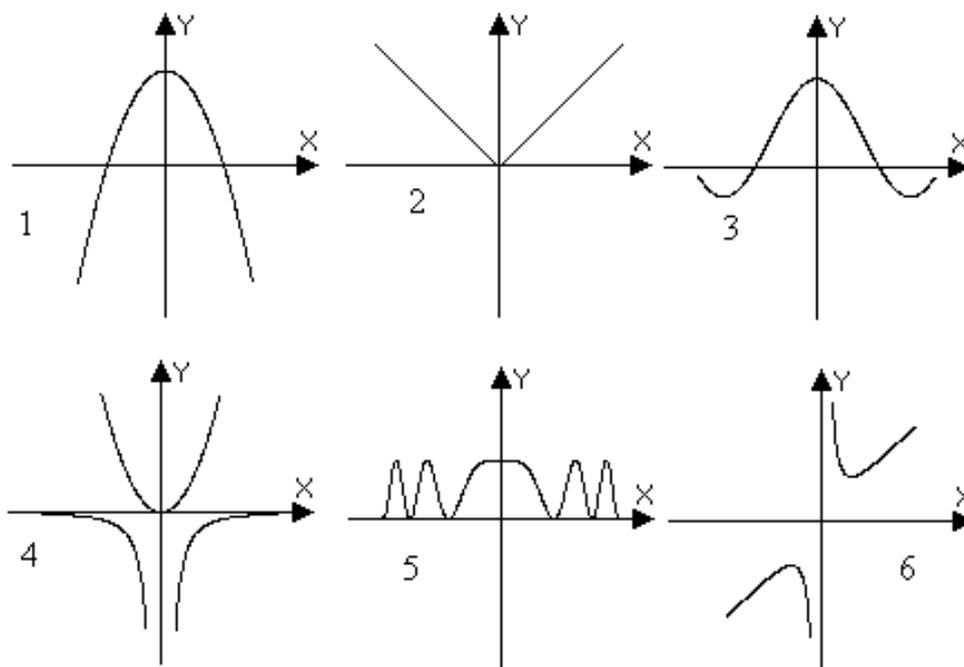


Рис. 20

Ответ: функция под 1 – неперiodическая; функция под 3 – непрерывная; функция под 6 – нечетная.

Задание 3.

Постройте график функции $y = f(f(f(x)))$, если $f(x) = 1/(1-x)$.

Решение: область определения функции f множество действительных чисел, кроме 1.

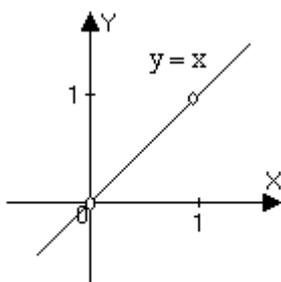
Далее,

$$y = f(f(x)) = 1/(1 - 1/(1-x)) = 1/((1-x-1)/(1-x)) = 1/(-x/(1-x)) = (x-1)/x.$$

Область определения полученной функции состоит из всех действительных чисел, кроме 1 и 0. Наконец,
 $y = f(f(f(x))) = 1/(1 - ((1-x)/x)) = 1/((x-x+1)/x) = 1/(1/x) = x.$

Следовательно, рассматриваемая функция во всей области определения совпадает с функцией $y = x$.

Таким образом, графиком заданной функции является график функции $y = x$ ($x \neq 0, x \neq 1$).



Задание 4.

Не выполняя построения графика функции, найдите ее наибольшее или наименьшее значение:

- 1) $y = (x + 5)^2 + 2$;
- 2) $y = -(x + 5)^2 + 2$;
- 3) $y = 3x^2$;
- 4) $y = -3(x - 3)^2$;
- 5) $y = 2(x + 1)^2$;
- 6) $y = -3x^2 - 3$;
- 7) $y = x^2 + 2x + 1$.

ОТВЕТЫ: 1) $y_{\min} = 2$;

2) $y_{\max} = 2$;

3) $y_{\min} = 0$;

4) $y_{\max} = 0$;

5) $y_{\min} = 0$;

6) $y_{\max} = -3$;

7) $y_{\min} = 0$.

В конце занятия при подведении итогов спросить у учащихся, какие задания им понравились, какие они бы еще придумали.

Так как это последнее занятие, то поинтересоваться, был ли им полезен данный элективный курс, что было познавательно, а что давалось с трудом какой профиль бы выбрали, если бы сейчас нужно было выбирать.

2. Библиографический список

1. *Возняк Г.* Прикладные задачи на экстремумы. М.: Просвещение, 1985.
2. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. *Функции и графики.* М.: Наука, 1965. 120 с.
3. *Глейзер Г.М.* История математики в школе. М.: Просвещение, 1964. 376 с.
4. Даю уроки математики...: Книга для учителя: Из опыта работы / А.П. Карп. М.: Просвещение, 1992 . 191 с.
5. *Дворянинов С.В.* О графиках сложных и дробно-квадратичных функций // Математика в школе. 2018. №1. С.33-38.
6. *Доморяд А.П.* Математические игры и развлечения М.: ГИФМЛ, 1961. 267 с.
7. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах / А.А. Колосов. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1963. 435 с.
8. *Кострикина Н.П.* Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7—9 классов М.: Просвещение, 1991. 239 с.
9. *Кузнецова Л.В., Бунимович Е.А., Пигарев Б.П., Суворова С.Б.* Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы, 9 класс. — 14-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2008. 192 с.
10. *Лузин А.Н.* Вне урока. Преобразование простейших функций к виду визуально опознаваемым экстремумом (операция выделения квадрата) // Математика в школе. 2017. №8. С.p_03.
11. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г.* Алгебра-8 // Математика. 1995. №22. С. 34—36.
12. *Михарева Т.* «Звездный час функции» (викторина) // Математика. 1995. №8. С. 23—42.
13. *Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С.* Математическая шкатулка: Пособие для учащихся 4—8 кл. средней школы. М.: Просвещение, 1988. 160 с.
14. *Неискашова Е.В.* Тренировочные контрольные измерительные материалы для подготовки к ГИА по математике // Математика в школе. 2011. №2. С.33-37.

15. Основные математические формулы: Справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович; под ред. Ю.С. Богданов, изд. второе, переработанное и дополненное. Минск: Вышэйшая школа, 1988. 269 с.
16. *Потапов К.М., Шевкин А.В., Вукколова Т.М.* Умножение уравнения или неравенства на функцию // Математика в школе. 2006. № 10. С. 32.
17. Преподавание алгебры в 6-8 классах. Составители Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. Москва: Просвещение, 1980. 268 с.
18. *Сергеев И.Н., Олехник С.Н., Гашков С.Б.* Примени математику. М.: Наука, 1989. 240с.
19. *Сивашинский И.Х.* Элементарные функции и графики. Теория и задачи с решениями. М.: Наука, 1965. 244 с.: ил.
20. Учебное оборудование на уроках алгебры (6 класс) М. Я. Антоновский, Г.Г. Левитас. М.: Просвещение, 1980. 144 с.
21. *Шашкина М.Б., Багачук А.В.* Игровые технологии в обучении математике учащихся специализированных классов// Математика в школе. 2019. №1. С. 44–51.

§ 3. Апробация разработанного элективного курса

Созданный элективный курс «Функции, их свойства и графики» был апробирован в МКОУ Большехабыкская средняя общеобразовательная школа в 9 классе. Занятия посещали 5 человек, это те учащиеся, которые учатся на четыре и пять, и интересуются математикой. Нами было проведено только четыре занятия. Посоветовавшись с директором, мы выбрали темы «Кусочная функция», «Биквадратная функция», «Действия с графиками» и «Графический способ решения систем уравнений и неравенств». Эти темы были выбраны неслучайно, так как шла подготовка девятиклассников к ГИА. Занятия проходили точно так же, как они описаны в элективном курсе. После проведения второго занятия была беседа с обучающимися о проведенных занятиях. Ниже приведены некоторые апробированные занятия из перечисленных.

Занятие №1

Тема. Кусочные функции

На первом занятии, как и написано в методических рекомендациях, мы повторили необходимые для изучения данной темы известные обучающимся сведения (определения функции, понятие об области определения и множестве ее значений, способы задания функции с помощью формулы). Далее на примере функции $y = |x|$ было рассмотрено кусочное задание функции. Введено понятие кусочной функции. Затем выполнили задания 1, 2, 3, (1, 2), вспоминая как находить значение функции. Задание 4 не успели выполнить до конца. При выполнении заданий обучающиеся работали активно, все старались высказать свою точку зрения по каждому заданию. Но темп занятия не был высок, потому что обучающиеся привыкли все досконально записывать.

Занятие №2

Тема. Биквадратная функция

В начале занятия мы повторили необходимые для изучения данной темы известные обучающимся сведения (виды преобразований графиков функции, определение квадратичной функции, что собой представляет график квадратичной функции). Затем познакомились с определениями минимума и максимума функции; определением биквадратной функции. Далее было рассмотрено построение биквадратной функции, Затруднения возникли только при построении графика функции $y = x^4 - x^2$. Для закрепления выполнили одно задание под (а), при его выполнении у обучающихся не возникало вопросов. Так как занятие подходило к концу, задание под (б) выполнять не стали, а перешли к выполнению теста. При его выполнении учащиеся работали активно, с интересом.

Занятие №3

Тема. Действия с графиками

Занятие начинается с изучения новой темы. Было рассмотрено определение суммы функции, после чего самостоятельно (почти без ошибочно) выполнили пример на закрепление. На следующем этапе урока вводилось определение произведения двух функций, у обучающихся возникли затруднения с определением знака произведения. При решении примера к нашей помощи почти не прибегали. И последнее было рассмотрено частное двух функций. Затем приступили к выполнению задания. При решении систем уравнений обучающиеся постоянно были включены в работу, работали активно. К сожалению, последнее задание не удалось успеть выполнить.

Занятие №4

Тема. Графический способ решения систем уравнений и неравенств

В начале занятия мы повторили необходимый материал для данной темы (что такое уравнение с двумя переменными, система уравнений с двумя переменными, система неравенств с одной переменной, системы уравнений и неравенств первой и второй степени; способы решений систем уравнений и

неравенств). Затем приступили к выполнению задания 1 (а, в), 2 (а), 3 (а, в). При решении систем уравнений обучающиеся постоянно были включены в работу, почти не прибегали к нашей помощи. Затруднения возникли только при построении графика функции $x^2 - y^2 = 0$. При решении систем неравенств обучающиеся путали, какую точку включать в промежуток, а какую нет. При построении уравнений второй степени трудностей не возникало. К сожалению, не все задания удалось успеть выполнить.

Проведенные занятия позволили сделать некоторые предварительные выводы:

Подобранный нами материал по указанным темам посилен обучающимся, они с интересом и большой активностью работали на всех занятиях. Эти занятия показали, что построение кусочных функций не вызывает затруднений; биквадратные функции заинтересовали обучающихся; действия над графиками понравились своей новизной; графическое решение систем уравнений и неравенств вызвало большой интерес, при решении этим методом у обучающихся почти не было ошибок.

Заключение

В ходе работы были решены следующие задачи:

- 1) проведен анализ литературы по профильному обучению и предпрофильной подготовки обучающихся;
- 2) проведен анализ представления информации по функционально-графической линии в программах и учебниках по математике различных авторов для общеобразовательных школ (VII – IX кл.);
- 3) был отобран материал для элективного курса;
- 4) составлена программа курса;
- 5) разработаны методические рекомендации к занятиям;
- 6) по созданному элективному курсу было проведено четыре занятия в МБОУ Большехабыкская средняя общеобразовательная школа, в 9 классе. Результаты проанализированы.

Выдвинутая в начале работы гипотеза была частично подтверждена. По проведенным занятиям можно сделать выводы: данный элективный курс интересен обучающимся и полезен. Мы считаем, что достаточно полный элективный курс по теме «Функции, их свойства и графики» даст им более глубокие знания по данной теме, и будет способствовать ориентации на профиль в старшей школе, где математика относится к числу профилирующих предметов.

Библиографический список

1. *Возняк Г.* Прикладные задачи на экстремумы. М.: Просвещение, 1985.
2. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. *Функции и графики.* М.: Наука, 1965. 120 с.
3. *Глейзер Г.М.* История математики в школе. М.: Просвещение, 1964. 376 с.
4. *Данкова И.Н., Бондаренко Т.Е., Емелина Л.Л., Плетнева О.К.* Предпрофильная подготовка учащихся 9 классов по математике: общие положения, структура портфолио, программы курсов, сценарии занятий. М.: «5 за знания», 2006. 128 с.
5. Даю уроки математики...: Книга для учителя: Из опыта работы / А.П. Карп. М.: Просвещение, 1992. 191 с.
6. *Дворянинов С.В.* О графиках сложных и дробно-квадратичных функций // Математика в школе. 2018. №1. С.33-38.
7. *Доморяд А.П.* Математические игры и развлечения М.: ГИФМЛ, 1961. 267 с.
8. *Дорофеев Г. В., Суворова С. Б., Бунимович В. А.* Математика 7: Арифметика. Алгебра. Анализ данных: учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений. М.: Дрофа, 2007. 288 с.: ил.
9. *Дорофеев Г. В., Суворова С. Б., Бунимович В. А.* Математика 8: Алгебра; Функции; Анализ данных: учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений. М.: Дрофа, 2007. 256 с.: ил.
10. *Дорофеев Г. В., Суворова С. Б., Бунимович В. А.* Математика 9: Алгебра; Функции; Анализ данных: учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений. М.: Дрофа, 2007. 304 с.: ил.
11. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах / А.А. Колосов. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1963. 435 с.
12. Колякин Ю.М, Ткачёва М.В, Федорова Н.Е, Шабунин М.И. Об учебниках алгебры для 7-9 классов // Математика в школе. 2013. № 4. С. 22—28.
13. *Кострикина Н.П.* Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7—9 классов М.: Просвещение, 1991. 239 с.

14. Кузнецова Л.В., Бунимович Е.А., Пигарев Б.П., Суворова С.Б. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы, 9 класс. — 14-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2008. 192 с.
15. Лузин А.Н. Вне урока. Преобразование простейших функций к виду визуально опознаваемым экстремумом (операция выделения квадрата) // Математика в школе. 2017. №8. С.р_03.
16. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра 7: учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2013. 256 с.: ил.
17. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра 8: учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2013. 287 с.: ил.
18. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра 9: учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2014. 271 с.: ил.
19. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.
Алгебра 7: учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений. М.: Вентана - Граф, 2015. 272 с.: ил.
20. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.
Алгебра 8: учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений. М.: Вентана - Граф, 2013. 256 с.: ил.
21. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.
Алгебра 9: учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений. М.: Вентана - Граф, 2014. 304 с.: ил.
22. Михарева Т. «Звездный час функции» (викторина) // Математика. 1995. №8. С. 23–42.
23. Молчанов С.Г., Симонян Р.Я. Предпрофильное и профильное образование. Терминологический словарь. М.: Дом Федорова. 2006. 48 с.
24. Мордкович А.Г. Алгебра 7: учебник для учащихся 7 класса общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2013. 175 с.: ил.

25. *Мордкович А.Г.* Алгебра 8: учебник для учащихся 8 класса общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2013. 216 с.: ил.
26. *Мордкович А.Г.* Алгебра 9: учебник для учащихся 9 класса общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2013. 223 с.: ил.
27. *Мордкович А.Г., Мишутина Т.Н., Тульчинская Е.Е.* Алгебра 7: задачник для учащихся 7 класса общеобразовательных учреждений М.: Мнемозина, 2009. 270 с.: ил.
28. *Мордкович А.Г., Мишутина Т.Н., Тульчинская Е.Е.* Алгебра 8: задачник для учащихся 8 класса общеобразовательных учреждений М.: Мнемозина, 2010. 271 с.: ил.
29. *Мордкович А.Г., Мишутина Т.Н., Тульчинская Е.Е.* Алгебра 9: задачник для учащихся 9 класса общеобразовательных учреждений М.: Мнемозина, 2010. 223 с.: ил.
30. *Мордкович А.Г.* Алгебра: методическое пособие для учителей. М.: Мнемозина, 1997. 265 с.
31. *Мордкович А.Г.* Концепция и программа курса алгебры для общеобразовательной школы. // Методическое пособие для учителя. Мнемозина. 2017., С. 5–21.
32. *Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С.* Математическая шкатулка: Пособие для учащихся 4—8 кл. средней школы. М.: Просвещение, 1988. 160 с.
33. Национальный проект "Образование" <https://edu.gov.ru/national-project>
34. *Неискашова Е.В.* Тренировочные контрольные измерительные материалы для подготовки к ГИА по математике // Математика в школе. 2011. №2. С.33-37.
35. *Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.* Алгебра 7: учебник для учащихся 7 класса общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2013. 287 с.
36. *Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.* Алгебра 8: учебник для учащихся 8 класса общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2014. 301 с.

37. *Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.* Алгебра 9: учебник для учащихся 9 класса общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2014. 335 с.
38. Основные математические формулы: Справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович; под ред. Ю.С. Богданов, изд. второе, переработанное и дополненное. Минск: Вышэйшая школа, 1988. 269 с.
39. Преподавание алгебры в 6-8 классах. Составители Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. Москва: Просвещение, 1980. 268 с.
40. Программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев Математика. 5-11 кл. Составители Г.М. Кузнецова, Н.Г. Миндюк. – 2-е издание, стереотип. – М. Дрофа 2001. 320 с.
41. *Сергеев И.Н., Олехник С.Н., Гашков С.Б.* Примени математику. М.: Наука, 1989. 240с.
42. *Сивашинский И.Х.* Элементарные функции и графики. Теория и задачи с решениями. М.: Наука, 1965. 244 с.: ил.
43. Учебное оборудование на уроках алгебры (6 класс) М. Я. Антоновский, Г.Г. Левитас. М.: Просвещение, 1980. 144 с.
44. Федеральный Государственный Стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]. <https://base.garant.ru/55170507/> (Дата обращения 15.04.2020).
45. Федеральный закон «Об Образовании» [Электронный ресурс]. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/ (дата обращения 15.04.2020).
46. *Шабашова О.В.* Система заданий как средство формирования умений применять функционально-графический метод для решения задач с параметрами // Математика в школе. 2019. № 5. С. 43-59.
47. *Шашкина М.Б, Багачук А.В.* Игровые технологии в обучении математике учащихся специализированных классов// Математика в школе. 2019. №1. С. 44–51.

48. Элективные курсы: алгоритмы создания, примеры программ / Г.А. Воронина. М.: Айрис-Пресс, 2006. 128 с.