МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт математики, физики и информатики
Кафедра математики и методики обучения математике

БЕРНАЦКАЯ ЯНА АНДРЕЕВНА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ЗАДАЧИ ОТКРЫТОГО ТИПА НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ 7 КЛАССА

Направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность (профиль) образовательной программы
Математика и информатика

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой
проф., д-р пед. наук Шкерина Л.В.
____

Научный руководитель
канд. пед. наук, доцент Кейв М.А.
____

Дата защиты
____

Обучающийся
Бернацкая Я.А.
____

Оценка________________________

Красноярск 2020

Оглавление

Введение

Федеральные государственные образовательные стандарты основного общего образования определили новые требования к метапредметным результатам освоения образовательной программы, среди которых познавательные универсальные учебные действия обучающихся. Для осуществления познавательной деятельности в ходе обучения, необходимо выполнять общеучебные действия, логические действия и действия постановки и решения проблем. Поиск возможностей формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся на уроках математики, на сегодня, остается одной из актуальных проблем школьного математического образования.

С позиций системно-деятельностного подхода, являющегося методологической основой новых образовательных стандартов основного общего образования, при проектировании содержания обучения математике, особое внимание следует уделить комплексу задач как основному его компоненту. Помимо стандартных и обучающих задач, которые условно можно назвать задачами закрытого типа, в содержание обучения математике целесообразно включать поисковые и проблемные задачи – задачи открытого типа.

Задачи открытого типа имеют несколько вариантов решения, предполагают возможность обучающимся самостоятельно открывать неизвестные им факты. Такие задачи позволяют максимально вовлечь обучающихся в учебную и познавательную деятельность.

Тема выпускной квалификационной работы посвящена методике использования задач открытого типа на уроках математики как условие формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся 7 класса.

Гипотеза исследования: если в процессе обучения математике систематически использовать задачи открытого типа, то это будет способствовать формированию познавательных УУД обучающихся.

Цель работы: методическая разработка комплекса задач открытого типа для уроков математики 7 класса.

Объект исследования: математическая подготовка обучающихся 7 класса.

Предмет исследования: задачи открытого типа по математике как средство формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся 7 класса.

З*адачи исследования*:

1. Описать структурный состав познавательных универсальных учебных действий обучающихся 7 класса.
2. Разработать диагностическую карту для оценки и измерения уровня сформированности познавательных универсальных учебных действий обучающихся 7 класса.
3. Описать роль, место и значение задач открытого типа для формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся.
4. Разработать комплекс задач открытого типа для уроков математики 7 класса.
5. Провести педагогический эксперимент, проанализировать и описать его результаты.

Глава 1. Познавательные универсальные учебные действия обучающихся и дидактические условия их формирования

1.1. Познавательные универсальные учебные действия обучающихся

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (ФГОС ООО) устанавливаются требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы: личностным, метапредметным и предметным. Метапредметные результаты включают освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия (УУД): регулятивные, познавательные, коммуникативные [ФГОС ООО, 2010].

Согласно ФГОС, универсальные учебные действия (УУД) – способность субъекта к саморазвитию и самосовершенствованию путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта; совокупность действий обучающего, обеспечивающих его культурную идентичность, социальную компетентность, толерантность, способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию этого процесса.

Универсальные учебные действия определяют как обобщенные действия, открывающие возможность широкой ориентации обучающихся как в различных предметных областях, так и в строении самой учебной деятельности, включая осознание обучающимися ее целевой направленности, ценностносмысловых и операциональных характеристик [Шкерина, 2018].

А.Г. Асмолов понятие «универсальные учебные действия» толкует в двух значениях (в широком и узком значениях). В широком значении термин «универсальные учебные действия» означает умение учиться, т.е. способность обучающихся к саморазвитию и самосовершенствованию путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта. В более узком значении этот термин можно определить как совокупность способов действия учащегося (а также связанных с ними навыков учебной работы), обеспечивающих самостоятельное усвоение новых знаний, формирование умений, включая организацию этого процесса [Асмолов, 2010].

Универсальные учебные действия подразделяются на регулятивные, познавательные и коммуникативные. Анализ стандартов общего образования показывает, что особое внимание в них уделяется развитию познавательных универсальных учебных действий (УУД) [Дулатова, Лапшина, 2017].

В Глоссарии ФГОС общего образования [Глоссарий ФГОС], составленном на основе терминов ФГОС, отсутствует само понятие «познавательные УУД». Также определение данного понятия отсутствует и в учебных пособиях, рекомендованных для проектирования УУД и их формирования. Некоторые авторы, например В.С. Броздецкий, использует понятие «познавательное развитие» – «формирование у обучающихся научной картины мира; развитие способности управлять своей познавательной и интеллектуальной деятельностью; овладение методологией познания, стратегиями и способами познания и учения; развитие репрезентативного, символического, логического, творческого мышления, продуктивного воображения, произвольных памяти и внимания, рефлексии» [Броздецкий, Электронный ресурс]. Это же понятие использует в своей работе и Асмолов [Асмолов, 2010].

Определение «познавательные универсальные учебные действия» находим в немногочисленных работах, посвященных их классификации, формированию и развитию. Нестерова И.А. пишет, что под познавательными универсальными учебными действиями подразумевается педагогически обоснованная система способов познания окружающего мира, построения самостоятельного процесса поиска, исследования и совокупность операций по обработке, систематизации, обобщению и использованию полученной информации [Нестерова, 2017]. В работе Л.Г. Шестаковой встречается такое же определение познавательных УУД [Шестакова, 2014].

Также можно встретить определение познавательных УУД как умственных действий, направленных на планирование, осуществление, анализ своей познавательной деятельности и управление ею на основе способов деятельности, используемых как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях, освоенных обучающимися на базе одного, нескольких или всех учебных предметов [Чуланова, Черняева, 2014].

Осмоловская И.М. отмечает, что лишь в процессе учебной деятельности формируются познавательные действия [Осмоловская, 2012].

В блоке познавательных универсальных действий Асмолов выделяет следующие виды действий: общеучебные действия, включая знаково-символические; логические и действия постановки и решения проблем. Также он перечисляет сами действия, относящиеся к разным видам познавательных УУД, которые приведены ниже в таблице 1.

Таблица 1. Виды познавательных УУД (по А.Г. Асмолову)

Виды действий
Общеучебные (включая знаково-символические)
• Самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели; • Поиск и выделение необходимой информации; • Применение методов информационного поиска, в том числе с помощью компьютерных средств; • Знаково-символические действия, включая моделирование (преобразование объекта из чувственной формы в модель, где выделены существенные характеристики объекта, и преобразование модели с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область); • Умение структурировать знания; • Умение осознанно и произвольно строить речевое высказывание в устной и письменной форме; • Выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; • Рефлексия способов и условий действия; • Контроль и оценка процесса и результатов деятельности; • Смысловое чтение как осмысление цели чтения и выбор вида чтения в зависимости от цели; • Извлечение необходимой информации из прослушанных текстов различных жанров; • Определение основной и второстепенной информации;

• Свободная ориентация и восприятие текстов художественного, научного, публицистического и официально-делового стилей; • Понимание и адекватная оценка языка средств массовой информации; • Умение адекватно, подробно, сжато, выборочно передавать содержание текста, составлять тексты различных жанров, соблюдая нормы построения текста (соответствие теме, жанру, стилю речи и др.).
Логические
• Анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); • Синтез как составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов; • Выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов; • Подведение под понятия, выведение следствий; • Установление причинно-следственных связей; • Построение логической цепи рассуждений, доказательство; • Выдвижение гипотез и их обоснование.
Действия постановки и решения проблем
Включают формулирование проблемы и самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера.

В основной школе обучающиеся начинают овладевать высшими формами мыслительной деятельности – теоретическим, формальным, рефлексивным мышлением. У подростка появляется способность рассуждать, используя гипотезы и дедукцию, то есть на основе общих посылок, абстрактно-логически (в словесном плане), не прибегая к опоре на действия с конкретными примерами. Содержанием такого рассуждения являются высказывания (суждения), а процесс решения интеллектуальных задач опирается на предварительное мысленное построение различных предположений и их последующую проверку. Умение оперировать гипотезами как отличительный инструмент научного рассуждения – одно из важнейших достижений подростка в познавательном развитии. Интеллектуализация затрагивает даже такой процесс, как восприятие: нахождение и выделение значимых, существенных связей и причинно-следственных зависимостей при работе с наглядным материалом, в том числе с текстом [Шкерина, 2018].

Отметим, что необходимо развивать познавательные универсальные учебные действия при работе с текстом, поскольку в основе изучения любого предмета лежит осмысление текста учебника и/или другой учебной информации [Чуланова, 2016].

Качество развития любых умений и навыков, в том числе и познавательных УУД, во многом зависит от того, как организована система оценивания, насколько точно она отражает реальный уровень сформированности диагностируемых результатов обучения.

Формирование, а как следствие – и оценка, универсальных учебных действий должно быть реализовано в процессе обучения. Поэтому необходимо, прежде всего, охарактеризовать различные виды универсальных учебных действий в диагностируемом виде – как конкретные операции, которые лежат в основе каждого действия.

В рамках данного исследования выделим и охарактеризуем структурные элементы следующих базовых познавательных УУД обучающихся 7 класса: общеучебные (работа с текстом); логические (логические рассуждения) и действия постановки и решения проблем (таблица 2).

Таблица 2. Структурные элементы базовых познавательных УУД обучающихся 7 класса.

Виды действий	Характеристика (элемент УУД)
Общеучебные (включая знаково-символические) УУД	
Работа с текстом	• Знает способы работы с информацией; • Умеет извлекать информацию из различных учебных текстов; • Владеет различными способами работы с информацией.
Логические УУД	
Построение логической цепи рассуждений, доказательство	• Знает способы построения логической цепи рассуждений, проведения доказательства; • Умеет строить логическую цепь рассуждения, проводить доказательство; • Владеет различными способами построения логической цепи рассуждений, проведения доказательства.
Действия постановки и решения проблем	

Действия постановки и решения проблем	• Знает способы решения проблем; • Умеет формулировать проблему и находить подходящий для неё способ решения; • Владеет различными способами решения проблем творческого и поискового характера.

По полноте сформированности структурных элементов базовых познавательных УУД обучающихся 7 класса, условно выделим и охарактеризуем следующие уровни познавательных УУД обучающихся (таблица 3).

Таблица 3. Уровни сформированности познавательных УУД обучающихся 7 класса

Виды действий	Уровень сформированности познавательных УУД у обучающихся		
	Низкий	Средний	Высокий
Общеучебные (включая знаково-символические) УУД			
Работа с текстом	Знает способы работы с информацией.	Знает способы работы с информацией; Умеет извлекать информацию из различных учебных текстов.	Знает способы работы с информацией; Умеет извлекать информацию из различных учебных текстов; Владеет различными способами работы с информацией.
Логические УУД			
Построение логической цепи рассуждений, доказательство	Знает способы построения логической цепи рассуждений, проведения доказательства.	Знает способы построения логической цепи рассуждений, проведения доказательства; Умеет строить логическую цепь рассуждения, проводить доказательство.	Знает способы построения логической цепи рассуждений, проведения доказательства; Умеет строить логическую цепь рассуждения, проводить доказательство; Владеет различными способами построения логической цепи рассуждений, проведения доказательства.

Действия постановки и решения проблем			
Действия постановки и решения проблем	Знает способы решения проблем.	Знает способы решения проблем; Умеет формулировать проблему и находить подходящий для неё способ решения.	Знает способы решения проблем; Умеет формулировать проблему и находить подходящий для неё способ решения; Владеет различными способами решения проблем творческого и поискового характера.

Таким образом, под познавательными УУД мы будем понимать набор знаний, умений и навыков, необходимых не только для работы с информацией в процессе обучения, но и для познания окружающего мира. Познавательные УУД включают в себя различные действия, такие как работа с текстом, поиск и обработка информации, мыслительные операции, действия постановки и решения проблем и др. В зависимости от умений осуществлять познавательную деятельность, мы можем говорить об уровнях сформированности познавательных УУД у обучающихся: низком, среднем и высоком.

1.2. Задачи открытого типа по математике как средство формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся

Под содержанием образования следует понимать ту систему научных знаний, практических умений и навыков, а также мировоззренческих и нравственно-эстетических идей, которыми необходимо овладеть обучающимся в процессе обучения.

Без научно обоснованного содержания образования трудно рассчитывать на успешное осуществление основной цели современного воспитания – всестороннего и гармонического развития обучающихся, потому что в самом этом содержании и его направленности заложены основы формирования растущей личности [Харламов, 1999].

Формировать познавательные универсальные учебные действия призваны все предметы учебного плана, однако большая роль при формировании познавательных универсальных учебных действий отводится математике [Трифоненко, 2019].

Некоторые авторы рассматривают решение текстовых задач по математике как специальную технологию формирования УУД у обучающихся при обучении математике [Боженкова, Соколова, 2016; Жигачева, 2015; Лупанова, 2017; Мишакина, Аввакумова, 2016]. Умение решать математические задачи, а тем более задачи открытого типа, необходимо обучающимся, так как оно способствует развитию аналитических способностей, сообразительности, нешаблонного мышления и т.д. Отсюда можно сделать вывод, что как математические задачи открытого типа, так и умение решать такие задачи, является элементом содержания обучения.

Средства обучения – это источники получения знаний, формирования умений.

Понятие «средства обучения» употребляется в широком и узком смыслах. В узком смысле под средствами обучения понимают учебные и наглядные пособия, демонстрационные устройства, технические средства и пр. В широком смысле под средствами обучения подразумевается все то, что способствует достижению целей образования, т.е. вся совокупность методов, форм, содержания, а также специальных средств обучения [Вайндорф-Сысоева, Крившенко, 2005].

Основываясь на широком смысле понятия «средства обучения», мы можем сделать вывод, что при решении задач учениками достигается основная цель обучения – развитие обучающихся. С этой точки зрения математические задачи являются не только элементом содержания обучения, но и средством обучения.

Работа с текстовыми задачами способствует развитию познавательных УУД, что обуславливает целесообразность использования данного средства обучения в образовательном процессе [Ермолаев, 2017].

Термин «задача» используется как в жизни, так и в науке очень широко. Разные авторы наделяют этот термин различными значениями. А.Н. Леонтьев определяет задачу как цель, данную в определённых условиях [Леонтьев, 1975]. Фридман – как ситуацию, включающую цель и условия для её достижения [Фридман, 1998]. Ю.М. Колягин же определяет задачу как систему – множество элементов, на котором определено заранее заданное отношение [Колягин, 1977].

В словаре Ожегова даны следующие значения понятия «задача»:

1. То, что требует исполнения, разрешения. *Поставить задачу. Выполнить задачу.*
2. Упражнение, которое выполняется посредством умозаключения, вычисления. *Арифметическая задача.*
3. Сложный вопрос, проблема, требующие исследования и разрешения. *Научная задача* [Ожегов, 2012].

Словесная формулировка задачи как обобщенная знаковая модель множества прошлых проблемных ситуаций является специфической формой представления содержания обучения.

В работах Л.М. Фридмана говорится о том, что роль задач в обучении «определяется с одной стороны тем, что в значительной своей части конечные цели обучения любому предмету сводятся к овладению обучающимися методами решения определенной системы задач. С другой стороны, эта роль определяется тем, что полноценное достижение целей обучения возможно лишь с помощью решения обучающимися системы учебных задач. Таким образом, решение задач в обучении выступает как цель и как средство обучения» [Чуканцов, 1976].

В задаче выделяют следующие компоненты:

1. *условие* – это начальное состояние (данные элементы, свойства и связи между ними);
2. *заключение* – требование, цель, конечное состояние (результат решения – неизвестные элементы, свойства и связи между ними);
3. *базис решения* – теоретические основы решения (обоснование решения);
4. *решение («ответ»)* – преобразование условия задачи для нахождения требуемого [Кейв М.А., 2015].

Охарактеризуем основные функции задач в обучении математике, которые условно делят на три категории [Колягин, 1977]: обучающие, воспитывающие и развивающие.

Под обучающими функциями задач будем понимать такие функции, которые направлены на формирование системы математических знаний, умений, навыков у обучающихся (как предусмотренных программой, так и расширяющих и углубляющих ее содержание) на различных этапах ее усвоения.

Под воспитывающими функциями задач будем понимать функции, которые направлены на формирование нравственных качеств обучающихся.

Под развивающими функциями задач будем понимать такие их функции, которые направлены на развитие мышления обучающихся, на формирование качеств, присущих научному мышлению, на овладение приемами эффективной умственной деятельности [Колягин, 1977].

Но разные авторы по-разному выделяют функции задач в обучении математике. Например, по мнению Л. Фридмана, одной из основных в обучении математике функций задач является функция формирования и развития у обучающихся общих умений решений любых математических (в том числе и прикладных) задач [Фридман, 1998].

Таким образом, задачи в обучении математике играют важную роль – являются, с одной стороны, неотъемлемым компонентом содержания обучения, а с другой – средством обучения.

По величине проблемности задачи делят на (по Ю.М. Колягину):

- *стандартные* (известны все компоненты задачи);
- *обучающие* (неизвестен один из четырёх компонентов, как правило, решение);
- *поисковые* (неизвестны два из четырёх – база решения и само решение);
- *проблемные* (неизвестны три из четырёх – определена только цель, комплекс необходимых условий, путей и средств, достаточных для достижения этой цели, человек устанавливает самостоятельно) [Колягин, 1977].

Стандартные и обучающие задачи можно условно назвать закрытыми задачами, а задачи поисковые и проблемные – открытыми.

Задачи закрытого типа предусматривают чёткую и однозначную трактовку условия проблемы. В результате задача имеет, как правило, одно верное решение.

Формула закрытой задачи: чёткое решение + утверждённый способ решения = единственно правильный ответ [Кейв М.А., 2015].

Пример закрытой задачи из учебника А.Г. Мерзляка для обучающихся 7 класса:

№91. *Расстояние между двумя городами мотоциклист проехал за 0,8 ч, а велосипедист − за 4 ч. Скорость велосипедиста на 48 км/ч меньше скорости мотоциклиста. Найдите скорость каждого из них* [Мерзляк, 2015].

Для того чтобы решить данную задачу, достаточно знать алгоритм решения текстовых задач, который описывается в учебнике:

1. По условию задачи составить уравнение (сконструировать математическую модель задачи);
2. Решить полученное уравнение;
3. Выяснить, соответствует ли найденный корень смыслу задачи, и записать ответ.

Остановимся на рассмотрении «открытых задач». Термин «открытая задача» имеет несколько толкований. С одной стороны, открытые задачи (задачи, которые не имеют вариантов ответов) являются одной из форм тестовых заданий. Другой смысл в термин «открытая задача», связанный не с контролем, а непосредственно с процессом обучения, вкладывает А.В. Хуторской. Под открытыми задачами он понимает «задания, у которых нет, и не может быть заранее известных решений или ответов» [Хуторской, 2005].

Под открытыми задачами будем понимать такие задачи, которые имеют несколько вариантов решения, предполагают возможность уникальных ответов или позволяют ученикам самостоятельно открывать неизвестные им факты, а также учитывают их индивидуальные возможности. Цель таких задач – максимально вовлечь обучающихся в творческую познавательную деятельность.

Нельзя не согласиться с мнением отечественного философа Э.В. Ильенкова о том, что «процесс усвоения знаний надо организовывать так, как организует его жизнь. А именно: чтобы ребёнок постоянно был вынужден тренировать не столько память, сколько способность решать задачи, требующие самостоятельности суждения» [Ильенков, 2002]. Именно такому усвоению знаний способствуют открытые задачи.

Открытые задачи имеют размытые условия (с лишними данными или с недостатком данных), из которого недостаточно ясно, как действовать, что использовать при решении, но понятен требуемый результат [Утёмов, 2011]. Они имеют множество решений, которые не являются «прямолинейными». В таких задачах нет понятия «правильное решение»: решение либо применимо к достижению требуемого условия, либо нет.

Например, задачи с недостающими данными, не имеющие однозначного решения, требуют обширных знаний об объекте задачи, о связях его с другими объектами, которые могут оказаться полезными при получении ответа. Решение задач с недостающими данными нередко требует привлечения справочных материалов, что формирует у обучающихся умение работать с литературой. Обучающиеся приобретут потребность поиска дополнительной информации для решения учебных задач и самостоятельной познавательной деятельности; осваивают эффективные приёмы поиска [Безусова, 2013].

Формула открытой задачи: условие «размытое» + разные способы решения = набор возможных условных ответов [Кейв М.А., 2015].

Пример открытой задачи из учебника А.Г. Мерзляка для обучающихся 7 класса:

№203. *В некотором городе с любой станции метро можно проехать на любую другую станцию (возможно, с пересадками). Докажите, что существует станция, которую можно закрыть (без права проезда через нее), и при этом с любой из оставшихся станций можно будет проехать на любую другую* [Мерзляк, 2015].

В данной задаче решение зависит от того, какой вид имеет линия метро.

В первом случае, если линия метро имеет линейный вид, т.е. станции размещены на одной не замкнутой линии, то можно закрыть только первую или последнюю станцию, и только в этом случае с любой из оставшихся станций можно будет проехать на любую другую.

Во втором случае, если некоторый участок линии метро имеет замкнутый вид (например, как на рис. 1 с изображением схемы линий московского метро), то закрыв одну любую станцию на этом участке, то из оставшихся станций можно совершить ее объезд.

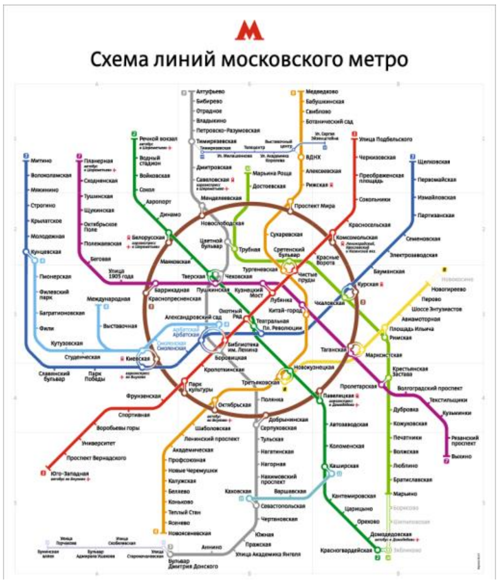


Рис. 1

Как правило, на уроках математики в школе используются задачи закрытого типа. Они подразумевают необходимость найти или доказать что-либо, исходя из конкретных условий. Задачи же открытого типа на уроках практически не используются. И чтобы удостовериться в этом, проанализируем несколько школьных учебников по математике для 7 класса разных авторов.

При рассмотрении учебника по математике для обучающихся 7 класса автора Мерзляка А.Г. отметим, что в нём рассматриваются не только стандартные задачи закрытого типа с одним предполагаемым ответом, но и открытые задачи. В учебнике присутствуют задачи разных уровней сложности: простые задачи, задачи среднего уровня сложности, сложные задачи и задачи повышенной сложности. Задачи открытого типа в данном учебнике помечены как «Учимся делать нестандартные шаги» и направлены на развитие у учеников логики и сообразительности. Всего в учебнике приведено 29 задач под названием «Учимся делать нестандартные шаги» - по одной задаче на каждый параграф учебника. При этом всего в учебнике даётся 1235 различных заданий и упражнений.

Рассмотрим пример задачи, помеченной как «Учимся делать нестандартные шаги».

№432. *В каждой клетке доски размером 5×5 клеток сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?* [Мерзляк, 2015]

Решение:

Так как доска имеет размер 5×5 клеток, то общее количество клеток на доске равно: 5*5 = 25.

Если раскрасить доску по примеру шахматной доски, начав с черной клетки, то получится, что черных клеток будет 13, а белых клеток 12, следовательно, жучков на черных клетках 13, а жучков на белых клетках 12.

При переползании жуки будут менять цвет клетки на которой они сидят на противоположный, а так как жучков изначально сидящих на белых клетках двенадцать, то при переползании они займут 12 черных клеток, а 13 жучков изначально сидящие на 13 черных клетках займут все 12 белых клеток, следовательно, жучки займут 12 + 12 = 24 клетки.

Получается, что при переползании жучков на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки обязательно останется как минимум одна пустая клетка, и как минимум на одной из клеток будут находиться два жучка.

Данная задача не требует от обучающихся конкретных математических знаний. Она направлена на развитие логики, аналитических способностей и сообразительности. Задачу будет решить ещё легче при схематичном изображении доски с клетками. Умение представлять текст в виде схем также является одним из познавательных УУД обучающихся 7 класса.

Также для сравнения нами был проанализирован школьный учебник по математике для 7 класса автора С.М. Никольского. В этом учебнике представлены следующие виды заданий: задания, предназначенные для устной работы, обычные задания и задания повышенной трудности. Все задания, представленные в учебнике, являются задачами закрытого типа. Не будем приводить примеры заданий, предназначенных для устной работы, и обычных заданий, так как они однозначно являются задачами закрытого типа. Рассмотрим пример задания повышенной трудности.

№447. *Задача Ибн Сины. Если число, будучи разделено на 9, даёт остаток 1 или 8, то квадрат этого числа, делённый на 9, даёт остаток 1. Докажите* [Никольский, 2013].

Решение:

Пусть это число x. Так как оно при делении на 9 даёт в остатке 1, то можно его записать в виде: x = 9n + 1.

Также при делении на 9 это число даёт остаток 8. Тогда число x можно записать ещё следующим образом: x = 9n + 8.

Возведём оба выражения в квадрат:

$$x^2 = (9n + 1)^2 = 81n^2 + 18n + 1$$

$$x^2 = (9n + 8)^2 = 81n^2 + 144n + 64$$

Преобразуем эти записи. Вынесем за скобки части, делящиеся на 9.

$$x^2 = 81n^2 + 18n + 1 = 9 * (9n^2 + 2n) + 1$$

$$x^2 = (9n + 8)^2 = 81n^2 + 144n + 64 = 81n^2 + 144n + 63 + 1 =$$
$$= 9 * (9n^2 + 16n + 7) + 1$$

Таким образом, мы видим, что в обоих случаях квадрат числа x при делении на 9 даёт в остатке 1. ЧТД.

Данная задача действительно сложнее обычных задач, представленных в учебнике, и для её решения требуется высокий уровень знаний. Она относится к задачам на делимость чисел. Для её решения необходимы не только предметные знания, такие как умение возводить во вторую степень, знание формулы квадрата суммы двух выражений и др., но и умения анализировать, выдвигать гипотезу решения и т.д., а подобные умения относятся к познавательным УУД.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что среди упражнений повышенной трудности в учебнике С.М. Никольского встречаются задачи открытого типа. Однако, задач повышенной трудности в учебнике очень мало: всего 93 задачи из 1132 представленных в учебнике.

Результаты анализа учебников по математике для обучающих 7 класса свидетельствуют о том, что в школьном курсе математики обучающимся в основном предлагаются задачи закрытого типа. Вследствие этого у обучающихся нет опыта решения задач открытого типа, что в свою очередь приводит к тому, что у обучающихся недостаточно развиты познавательные УУД.

Одним из способов решения данной проблемы является преобразование задач закрытого типа в задачи открытого типа. В рамках данного исследования, предложим несколько примеров того, как можно закрытые задачи преобразовать в открытые. Возьмём закрытые задачи из учебника по алгебре за 7 класс А.Г. Мерзляка, рассмотренного ранее.

Задача 1 (закрытого типа). Из двух городов, расстояние между которыми равно 385 км, выехали навстречу друг другу легковой и грузовой автомобили. Легковой автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, а грузовой − 50 км/ч. Сколько времени ехал до встречи каждый из них, если грузовой автомобиль выехал на 4 ч позже легкового? [№107, Мерзляк 2015]

Для того, чтобы преобразовать данную задачу в открытую, можно убрать некоторые данные из условия задачи. Например, уберём условие, указывающее, в каком направлении ехали автомобили. Тогда обучающимся при решении задачи придётся рассматривать несколько вариантов её решение.

Задача 1 (открытого типа). Из двух городов, расстояние между которыми равно 385 км, выехали легковой и грузовой автомобили. Легковой автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, а грузовой − 50 км/ч. Сколько времени ехал до встречи каждый из них, если грузовой автомобиль выехал на 4 ч позже легкового?

Задача 2 (закрытого типа). Из одночленов $4a, -3ab,\ 7a^2,\ -8a^2,\ 9ab,$ $5a$ выберите несколько и составьте из них: 1) многочлен стандартного вида;

2) многочлен, содержащий подобные члены; 3) два многочлена стандартного вида, используя при этом все данные одночлены [№299, Мерзляк 2015].

В условии данного задания прописаны результаты, которые должны получить ученики при его выполнении: многочлен стандартного вида; многочлен, содержащий подобные члены; два многочлена стандартного вида, используя при этом все данные одночлены. Если же изменить формулировку задания так, что обучающимся в условии задачи не будут даны конкретные результаты, к которым они должны прийти, то это задание будет иметь множество верных ответов и, как следствие, станет задачей открытого типа.

Задача 2 (открытого типа). Из одночленов $4a, -3ab,\ 7a^2, -8a^2$, $9ab, 5a$ составьте многочлен и найдите его значение при $a = 5$ и $b = 2$.

Для того, чтобы обучающиеся наиболее эффективно усваивали материал на уроках, и при этом у них происходило формирование познавательных УУД, необходимо в процессе обучения сочетать задачи открытого и закрытого типов.

Существует несколько вариантов последовательности предъявления открытых и закрытых задач на уроках математики [Гин, 2014]:

— «традиционный вариант» – сначала с помощью закрытых задач ученик должен успешно усвоить и натренировать определенные навыки решения задач, а потом уже через решение открытых ученик может приближать эти навыки к решению задач из реальной жизни;

— «развивающий вариант» – обучение начинается с открытых задач, а с помощью закрытых отрабатываются до автоматизма отдельные усвоенные элементы;

— «смешанный вариант», при котором открытые задачи используются как при введении нового материала, так и на стадии отработки полученных знаний.

Таким образом, в процессе обучения математике необходимо включать задачи открытого типа. Такие задачи направлены на развитие познавательных УУД обучающихся.

Глава 2. Формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся 7 класса на уроках математики

2.1 Комплекс задач открытого типа для уроков математики 7 класса

Для развития у обучающихся 7 класса познавательных универсальных учебных действий, мы предлагаем следующий комплекс задач.

Задачи на развитие общеучебных (включая знаково-символические) УУД – работа с текстом:

1. «…математики его величества, определив при помощи квадранта мой рост и найдя, что я в двенадцать раз выше лилипута, вычислили, что объем моего тела равен объему 1728 тел лилипутов и что оно требует во столько же раз больше пищи». Перед вами представлен отрывок из книги Джонатана Свифта «Путешествие Гулливера». а) Найдите в любом источнике информации, сведения об отношении подобных тел и определите, верно ли посчитан объём тела Гулливера, используя коэффициент подобия, если известно, что в стране лилипутов футу соответствовал дюйм. б) Вычислите свой рост, если бы вы были лилипутом.

Решение:

а) В реальности 1 фут = 12 дюймов. Эту информацию обучающиеся могут найти в удобных для них источниках информации. Поскольку в стране лилипутов 1 фут равен 1 дюйму, то, значит, в стране лилипутов все меры (длина, ширина, высота) в 12 раз меньше. Нам необходимо выяснить, верно ли посчитан объём.

О подобии фигур обучающиеся прочитают в удобных для них источниках информации. Тело обычного человека и тело лилипута подобны, они имеют одинаковые части – руки, ноги, туловище, голова. Из источников информации обучающиеся выяснят, что отношение объемов двух подобных тел равно k^3, где k – коэффициент подобия. А так как в стране лилипутов все меры в 12 раз меньше, то в данном случае k = 12. Следовательно, объём тела лилипута меньше объёма тела Гулливера в $k^3 = 12 * 12 * 12 = 1728$ раз. Отсюда мы получаем, что объём тела Гулливера верен.

б) Для примера я рассмотрю свой собственный рост. Мой рост 158 см. Для удобства я переведу свой рост в дюймы. 1 дюйм = 2,54 см. Значит, мой рост равен $158 \div 2{,}54 = 62{,}2$ дюйма. Теперь разделим мой рост на 12: $62{,}2 \div 12 = 5{,}18$ дюймов. Таким был бы мой рост, если бы я была лилипутом.

Ответ: а) верно; б) 5,18 дюймов.

2. «Вся моя служба ни за грош пропала. … Ну, не глуп ли я? Служил у царя десять лет, каждый день по три фунта хлеба получал» [Русские народные сказки для детей, 2014]. а) Сколько килограмм хлеба солдат получил от царя в течение всей службы, если в те времена не знали о високосных годах? б) Солдат мог бы оставлять себе 30% от массы хлеба, полученного от царя, а остальную часть продавать, чтобы заработать. Сколько денег солдат получал бы каждый год с продажи хлеба, если 1 фунт хлеба в то время стоил 3 копейки.

Решение:

а) Чтобы перевести старинную русскую меру массы в современную, обучающимся понадобятся удобные для них источники информации. 1 фунт = 0,45359237 кг ≈ 0,454 кг. Значит, в день солдат получал от царя 3 * 0,454 = 1,362 кг.

В году 365 дней. Следовательно, в год солдат получал от царя 1,362 * 365 = 497,13 кг хлеба.

Солдат служил у царя 10 лет. Значит, за всю свою служку он получил 497,13 * 10 = 4971,3 кг хлеба.

б) Из условия задачи мы знаем, что солдат каждый день по три фунта хлеба получал от царя. Значит, в год солдат получал 365 * 3 = 1095 фунтов хлеба.

Найдём, сколько фунтов хлеба солдат будет продавать в год, если будет оставлять себе только 30% процентов от массы хлеба.

100% - 30% = 70%

$$100\% - 1095$$
$$70\% - x$$

$$x = \frac{1095*70}{100}$$

$$x = \frac{76650}{100}$$

$$x = 766,5$$

766,5 фунтов – хлеба будет продавать солдат в год

Теперь найдём, сколько солдат выручит с продажи этой массы хлеба:

766,5 * 3 = 2299,5 (коп.) – выручит за год солдат с продажи хлеба

Ответ: а) 4971,3 кг; б) 2299,5 копеек.

3. Длина прямоугольника на 3 см больше его ширины. Если длину увеличить на 2 см и ширину уменьшить на 3 см, то площадь прямоугольника изменится на 20 см^2. Найдите изначальные длину и ширину прямоугольника.

Решение:

Задача решается с помощью уравнения. За x возьмём меньшую сторону – ширину, тогда длина равна $x + 3$. Если длину увеличили на 2 см, то есть $x + 3 + 2 = x + 5$, ширину уменьшили на 3 см, т.е. $x - 3$. Так как в условии задачи сказано, что площадь изменится, а не уменьшится или увеличится на 20 см^2, то необходимо рассмотреть оба этих варианта.

а) площадь прямоугольника увеличится на 20 см^2

$$(x + 5) * (x - 3) - x * (x + 3) = 20$$

$$x^2 - 3x + 5x - 15 - x^2 - 3x = 20$$

$$5x - 6x = 20 - 15$$

$$-x = 5$$

$$x = -5$$

-5 (см) – изначальная ширина прямоугольника

В данном случае ширина получается отрицательной. Такого быть не может.

Ответ: нет решения.

б) площадь прямоугольника уменьшится на 20 $см^2$

$x*(x+3)-(x+5)*(x-3)=20$

$x^2+3x-x^2+3x-5x+15=20$

$6x-5x=20-15$

$x=5$

5 (см) – изначальная ширина прямоугольника

5+3=8 (см) – изначальная длина прямоугольника

Ответ: 8 см и 5 см.

Из полученных решений мы делаем вывод, что площадь прямоугольника именно уменьшится на 20 $см^2$, и верным ответом является ответ, полученный нами во втором случае. Также можно попросить обучающихся подобрать такие значения, на которые изменились длина и ширина прямоугольника, чтобы его площадь увеличилась на 20 $см^2$.

4. Отец Вовочке рассказал, как он с друзьями поехал из Владивостока в Москву: «…Из Владивостока мы приехали в Хабаровск на машине, там провели 4 часа, сели на поезд и доехали до Якутска, здесь мы провели 3 дня. Оттуда мы полетели на самолёте в Иркутск, чтобы посмотреть на Байкал. В Иркутске мы пробыли неделю, а потом взяли машину в аренду и отправились в Красноярск. Две недели мы путешествовали по красноярскому краю. А потом из Красноярка на самолете улетели в Санкт-Петербург. Там мы пробыли сутки и поездом уехали в Москву. В Москве мы прожили месяц, разъезжая по разным городам вблизи этого города. Домой мы вернулись на самолете...» Через сколько дней отец Вовочки вернулся обратно домой?

Решение:

Обучающимся необходимо найти в тексте всю информацию о путешествии отца Вовочки и верно посчитать, через сколько дней он вернётся домой. Для удобства можно составить следующую таблицу. Умение представлять текст в виде схем также является одним из важный познавательных УУД.

Время, необходимое для передвижения между различными городами, обучающиеся могут найти в удобных для них источниках информации, пример, в интернет-источниках. Необходимо отметить, что обучающиеся могут брать различные по длине маршруты между одними и теми же городами, различные по времени рейсы самолётов и поездов. В таком случае их ответы будут отличаться друг от друга. И составленная мной таблица не является точным верным ответом, а является одним из возможных вариантов ответа.

Передвижения	Время в пути / в нас. пункте
Из Владивостока в Хабаровск на машине	10 ч. 46 м.
В Хабаровске	4 ч.
Из Хабаровска до Якутска на поезде	2 д. 11 ч.
В Якутске	3 д.
Из Якутска в Иркутск на самолёте	2 ч. 50 м.
В Иркутске	7 д.
Из Иркутска в Красноярск на машине	15 ч.
В Красноярске	14 д.
Из Красноярска в Санкт-Петербург на самолёте	5 ч.
В Санкт-Петербурге	1 д.
Из Санкт-Петербурга в Москву на поезде	8 ч.
В Москве	30 д.
Из Москвы во Владивосток на самолёте	9 ч.

После того, как обучающиеся заполнят таблицу, им необходимо посчитать время, затраченное отцом Вовочки на всё путешествие.

Сначала сложим отдельно минуты:

50 + 46 = 96 (м) = 1 (ч) 36 (м)

Теперь сложим отдельно все часы. Час, полученный в предыдущем действии, тоже прибавляем, и у нас остаются с прошлого действия только минуты.

10 + 4 + 11 + 2 + 15 + 5 + 8 + 9 + 1 = 65 (ч) = 2 (д) 17 (ч)

Теперь сложим отдельно все дни. Два дня, полученные в предыдущем действии, тоже прибавляем, и у нас остаются с прошлого действия только часы.

2 + 3 + 7 + 14 + 1 + 30 + 2 = 59 (д)

Таким образом, всё путешествие отца Вовочки заняло 59 дней 17 часов и 36 минут.

Поскольку вопрос в задаче звучит следующим образом: «Через сколько дней отец Вовочки вернулся обратно домой?», то 59 дней 17 часов и 36 минут мы можем округлить до дней следующим образом:

36 минут это больше половины часа, поэтому к 17 часам мы прибавляем ещё один и получаем 18 часов, а так как 18 часов от 24 часов в сутках так же составляют больше половины, то 59 дней мы округляем до 60.

Ответ: 60 дней.

5. В ателье заказали сшить одинаковые платья для хореографического коллектива. Во второй день сшили на 10% больше, чем в первый день, а в третий на 2 платья больше, чем во второй. Сколько платьев сшили в первый день?

Решение:

В задаче не сказано, сколько всего платьев заказали сшить для хореографического коллектива, поэтому обучающимся необходимо самим выбрать это число. Пусть всего платьев будет a штук.

Данная задача решается с помощью уравнения. За неизвестное x мы возьмём количество платьев, сшитых в первый день. Тогда во второй день сшили $x + 10\% * x = x + 0{,}1x = 1{,}1x$ платьев, а в третий день – $1{,}1x + 2$ платьев.

Составим уравнение:

$x + 1{,}1x + 1{,}1x + 2 = a$

$3{,}2x = a - 2$

$x = \frac{a-2}{3{,}2}$

1) $a - 2 \neq 0$

$a \neq 2$ – общее количество сшитых платьев не может быть равным нулю хотя бы потому, что по условию задачи в третий день сшили на 2 платья больше, чем во второй, а значит, в общее количество платьев уже входят 2 платья.

2) $a - 2 \nless 0$

$a \nless 2$ – общее количество платьев не может быть отрицательным числом.

3) $a > 2$

Таким образом, общее количество платьев должно быть больше двух. Обучающиеся могут выбрать любое значение $a > 2$ при дальнейшем решении, но также они могут подобрать такое число $a > 2$, чтобы искомое значение x было целым числом. Например, пусть $a = 34$, тогда:

$x = \frac{34-2}{3,2}$

$x = \frac{32}{3,2}$

$x = 10$

Ответ: 10 платьев.

6. «Самцы жирафа достигают высоты до 5,5 – 6,1 м (около 1/3 длины составляет шея) и весят до 900—1200 кг. Самки, как правило, немного меньше и легче.

Шея у жирафов необычайно длинная, и это несмотря на то, что у них, как и почти у всех других млекопитающих, лишь семь шейных позвонков. Высокий рост увеличивает нагрузку на систему кровообращения, прежде всего в отношении кровоснабжения головного мозга. Поэтому сердце у жирафов особенно сильное. Оно пропускает 60 л крови в минуту, весит 12 кг и создаёт давление, которое в три раза выше, чем у человека.

Жирафы способны быстро бегать и при необходимости пускаются в галоп, достигая скорости 55 км/ч. Также жирафы умеют прыгать, преодолевая барьеры высотой 1,85 м. Среди всех млекопитающих у жирафов одна из наименьших потребностей во сне — от 10 минут до 2 часов в сутки; в среднем жирафы спят 1,9 часа в день».

Перед вами представлен текст о жирафах. Составьте по тексту три математических вопроса и ответьте на них.

Решение:

Обучающиеся составляют различные математические вопросы по тексту. Примеры таких вопросов:

Сколько метров составляет длина шеи жирафа?

Какую часть от веса жирафа составляет вес его сердца?

Во сколько раз средний сон человека длиннее, чем средний сон жирафа?

Данная задача развивает умения математического чтения, видения закономерностей и т.д. Используя эту задачу, на уроке можно провести небольшую игру, когда обучающиеся будут задавать друг другу математические вопросы и отвечать на них.

7. «…из краю в край полтора аршина, а поперек – аршин, а мерить вверх, как ведетца, пол аршина» [Липатов, 2017] – какой объём у «пузатой» бочки?

Решение:

Для решения данной задачи обучающимся необходимо знать формулу нахождения объёма «пузатой бочки». Они могут найти её в удобных для них источниках информации, например в интернет-источниках.

Для нахождения объёма такой бочки используются два диаметра (нижней (верхней) части бочки и её выпуклой части). Формула объёма «пузатой» бочки: $V = 3{,}2 * r * R * H$, где r обозначает радиус нижней (верхней) части бочки, R – радиус самой выпуклой части бочки и H – высоту бочки.

По условию задачи не ясно, где говорится о какой конкретной величине. Но обучающиеся могут сделать вывод, порассуждав логически о том, какая из величин должна быть самой большой, а какая – самой маленькой. «Из краю в край полтора аршина» – высота, «поперек – аршин» –

радиус самой выпуклой части, «вверх поларшина» – радиус верхней части бочки.

Помимо этого обучающимся будет необходимо перевести старорусскую единицу измерения длины «аршин» в современный «метр». Сделать это они также смогут с помощью удобных им источников информации.

1 аршин = 0,7112 м – по задаче радиус самой выпуклой части R. Тогда 1,5 аршина = 1,0668 м – высота H; 0,5 аршина = 0,3556 м – радиус верхней части бочки r.

Полученные значения подставляем в формулу и считаем:

$$V = 3{,}2 * r * R * H = 3{,}2 * 0{,}3556 * 0{,}7112 * 1{,}0668 =$$
$$= 1{,}13792 * 0{,}7112 * 1{,}0668 = 0{,}809288704 * 1{,}0668 =$$
$$= 0{,}8633491894272 \approx 0{,}86 \text{ м}^3$$

Ответ: $0{,}86$ м^3.

8. Пришёл Иван Царевич к Морскому царю. И говорит ему царь: «Что так долго не бывал? За вину твою вот тебе служба: есть у меня пустошь на тридцать верст и в длину и поперек – одни рвы, буераки да каменье острое! Чтоб к завтрему было там как ладонь гладко, и была бы рожь посеяна…» [Русские народные сказки для детей, 2014]. а) Помогите Ивану Царевичу найти площадь пустоши в км^2; б) Посчитайте, сколько ростков пшеницы понадобится Ивану Царевичу, если на 1 га земли приходится 5 кг ростков пшеницы.

Решение:

а) Из условия задачи мы видим, что и ширина, и длина пустоши равны 30 верстам. Переведём это значение в метры. Для того чтобы узнать соотношения мер длины, обучающимся необходимо воспользоваться удобными для них источниками информации.

1 верста = 1066,8 м. Следовательно, 30 верст = 32004 м.

Теперь найдем площадь пустоши:

$S = 32004 * 32004 = 1024256016 \text{ м}^2 = 1024{,}256016 \text{ км}^2$

б) Из условия задачи на 1 га земли приходится 5 кг ростков пшеницы. Значит, необходимо перевести площадь пустоши в гектары. Для этого обучающимся вновь понадобятся удобные для них источники информации. Находим: 1 га = 0,01 км^2. Исходя из этого, получаем:

$1024{,}256016 \text{ км}^2 = 102425{,}6016 \text{ га}$

Теперь найдём искомый вес ростков пшеницы:

$102425{,}6016 \ * 5 = 512128{,}008$ (кг)

Ответ: а) $1024{,}256016 \text{ км}^2$; б) $512128{,}008$ кг.

9. «…Старший Симеон, недолго мешкая, сковал железный столб в двадцать сажон вышиною. … Симеон второй, недолго думая, поднял и упер столб в землю» [Русские народные сказки для детей, 2014]. а) Мог ли Симеон второй в действительности самостоятельно поставить такой столб? б) Какую часть от высоты столба составляет рост второго Симеона, если второй Симеон на 50 см выше старшего Симеона, чей рост равен 2 метрам? Ответ округлить до сотых.

Решение:

а) Чтобы перевести старинную русскую меру длины в современную, обучающимся понадобятся удобные для них источники информации. 1 сажень = 2,1336 метра. Значит, высота железного столба составляла $2{,}1336 * 20 = 42{,}672$ метра. Обычный человек не может самостоятельно поднять и поставить такой большой железный столб.

б) Сначала необходимо перевести см в м, чтобы все величины были выражены в одинаковых единицах измерения:

50 см = 0,5 м.

Из условия задачи мы знаем рост старшего Симеона, он равен 2 м. Найдём рост второго Симеона.

2 + 0,5 = 2,5 (м) – рост второго Симеона

Теперь найдём, какую часть от высоты столба составляет рост второго Симеона.

$1 - 42{,}672$
$x - 2{,}5$

$x = \frac{1*2{,}5}{42{,}672}$

$x = \frac{2{,}5}{42{,}672}$

$x \approx 0{,}058586$

Округлим до сотых и получим, что рост второго Симеона от высоты железного столба составляет 0,06 м.

Ответ: а) нет, не мог; б) 0,06 м.

Задачи на развитие логических УУД – построение логической цепи рассуждений, доказательство:

1. Войдёт ли все население планеты Земля в куб с длиной ребра 2 километра?

Решение:

Для решения данной задачи обучающимся необходимо найти из интернет-источников информацию о том, сколько составляет население планеты на момент решения задачи. Например, согласно одному из интернет-источников, в мае 2019 года население Земли 7,7 млрд человек, т.е. $7{,}7*10^9$ человек.

Найдём объём куба и выразим его в метрах. Чтобы найти объём куба, обучающимся понадобится следующая формула $V = a^3$, где a – длина ребра куба. Таким образом, $V = 2^3 = 8$ км$^3 = 8 * 10^9$ м^3.

$\frac{8*10^9}{7{,}7*10^9} \approx 1{,}04$ м^3 – приходится на одного человека

Чтобы обучающийся дал верный ответ, ему необходимо рассуждать логически, поместится ли человек в полученное пространство в реальных условиях. В нашем случае, на одного человека в кубе с длиной ребра 2 км приходится куб с длиной ребра 1,04 м. Для проверки, поместится ли человек в куб объёмом $1{,}04$ м^3, возьмём высокого человека ростом 2 метра. Так как если такой человек поместится в куб объёмом $1{,}04$ м^3, то и человек ниже ростом тем более. Для того чтобы высокий человек поместился в полученный нами куб, ему необходимо будет наклониться или присесть. Но всё-таки он поместится в куб объёмом 1,04 $м^3$, а, значит, человек с ростом ниже тоже поместится в такой куб. Отсюда мы можем сделать вывод, что население Земли войдёт в куб с длиной ребра 2 км.

Ответ: население Земли войдёт в куб с длиной ребра 2 км.

2. Вы владелец крупного магазина бытовой техники. Но в связи с карантином ваши продажи упали, и вы решили сделать распродажу. В первый раз вы понизили цены на 30%. Во второй раз вы решили понизить цены на такое количество процентов, чтобы цена на технику составляла 63% от первоначальной цены. Определите, сколько процентов будет составлять скидка во второй раз и рассчитайте стоимость самого дорогого телевизора в вашем магазине после второго понижения цен.

Решение:

Будем считать, что 1% товара стоил одну условную единицу (у.е.), тогда после первого понижения, 70% товара стоят 70 у.е., а 63% товара будут стоить 63 у.е.

Необходимо найти, на сколько процентов нужно максимально понизить цену в 70 у.е., чтобы она составляла 63 у.е. Найдем, сколько процентов будет составлять товар после его понижения стоимости до 63 у.е. Теперь, за 100% примем цену 70 у.е.

(63 : 70) * 100% = 90% – составляет цена 63 у.е. от 70 у.е.

100% - 90% = 10%

Следовательно, на 10% можно понизить цену товара во второй раз.

Пусть a рублей стоит самый дорогой телевизор, тогда после двух понижений его цена станет равной $0{,}63a$ рублей.

Ответ: 10%; $0{,}63a$ рублей.

3. Известно, что у Васи есть старинные Платиновые монеты Российской империи достоинством в 6 и 12 рублей по две монеты каждого достоинства. Среди четырёх "платиновых" монет есть одна поддельная, которая весом легче настоящей. Как можно определить бракованную монету

с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь? Приведите минимум два способа решения данной задачи при условии, что первым взвешиваем мы не находим бракованную монету.

Решение:

Для выполнения данного задания обучающимся необходимо с помощью взвешиваний описать, как определить поддельную монету.

Способ решения 1:

1) На разные чаши весов необходимо положить по одной монете достоинством в 6 рублей. Если какая-то из этих монет легче, то она является поддельной. Если вес монет равен, то они настоящие.

2) Монеты достоинством в 12 рублей можно сравнить между собой аналогично монетам достоинством в 6 рублей. Монеты достоинством в 12 рублей кладут на разные чаши весов. Если какая-то из этих монет легче, то она является поддельной. Если вес монет равен, то они настоящие.

Способ решения 2:

1) Сначала сравнивают между собой вес монет достоинством в 12 рублей. По одной монете кладут на разные чаши весов. Если какая-то из этих монет легче, то она является поддельной. Если вес монет равен, то они настоящие.

2) Монету достоинством в 12 рублей кладут на одну чашу весов, а на другую кладут две монеты достоинством в 6 рублей. Если чаша с монетами достоинством в 6 рублей легче, то какая-то из этих двух монет является поддельной, так как вес одной настоящей моменты достоинством в 12 рублей меньше, чем вес двух настоящих монет достоинством в 6 рублей.

3) Вес монет достоинством в 6 рублей сравнивают между собой. И монета легче является поддельной.

Данная задача не только развивает логическое мышление, но и творчество обучающихся. Заинтересованные обучающиеся могут придумать свои различные способы решения данной задачи и поделиться ими с остальными учениками.

4. Составьте выражение из 3 одночленов, используя при этом степень при x и y не выше третьей. Известно, что x и y целые числа и $x^2 + y^2 = 8$. Найдите значение составленного выражения.

Решение:

Составим выражение из трёх одночленов согласно условию задачи.

$3x^3y + 5x^2y^2 - 6xy$

Известно, что x и y целые числа и $x^2 + y^2 = 8$. Найдём отсюда значения x и y.

Мы получаем, что возможны несколько вариантов значений x и y:

1) $x = 2, y = 2$
2) $x = 2, y = -2$
3) $x = -2, y = 2$
4) $x = -2, y = -2$

В связи с этим составленное выражение будет иметь четыре возможных значения:

1) $3 * 2^3 * 2 + 5 * 2^2 * 2^2 - 6 * 2 * 2 = 3 * 8 * 2 + 5 * 4 * 4 - 24 = 48 + 80 - 24 = 104$
2) $3 * 2^3 * (-2) + 5 * 2^2 * (-2)^2 - 6 * 2 * (-2) = -6 * 8 + 5 * 4 * 4 + 24 = -48 + 80 + 24 = 56$
3) $3 * (-2)^3 * 2 + 5 * (-2)^2 * 2^2 - 6 * (-2) * 2 = 6 * (-8) + 5 * 4 * 4 + 24 = -48 + 80 + 24 = 56$
4) $3 * (-2)^3 * (-2) + 5 * (-2)^2 * (-2)^2 - 6 * (-2) * (-2) = -6 * (-8) + 5 * 4 * 4 - 6 * 4 = 48 + 80 - 24 = 104$

Ответ: 104 при $x = 2, y = 2$; 56 при $x = 2, y = -2$; 56 при $x = -2$, $y = 2$; 104 при $x = -2, y = -2$.

При решении задачи обучающиеся должны увидеть все возможные комбинации значений переменных x и y. И так же они должны найти все возможные значения выражения в зависимости от найденных значений переменных x и y.

Учитель может изменять количество одночленов, тем самым регулируя сложность данного задания.

5. Александр занял Вовочке 1000 рублей. Вовочка принес долг монетами. Он уверил Александра, что в мешочке 75 десятирублевых монет 2011 года и 50 пятирублевых монет и, что здесь ровно 1000. Александр взвесил мешочек и весы показали: 651,15 г. Обманул ли Вовочка Александра?

Решение

Чтобы найти вес монет, обучающимся необходимо воспользоваться удобными для них источниками информации, например, интернет-источниками.

Вес одной десятирублёвой монеты 2011 года выпуска составляет 5,65 г., а весь одной пятирублёвой монеты составляет 6,50 г.

Теперь мы можем найти вес монет:

$75 * 5{,}65 = 423{,}75$ (г) – вес 10-рублёвых монет в мешочке

$50 * 6{,}50 = 325$ (г) – вес 5-рублёвых монет в мешочке

$423{,}75 + 325 = 748{,}75$ (г) – общий вес монет в мешочке

Полученный нами вес больше, чем вес мешочка, который принёс Александру Вовочка. Таким образом, мы получаем, что Вовочка обманул Александра.

Ответ: обманул.

6. Михаил решил испытать удачу и купить лотерейный билет. В магазине ему предоставили на выбор множество билетов. У всех лотерейных билетов номер состоит из 6 цифр. Первая цифра номера у всех билетов одинаковая – она равна восьмой цифре после запятой числа π (Пи). Михаилу известно, что выигрывают билеты со следующими номерами: первое число в номере после первой цифры – простое число, число за ним чётное и последнее третье число делится на 4. С каким номером Михаил должен купить билет, чтобы выиграть?

Решение:

Представим номер следующим образом: ******, где * – цифра номера.

Из условия задачи мы знаем, что первая цифра номера равна восьмой цифре после запятой числа π (Пи). Число π обучающиеся могут найти в удобных для них источниках информации:

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

Восьмая цифра после запятой – 5. Значит, номер билета начинается с пятёрки: 5*****.

Нам известно, что следующее число в номере после 5 простое число. Возьмём число 17: 517***.

Следующее число в номере чётное. Пусть это будет 8: 5178**.

Последнее число в номере кратно 4. Обучающимся необходимо вспомнить признак делимости на 4: число делится на 4, если две его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4.

Возьмём число 68. Таким образом, мы получили следующий номер лотерейного билета: 517868.

Ответ: 517868.

Возможных ответов на данную задачу большое множество. Приведём другие примеры верных ответов:

1) 578316, где 5 – первая цифра номера; 7 – первое число после первой цифры номера, оно является простым; 8 – второе число, оно является чётным; 316 – последнее, третье число, краткое четырём.

2) 527728, где 5 – первая цифра номера; 27 – первое число после первой цифры номера, оно является простым; 72 – второе число, оно является чётным; 8 – последнее, третье число, краткое четырём.

7. Лиза и Саша решили сыграть в настольную игру. Суть игры в том, чтобы первым пройти путь своей фигуркой от первой клеточки поля до последней тридцатой клеточки. Каждая пятая клетка поля переносит на 1 клетку вперёд, а каждая седьмая на 3 клетки назад. За сколько ходов Саша пройдёт игру, если на игровом кубике ему всё время выпадали только цифры 2, 3, и 4?

Решение:

Обучающиеся должны сами составить последовательность ходов Саши от первой клеточки поля до последней тридцатой. Поэтому верных решений данной задачи может быть несколько, а приведённое мною решение – лишь один из возможных вариантов.

Рассмотрим последовательность ходов, если бы Саше на игровом кубике при броске последовательно выпадали цифры 2, 3 и 4:

1) На игровом кубике выпала 2: 2 клеточка.
2) На игровом кубике выпала 3: 2 + 3 = 5, а так как каждая пятая клетка переносит на 1 клетку вперёд, то Сашина фигурка переходит на 6 клетку.
3) На игровом кубике выпала 4: 6 + 4 = 10 ⇒ 10 + 1 = 11 клеточка.
4) На игровом кубике выпала 2: 11 + 2 = 13 клеточка.
5) На игровом кубике выпала 3: 13 + 3 = 16 клеточка.
6) На игровом кубике выпала 4: 16 + 4 = 20 ⇒ 20 + 1 = 21 клеточка, а так как каждая седьмая клетка переносит на 3 клетки назад, то Сашина фигурка переходит на 18 клетку.
7) На игровом кубике выпала 2: 18 + 2 = 20 ⇒ 20 + 1 = 21 ⇒ 21 – 3 = 18 клеточка.
8) На игровом кубике выпала 3: 18 + 3 = 21 ⇒ 21 – 3 = 18 клеточка.
9) На игровом кубике выпала 4: 18 + 4 = 22 клеточка.
10) На игровом кубике выпала 2: 22 + 2 = 24 клеточка.
11) На игровом кубике выпала 3: 24 + 3 = 27 клеточка.
12) На игровом кубике выпала 4: 27 + 4 = 31 > 30 ⇒ Саша закончил игру и его фигурка стоит на последней клеточке игрового поля.

Ответ: 12 ходов.

Обучающимся будет легче и интереснее решать данную задачу, если для решения схематично изобразить игровое поле с клетками и отмечать на нём все ходы Саши. Умение представлять текст в виде схем также является одним из познавательных УУД обучающихся 7 класса.

8. Дано уравнение $2x + 3y = a$. Подберите такое целое число a, чтобы оно являлось чётным, положительным числом, которое кратно трём. Докажите, что существуют такие целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению при выбранном вами значении числа a.

Решение:

Сначала выберем значение числа a, которое будет отвечать условию задачи:

$a \neq 0,\ a > 0,\ a \vdots 3,\ a \vdots 2$ – так как по условию a – четное, положительное и кратное трём число.

Возьмём число a равное 36. Получаем следующее уравнение:

$$2x + 3y = 36$$

Выразим из полученного уравнения переменную x через переменную y и найдём какое-нибудь решение для этого уравнения.

$2x = 36 - 3y$

$x = \frac{36-3y}{2}$

Придадим переменной y произвольное значение и вычислим по полученной формуле $x = \frac{36-3y}{2}$ соответствующее значение переменной x. Таким образом, мы можем найти бесконечное множество решений уравнения $2x + 3y = 36$, но нам будет достаточно одного решения для доказательства.

Например, возьмём такое наименьшее значение y, при котором x будет целым числом. Пусть $y = 2$.

$x = \frac{36-3*2}{2}$

$x = \frac{36-6}{2}$

$x = \frac{30}{2}$

$x = 15$

Получаем, что пара чисел (15; 2) является решением уравнения $2x + 3y = 36$.

Таким образом, мы доказали, что существуют такие числа x и y, что при a = 36 уравнение $2x + 3y = a$ решаемо. ЧТД.

9. Ваня поехал на лето в спортивный лагерь. При заселении он выяснил, что в четырёх домиках из пяти в лагере живут мальчики. Он мог заселиться в любой из домиков, так как в каждом мальчишечьем домике было 5% свободных мест, при этом любой домик рассчитан на 25 человек. Выясните, сколько всего детей проживало в лагере до заселения Вани.

Решение:

Пусть x – количество мальчиков в одном домике, а y – количество девочек, и пусть всего в лагере a детей. Составим следующее уравнение:

$$4x + y = a$$

Чтобы выяснить возможные по условию задачи значения числа a, сначала необходимо найти количество мальчиков в лагере.

Все домики рассчитаны на 25 человек и в каждом мальчишечьем домике 5% мест свободно.

100% - 5% = 95%

$25 - 100\%$
$x - 95\%$

$x = \frac{25*95}{100}$

$x = \frac{2375}{100}$

$x = 23{,}75$

Округляем полученное значение до целых и получаем, что в каждом домике живут 24 мальчика.

24 * 4 = 96 (мал.) – живёт в лагере

Точное количество девочек, проживающих в лагере, нам неизвестно. Но мы знаем, что в любом домике может жить максимум 25 человек. Значит, количество девочек в лагере может быть от 1 до 25: $1 \leq y \leq 25$.

Таким образом, мы получаем следующее общее количество детей в спортивном лагере:

$$96 + 1 \leq a \leq 96 + 25$$

$$97 \leq a \leq 121$$

В данный момент в лагере живёт от 97 до 121 ребёнка, включая мальчиков и девочек.

Ответ: [97; 121].

Задачи на развитие действий постановки и решения проблем:

1. Два пешехода одновременно отправляются из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 4 км/ч больше скорости второго. Скорость второго 2 км/ч. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 2000 м?

Решение:

В данной задаче перед обучающимися стоит следующая проблема – найти время движения переходов, если в задаче не указаны их направления движения.

Обучающиеся должны учесть все возможные направления движения пешеходов:

а) Пешеходы движутся в разные стороны;

б) Пешеходы движутся в одну сторону.

В начале обучающиеся должны перевести расстояние в километры, т.е. 2000 м = 2 км, либо перевести скорость из км/ч в м/с. Я использовала первый вариант, так как он занимает меньше времени.

В связи с тем, что в задаче не указаны направления движения пешеходов, задача имеет 2 решения и 2 возможных ответа:

а) $2 + 4 = 6$ км/ч – скорость первого пешехода

$2 + 6 = 8$ км/ч – скорость удаления

$\frac{2}{8} = 0{,}25$ ч – через такое время расстояние между пешеходами будет равным 2000 м

б) $2 + 4 = 6$ км/ч – скорость первого пешехода

$6 - 2 = 4$ км/ч – скорость удаления

$\frac{2}{4} = 0,5$ ч – через такое время расстояние между пешеходами будет равным 2000 м

Ответ: а) 0,25 ч; б) 0,5 ч.

Так же в данной задаче можно попросить обучающихся объяснить, почему вариантов решения только два, а не три или четыре. Это связано с тем, что пешеходы начали движение одновременно, и поэтому не учитывается, кто за кем идёт и в какую сторону.

2. По магистрали едут две машины. Скорость первой машины 60 км/ч, а скорость второй 40 км/ч. Какое расстояние будет между машинами через 3 часа, если известно, что расстояние сейчас между машинами составляет 1000 км?

Решение:

Данная задача аналогична предыдущей. Обучающимся необходимо найти расстояние между машинами, если в задаче не указаны их направления движения.

Обучающиеся должны учесть все возможные направления движения машин:

а) Машины движутся навстречу друг другу;

б) Машины движутся в разные стороны, удаляясь друг от друга;

в) Машины движутся в одну сторону, вторая машина едет за первой;

г) Машины движутся в одну сторону, первая машина едет за второй.

В связи с тем, что в задаче не указаны направления движения машин, задача имеет 4 решения и 4 возможных ответа:

а) $60 + 40 = 100$ км/ч – скорость сближения

$100 * 3 = 300$ км

$1000 - 300 = 700$ км – расстояние между машинами через 3 часа

б) $60 + 40 = 100$ км/ч – скорость удаления

$100 * 3 = 300$ км

$1000 + 300 = 1300$ км – расстояние между машинами через 3 часа в) $60 - 40 = 20$ км/ч – скорость удаления

$20 * 3 = 60$ км

$1000 + 60 = 1060$ км – расстояние между машинами через 3 часа

г) $60 - 40 = 20$ км/ч – скорость сближения

$20 * 3 = 60$ км

$1000 - 60 = 940$ км – расстояние между машинами через 3 часа

Ответ: а) 700 км; б) 1300 км; в) 1060 км; г) 940 км.

Также для обучающихся будет полезно, если они проиллюстрируют каждый случай с помощью схемы. Так они отработают навык обработки информации, а именно навык представления текста в виде схем.

3. Петя приехал в деревню к бабушке и дедушке. Дедушка решил сделать красивую беседку с резными стенами в геометрическом стиле. Он попросил Петю сделать трафареты для равнобедренного и прямоугольного треугольников, но оказалось, что линейки и циркуля у них дома нет. Петя нашел в кладовке нитку, карандаш, мел, пачку канцелярских кнопок, ножницы, канцелярский нож и коробку. Подскажите Пете, как без циркуля и линейки ему помочь дедушке?

Решение:

В задаче перед Петей стоит проблема: построить геометрические фигуры без помощи циркуля и линейки, имея при этом нитку, карандаш, мел, пачку канцелярских кнопок, ножницы, канцелярский нож и коробку. Обучающимся необходимо решить данную проблему.

Эта задача на построение. Обучающиеся могут предложить различные варианты выполнения данного задания. Примеры решений:

1) С помощью нитки отложить на сторонах коробки стороны треугольников, начертить стороны треугольников по нитке карандашом и вырезать по начерченным линиям необходимые треугольники.

2) С помощью нитки отложить на сторонах коробки стороны треугольников, углы полученных треугольников закрепить канцелярскими кнопками и вырезать ножницами по нитке необходимые треугольники.

3) Прямоугольный треугольник можно получить, вырезав его из угла коробки. В таком случае будет необходимо только построить гипотенузу треугольника с помощью нитки и отрезать угол коробки по построенной гипотенузе.

И подобных решений может быть много. А так как данные по задаче инструменты для построения общедоступны, такую задачу можно не просто разобрать теоретически, а сделать практическим заданием на уроке.

4. Выберите три моста из списка самых длинных мостов мира и проверьте, получится ли составить из них треугольник.

Решение:

Для выполнения этой задачи обучающимся понадобится с помощью удобных для них источников информации найти список самых длинных мостов мира. Для меня удобен интернет-источник, откуда я и взяла информацию о самых длинных мостах.

Обучающиеся могут выбрать любые три моста из списка. Я выбрала следующие три моста: «Тяньцзиньский виадук» длиной в 113,7 км, «Чандэйский виадук» длиной в 105,81 км и «Пекинский виадук» длиной в 48,153 км.

Для того, чтобы проверить, можно ли составить из трёх мостов треугольник, обучающиеся должны знать следующее свойство треугольников: сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей стороны. Таким образом, обучающиеся должны сложить длины двух мостов и сравнить получившееся число с длиною третьего моста.

$$113{,}7 + 105{,}81 = 219{,}51 > 48{,}153$$

$$113{,}7 + 48{,}153 = 161{,}853 > 105{,}81$$

$$105{,}81 + 48{,}153 = 153{,}963 > 113{,}7$$

Таким образом, мы получили, что из данных трёх мостов можно составить треугольник.

Ответ: из выбранных мостов можно составить треугольник.

5. Вы приехали на выходные в Санкт-Петербург. На два дня ваш бюджет на различные расходы составляет 5 тысяч. В первый день вы решили, прокатиться на метро и посмотреть достопримечательности в разных частях города. Составьте маршрут, чтобы побывать на следующих станциях метро: «Ленинский проспект», «Парк победы», «Ломоносовская», «Невский проспект», «Старая деревня», «Площадь Ленина», если вы начинаете свой путь со станции «Ладожская» (рис. 2). Найдите в процентах, сколько денег от бюджета на день вы потратите на проезд на метро, если стоимость жетона на одну поездку составляет 55 рублей и на каждой пересадке вы выходили из метро погулять по городу.

Рис. 2

Решение:

Обучающимся необходимо самостоятельно построить маршрут по различным станциям метро, найти общую стоимость проезда за метро и найди, сколько составить в процентах эта стоимость от бюджета на день.

Первое, на что обучающиеся должны обратить внимания, что им дан бюджет на 2 дня, а бюджет на 1 день они должны найти:

$\frac{5000}{2} = 2500$ (руб.) – бюджет на день на различные расходы

Теперь составим маршрут:

От станции «Ладожской» доедем до станции «Площадь Александра Невского 2» (поездка 1), пересядем на станцию «Площадь Александра Невского 1» и доедем до станции «Ломоносовская» (поездка 2). От «Ломоносовской» поедем до станции «Невский проспект» (поездка 3). От «Невского проспекта» поедем до «Парка победы» (поездка 4). От «Перка победы» поедем до станции «Технологический институт» (поездка 5), пересядем на другой поезд и поедем до станции «Ленинский проспект» (поездка 6). От «Ленинского проспекта» поедет до станции «Площадь Ленина» (поездка 7). О «Площади Ленина» поедем до станции «Достоевская» (поездка 8), там пересядем на другой поезд и поедем до станции «Спасская» (поездка 9). На «Спасской» ещё раз пересядем и поедем на станцию «Старая деревня» (поездка 10).

Таким образом, мы заплатим за 10 поездок:

$55 * 10 = 550$ (руб.) – затраты на поездки на метро

Теперь найдем, сколько данная сумма будет составлять в процентах от бюджета на различные расходы на день. Для этого удобно использовать пропорцию:

$$2500 - 100\%$$
$$550 - x\%$$

$$x = \frac{550*100}{2500} = \frac{55000}{2500} = 22\%$$

Ответ: 22%.

Обучающиеся могут составлять различные варианты маршрутов, поэтому маршрут, составленный мной, не является единственно верным, а лишь одним из возможных вариантов маршрутов. Также, при желании, в задачу можно добавить другие станции метро, на которых можно было бы посмотреть достопримечательности, и найти ответ на задачу с учетом этих станций.

6. Велосипедист едет в Уяр из Красноярска со средней скоростью. Автомобиль едет из Кемерово в Красноярск со скорость 75 км/ч. Кто из них приедет быстрее?

Решение:

Для решения данной задачи обучающимся необходимо выяснить, сколько составляет средняя скорость велосипедиста, чему равно расстояние между Уяром и Красноярском, а также чему равно расстояние между Кемерово и Красноярском. Для того чтобы найти всю необходимую информацию, обучающиеся должны воспользоваться удобными для них источниками информации, например, интернет-источниками.

Средняя скорость велосипедиста в городе составляет 15 км/ч. Расстояние от Уяра до Красноярска составляет 94 км по прямой, а расстояние от Кемерово до Красноярска – 430 км по прямой. Теперь, когда мы знаем все значения, решить задачу не составит труда.

$\frac{94}{15} = 6,27$ (ч) – затратит на путь велосипедист

$\frac{430}{75} = 5{,}73$ (ч) – затратит на путь автомобиль

Отсюда получаем, что автомобиль приедет быстрее велосипедиста.

Ответ: нет.

В данной задаче можно использовать название различных населённых пунктов. Таким образом, решение задачи и её ответ будут зависеть от расстояния между выбранными населёнными пунктами.

7. Игорь собирает по инструкции велосипед. В комплекте для сборки он обнаружил одинаковые по объёму железную и алюминиевую детали. Игорю стало интересно, сколько весит каждая из этих деталей, но в инструкции нет информации об их массе. Помогите Игорю найти массы этих деталей, если по схеме сборки велосипеда видно, что масса железной детали на 12,75 г больше массы алюминиевой.

Решение:

По условию задачи обучающимся необходимо найти массы железной и алюминиевой деталей. Возьмём за x г. наименьшую массу – массу алюминиевой детали, тогда масса железной детали равна x + 12,75 г.

Данная задача является метапредметной. Для её решения обучающимся понадобятся знания из курса физики – плотность данных металлов и формула нахождения плотности. Если обучающиеся не помнят данный материал из курса физики, они могут воспользоваться удобными для них источниками информации.

$\rho_ж = 7{,}8$ г/см^3

$\rho_а = 2{,}7 \text{ г/см}^3$

$\rho = \frac{m}{V}$

Из формулы нахождения плотности выразим объём:

$V = \frac{\rho}{m}$

По условию задачи объёмы деталей равны:

$V_ж = V_а$

$\frac{\rho_ж}{m_ж} = \frac{\rho_а}{m_а}$

Составим уравнение и решим его:

$\frac{7{,}8}{x+12{,}75} = \frac{2{,}7}{x}$

$7{,}8x = 2{,}7(x + 12{,}75)$

$7{,}8x = 2{,}7x + 34{,}425$

$7{,}8x - 2{,}7x = 34{,}425$

$5{,}1x = 34{,}425$

$x = 34{,}425 \ |: 5{,}1$

$x = 6{,}75$

6,75 (г) – масса алюминиевой детали

$6{,}75 + 12{,}75 = 19{,}5$ (г) – масса железной детали

Ответ: 6,75 г; 19,5 г.

8. Вы с вашим классом собрались посетить Красноярский Драматический театр им. А.С. Пушкина. Но на спектакль не смогут пойти 7% учеников вашего класса. Выберите спектакль и посчитайте стоимость билетов (без учёта билета сопровождающего учителя), если театр предоставляет школьникам скидку на билеты 40%.

Решение:

Обучающиеся должны посчитать, сколько учеников в их классе. Для примера возьмём класс, в котором 28 человек.

Затем необходимо найти количество человек, которые пойдут в театр. По условию, 7% учеников пойти не смогут. Значит, пойдут в театр 100% - 7% = 93% учеников.

$$100\% - 28$$
$$93\% - x$$
$$x = \frac{28*93}{100}$$
$$x = \frac{2604}{100}$$
$$x = 26{,}04$$

Округляем число до целых и получаем, что в театр пойдут 26 учеников.

Теперь обучающимся необходимо найти с помощью удобных источников информации спектакли, которые идут в театре. Например, на сайте театра мы видим, что 8 мая в театре будут показывать спектакль «Матрёнин двор». Также сразу смотрим цену на билет – 600 рублей.

Теперь мы можем посчитать, сколько будут стоить билеты.

600 * 26 = 15600 (руб.)

По условию задачи театр предоставляет школьникам скидку на билеты 40%. Найдём цену билетов со скидкой.

100% - 40% = 60%

$$100\% - 15600$$
$$60\% - x$$
$$x = \frac{15600*60}{100}$$
$$x = \frac{936000}{100}$$
$$x = 9360$$

9360 (руб.) – стоимость билетов со скидкой.

Ответ: 9360 руб.

9. Вы пришли в канцелярский магазин, чтобы купить тетради и ручки. Вам необходимо купить 30 различных тетрадей в клетку и 20 в линейку. Общая цена всех тетрадей составляет a рублей. За все ручки вы заплатите b рублей. Всего за всю купленную канцелярию вы заплатите 2500 рублей.

Найдите цену одной тетради в клетку и общую цену всех ручек, если значение параметра a вы выбираете самостоятельно.

Решение:

В данной задаче перед обучающимися стоит проблема не только самостоятельно правильно подобрать значение параметра a, но и правильно составить систему уравнений и, исходя из выбранного ими значения параметра a, найти искомые значения.

Пусть x рублей – цена за одну тетрадь в клетку, а y рублей – цена за одну тетрадь в линейку. Составим уравнения:

$$\begin{cases} 30x + 20y = a \\ a + b = 2500 \end{cases}$$

Чтобы найти искомые значения обучающимся необходимо сначала выбрать значение параметра a. Рассуждая логически, мы понимаем, что оно не должно превышать 2500 рублей и должно оставлять остаток от общей суммы на покупку ручек.

Для примера выберем значение a = 2000. Обучающиеся могут взять любое другое число, исходя из логических рассуждений выше.

Найдём цену одной тетради в клетку: $30x + 20y = 2000$.

Выразим из полученного уравнения переменную x через переменную y и найдём решение для этого уравнения.

$30x = 2000 - 20y$

$x = \frac{2000-20y}{30}$

Придадим переменной y произвольное значение и вычислим по полученной формуле $x = \frac{2000-20y}{30}$ соответствующее значение переменной x. Таким образом, можно найти множество решений уравнения $30x + 20y = 2000$, но нам достаточно одного решения.

Нам необходимо взять такое у, чтобы $20y < 2000$.

Например, пусть y = 30.

$x = \frac{2000-20*30}{30}$

$x = \frac{2000-600}{30}$

$x = \frac{1400}{30}$

$x \approx 46{,}7$

46,7 (руб.) – цена за одну тетрадь в клетку

Теперь найдём цену всех ручек:

$b = 2500 - a$

$b = 2500 - 2000$

$b = 500$

500 (руб.) – общая цена всех ручек

Ответ: 46,7 рублей, 500 рублей.

2.2 Педагогический эксперимент: основные этапы и результаты

Педагогический эксперимент проходил на базе СШ №149, города Красноярска.

В эксперименте принимали участие обучающиеся 7 класса и учитель математики Власова Наталья Викторовна.

С целью определения готовности обучающихся к решению задач открытого типа по математике, на констатирующем этапе эксперимента, им был предложен контрольный срез № 1 (таблица 4), содержащий задачи открытого типа.

Таблица 4

Контрольный срез №1
Задача 1 (Вариант 1) Расстояние между Атосом и Арамисом, скачущими по одной дороге, равно 20 лье. За час Атос покрывает 4 лье, а Арамис – 5 лье. Какое расстояние будет между ними через час?
Задача 2 (Вариант 2) Расстояние между Добрыней Никитичем и Алёшей Поповичем, скачущими по одной дороге, равно 30 вёрст. За час Добрыня Никитич проезжает на своём коне расстоянии в 6 вёрст, а Алёша Попович – 10 вёрст. Какое расстояние будет между ними через час?

При проверке решений данных задач обучающимися 7 класса, мы оцениваем уровень сформированности познавательных УУД у учеников с помощью разработанной нами системы оценивания (таблица 5). Исходя из набранного обучающимися количества баллов, мы можем говорить об уровне сформированности у обучающихся познавательных УУД.

Таблица 5

Виды действий	Оценка уровня сформированности познавательных УУД у обучающихся	
Работа с текстом (Общеучебные УУД)	Обучающийся, прочитав текст, понимает, что в задаче не говорится о направлении движения мушкетёров и что поэтому задача имеет 4 возможных решения, и описывает каждое из них. – 1 б.	Обучающийся неверно воспринимает текст задачи и описывает не все возможные решения или находит неверные решения задачи. – 0 б.
Построение логической цепи рассуждений, доказательство	В решении задачи обучающийся логически обосновывает все действия. – 1 б.	В решении задачи обучающего не пояснены его действия, появляются цифры, не связанные с ходом решения

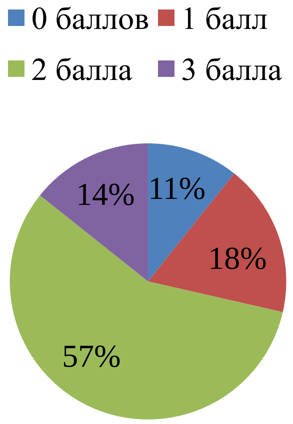
(Логические УУД)		задачи. – 0 б.
Действия постановки и решения проблем	Обучающийся верно определяет, что необходимо найти по условию задачи, использует верный способ нахождения искомого элемента задачи, получает верный ответ. – 1 б.	Обучающийся неверно определяет искомый элемент задачи и/или использует неверные способы его нахождения и/или получает неполный ответ. – 0 б.

Анализ результатов контрольного среза № 1 показал, что 86% обучающихся не справились с предложенной задачей; 14% обучающихся догадались, что в задаче не хватает данных и необходимо рассмотреть различные направления движения объектов, о которых идет речь в условии задачи, и в ответе получили четыре условных ответа. Результаты контрольного среза представлены на диаграмме (рис. 3а).

Также результаты контрольного среза № 1 показали, что 11% обучающихся получили 0 баллов; 18% обучающихся получили 1 балл; 57% обучающихся получили 2 балла; 14% обучающихся получили 3 балла. Количество набранных баллов говорит об уровне сформированности познавательных УУД у обучающихся 7 класса. Соотношения количества обучающихся, набравших то или иное количество баллов, представлено на диаграмме (рис. 3б).

Рис. 3а

Рис. 3б



По результатам полученных данных мы можем сделать следующий вывод: большая часть обучающихся не увидела, что данная задача имеет четыре возможных решения. Но при проверке уровня сформированности познавательных УУД у обучающихся мы увидели, что у них хорошо развиты умения построения логической цепи рассуждений и действия постановки и решения проблем. Благодаря тому, что ученики верно определяли искомый по условию задачи элемент и использовали верный способ его нахождения, а также логически обосновывали все действия, они получили по одному и двум баллам.

На формирующем этапе эксперимента, в процессе обучения математике в 7 классе применялись задачи открытого типа, разработанные и представленные в параграфе 2.1, а так же задачи открытого типа, представленные в учебнике, по которому происходит процесс обучения в данной школе.

Обучающиеся в процессе решения задач открытого типа разбирали их условия и выясняли, нет ли в них лишних или недостающих данных. Так же обучающиеся ставили перед собой проблемы, которые необходимо было решить, исходя из условий задач; выстраивали логические цепочки рассуждений, необходимые для решения задач; на основе своих рассуждений обучающиеся решали эти задач и проводили доказательства того, что то или иное решение задачи действительно верно.

В результате наблюдений за процессом обучения математике посредством использования задач открытого типа, мы можем отметить следующее: обучающиеся с большим интересом решают задачи открытого типа, особенно если при решении задач необходимо самостоятельно найти недостающую информацию. Так же обучающиеся стали критически подходить к анализу условия задачи и выбору способа ее решения.

На контрольном этапе эксперимента, с целью повторного определения готовности обучающихся к решению задач открытого типа по математике, им был предложен контрольный срез № 2 (таблица 6), содержащий задачи открытого типа, подобные тем, что предлагались обучающимся на констатирующем этапе эксперимента.

Таблица 6

Контрольный срез №2

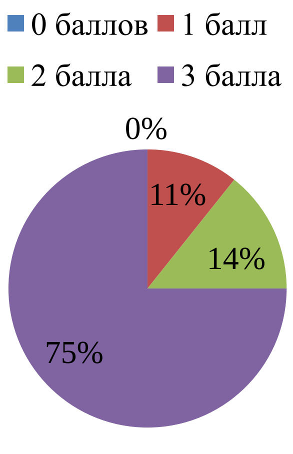
Задача 1 (Вариант 1) Машина и грузовик, расстояние между которыми составляет 800 км, едут по одной дороге со скоростями 80 км/ч и 60 км/ч соответственно. Какое расстояние будет между ними через 1 час?
Задача 2 (Вариант 2) Два велосипедиста, расстояние между которыми составляет 72 км, едут по одной дороге со скоростями 12 км/ч и 10 км/ч соответственно. Какое расстояние будет между ними через 1 час?

Анализ результатов контрольного среза № 2 показал, что 25% обучающихся не справились с предложенной задачей; 75% обучающихся догадались, что в задаче не хватает данных и необходимо рассмотреть различные направления движения объектов, о которых идет речь в условии задачи и в ответе получить четыре условных ответа. Результаты контрольного среза №2 представлены на диаграмме (рис. 4а).

Для проверки уровня сформированности познавательных УУД у обучающихся мы вновь обратимся к системе оценивания, разработанной нами и представленной в таблице 5. Результаты контрольного среза № 2 показали, что 0% обучающихся получили 0 баллов; 11% обучающихся получили 1 балл; 14% обучающихся получили 2 балла; 75% обучающихся получили 3 балла. Количество набранных баллов говорит об уровне сформированности познавательных УУД у обучающихся 7 класса. Соотношения количества обучающихся, набравших то или иное количество баллов, представлено на диаграмме (рис. 4б).

Рис. 4а

Рис. 4б



По результатам полученных данных, так как все обучающиеся смогли набрать хотя бы 1 балл, мы можем сделать вывод о том, что решение задач открытого типа на уроках математики способствует формированию познавательных УУД обучающихся.

Заключение

Математические задачи открытого типа это задачи, которые: могут иметь несколько вариантов решения или несколько условных ответов; могут иметь неполное условие, что подразумевает необходимость поиска недостающих данных. Задачи такого типа предоставляют обучающимся возможность самостоятельно находить и открывать для себя что-то новое.

Такие задачи направлены на развитие различных познавательных УУД, таких как: умение работать с текстом; умение представлять информацию в виде схем; умение ставить перед собой проблему и находить её решение; умение строить логические цепи рассуждений в ходе доказательства и др.

К сожалению, в школьном курсе математики используются в основном задачи закрытого типа. Задачи открытого типа, как правило, встречаются эпизодически. Это приводит к тому, что большинство обучающихся привыкает решать однотипные задачи по известным алгоритмам и не умеют решать задачи открытого типа. Результаты констатирующего этапа эксперимента показали, что большинство обучающихся 7 класса не смогли найти все возможные варианты решения задач контрольного среза №1.

В рамках данного исследования был разработан комплекс задач открытого типа по математике для обучающихся 7 класса, направленный на формирование основ познавательных УУД. В данный комплекс вошли 27 задач. Задачи, представленные в работе, можно использовать как на обычных уроках математики, так и на различных факультативах и дополнительных занятиях по математике.

В ходе формирующего этапа эксперимента, задачи открытого типа систематически и целенаправленно включались в систему математической подготовки обучающихся 7 класса. Итоги педагогического эксперимента подтвердили гипотезу исследования: если в процессе обучения математике систематически использовать задачи открытого типа, то это будет способствовать формированию познавательных УУД обучающихся.

Таким образом, все задачи исследования выполнены, цель работы достигнута.

Результаты проведенного исследования были представлены и опубликованы на конференции «Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 80-летию профессора Ларина Сергея Васильевича».

Библиографический список

1. Асмолов А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя / [А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарская и др.]; под ред. А.Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2010. – 159 с.
2. Безусова Т.А. Особенности развития познавательных универсальных учебных действий средствами некорректных задач // Возможности образовательной области "математика и информатика" для реализации компетентностного подхода в школе и вузе. – Соликамск, 2013. – С. 71-74.
3. Боженкова Л.И., Соколова Е.В. Критериальное оценивание достижений учащихся 7-9 классов в обучении геометрии: науч.-метод. пособие. М.: Эйдос, 2016. – 182 с.
4. Броздецкий В.С. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. URL: https://www.bvc56.ru/%D1%84%D0%B3%D0%BE%D1%81/%D1%83%D1%83%D0%B4-%D0%B2-%D0%BE%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%B9-%D1%88%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B5/ (дата обращения: 17.11.2019).
5. Вайндорф-Сысоева М.Е., Крившенко Л.П. Педагогика: Пособие для сдачи экзамена. – 2-е изд., пе-раб. и доп. – М.: Юрайт-Издат, 2005. – 239 с.
6. Гин А.А. Открытые задачи инструмент новой педагогики // Журнал руководителя управления образованием. №8 (43). 2014.
7. Глоссарий ФГОС общего образования. URL: https://mosmetod.ru/metodicheskoe-prostranstvo/srednyaya-i-starshaya-shkola/ekonomika/fgos/glossarij-fgos.html (дата обращения: 17.11.2019).

8. Дулатова З.А., Лапшина Е.С. Логические задачи как средство развития познавательных универсальных учебных действий // Сибирский педагогический журнал. – Новосибирск, 2017. – № 3. – С. 41-48.

9. Ермолаев А.С. Текстовые задачи как средство формирования познавательных универсальных учебных действий // Современные научные исследования и разработки. – Астрахань, 2017. – № 8. – С. 706-709.

10. Жигачева Н.А. Формирование познавательных универсальных учебных действий учащихся в процессе обучения решению текстовых задач // In Situ. – 2015. – № 2. – С. 15-18.

11. Ильенков Э.В. Школа должна учить мыслить. М.: 2002, с. 69-70.

12. Кейв М.А., Власова Н.В. Инновационные процессы в профильном образовании: учебное пособие Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2015. – 168 с.

13. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – М.: Просвещение, 1977. – 113 с.

14. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть II. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – М.: Просвещение, 1977. – 145 с.

15. Леонтьев А.Н. Деятельность. Сознание. Личность. – М.: Политиздат, 1975. – 304 с.

16. Липатов В. Ночной директор. I том. История, рассказанная в тиши музея / В. Липатов – «Издательские решения», 2017. – 590 с.

17. Лупанова Н.А. Задачи по формированию универсальных учебных действий на уроках математики // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – Т. 22. – С. 102-109. URL: http://e-koncept.ru/2017/670035.htm (дата обращения: 20.11.2019).

18. Мерзляк А.Г. Алгебра: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М.: Вентана-Граф, 2015. – 272 с.: ил.

19. Мишакина В.В., Аввакумова И.А. Практикоориентированные задачи как одно из средств формирования универсальных учебных действий у учащихся в процессе обучения математике // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий: межвуз. сб. науч. работ. – Екатеринбург, 2016. – С. 216-219.

20. Нестерова И.А. Формирование познавательных универсальных учебных действий. // Образовательная энциклопедия ODiplom.ru, 21.07.2017. URL: http://odiplom.ru/lab/formirovanie-poznavatelnyh-universalnyh-uchebnyh-deistvii.html (дата обращения: 17.11.2019)

21. Никольский С.М. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.: ил.

22. Ожегов С.И. Толковый словарь русского языка: Ок. 100 000 слов, терминов и фразеологических выражений / С.И. Ожегов; Под ред. проф. Л.И. Скворцова. – 28-е изд., перераб. – М.: Мир и Образование, 2012 – 1376 с.

23. Осмоловская И.М. Формирвание универсальных учебных действий у учащихся начальных классов / И.М. Осмоловская, Л.Н. Петрова // Начальная школа. – 2012. – № 10. – С. 6.

24. Русские народные сказки для детей. – М: Директ-Медиа, 2014. – 514 с.

25. Трифоненко Е.И. Учебная задача как средство формирования познавательных универсальных учебных действий младших школьников на уроках математики // Духовная ситуация времени. Россия XXI век. – Курск, 2019. – № 1. – С. 43-44.

26. Утёмов В.В. Система задач открытого типа как средство развития креативности учащихся // Современные проблемы науки и образования. – 2011. – № 5. URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=4805 (дата обращения: 17.11.2019).

27. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5-9 кл.). 17.12.2010, №1897. URL:

http://www.zakonprost.ru/content/base/part/718464 (дата обращения: 17.11.2019).

28. Фридман Л. М. Теоретические основы методики обучения математике / Л.М. Фридман. – М.: Издательство «Флинта», 1998. – 217 с.

29. Харламов И.Ф. Педагогика. – М.: Гардарики, 1999. – 520 с.

30. Хуторской А.В. Педагогическая инноватика: методология, теория, практика: Научное издание. – М.: УНЦ ДО, 2005. – 222 с.

31. Чуканцов С.М. Где ошибка? Самоконтроль при решении мат. задач. / С.М. Чуканцов. – Тула, 1976. – 65 с.

32. Чуланова Н.А., Черняева Т.Н. Нормативный контекст определения «Познавательные универсальные учебные действия» // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6. URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=16398 (дата обращения: 17.11.2019).

33. Чуланова Н.А. Модель развития познавательных универсальных учебных действий обучающихся образовательной организации в единстве урочной и внеурочной деятельности // Известия саратовского университета. Новая серия. Серия: Философия. Психология. Педагогика. – Саратов, 2016. – № 2. – С. 229-234.

34. Шестакова Л.Г. Возможности аналитико-синтетической деятельности для формирования у школьников универсальных учебных действий (на материале математики) // Реализация компетентностного подхода в процессе обучения математике. – Соликамск, 2014. – С. 25-38.

35. Шкерина Л.В., Кейв М.А., Берсенева О.В., Журавлева Н.А. Мониторинг уровня сформированности метапредметных результатов обучения математике в 5 классах: учебное пособие / [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2018. – 189 с.