

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. АСТАФЬЕВА
(КГПУ им. В.П. Астафьева)

Институт/факультет/филиал математики, физики и информатики
(полное наименование института/факультета/филиала)
Выпускающая(ие) кафедра(ы) математики и методики обучения математике
(полное наименование кафедры)

Дементьева Татьяна Юрьевна

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Тема **ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ПО МАТЕМАТИКЕ В
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ**

Направление подготовки/специальность 44.04.01 Педагогическое образование
(код направления подготовки/код специальности)

Магистерская программа Математическое образование в условиях ФГОС
(наименование профиля программы)

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ

Зав.кафедрой:

д-р пед. наук, профессор Л.В. Шкерина

« 11.12 » 2019 г. *Л.В. Шкерина*
(дата, подпись)

Руководитель магистерской программы
д-р пед. наук, профессор Л.В. Шкерина

« 09.12 » 2019 г. *Л.В. Шкерина*
(дата, подпись)

Научный руководитель

д-р физ.-мат. наук, доцент Е.Н. Михалкин

« 09.12 » 2019 г. *Е.Н. Михалкин*
(дата, подпись)

Дата защиты _____

Обучающийся Т.Ю. Дементьева

« 15.11 » 2019 г. *Т.Ю. Дементьева*
(дата, подпись)

Оценка _____
(прописью)

Красноярск 2019

Реферат

Структура магистерской диссертации

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка, приложений. Работа содержит 2 рисунка и 6 таблиц, библиографический список представлен 50 работами.

Краткая характеристика работы

В настоящее время современная школа должна обеспечить функциональную грамотность и социальную адаптацию обучающихся на основе приобретения ими компетентного опыта в сфере учения, познания, профессионально-трудового выбора, личностного развития, ценностных ориентаций и творчества. Инновационные процессы, идущие сегодня в системе педагогического образования, наиболее остро ставят вопрос о подготовке высокообразованной интеллектуально развитой личности. Научно-технический прогресс диктует определенные требования к человеку XXI века: он должен быть не просто созидателем, а созидателем творческим и интеллектуально развитым, поэтому воспитанием и становлением такого человека должна заниматься современная школа, где реализуются принципы индивидуального подхода к учащимся.

Объект исследования: образовательный процесс дополнительного образования по математике у учащихся средней общеобразовательной школы.

Предмет исследования: проектирование и реализация дополнительных программ по математике в средней школе

Цель исследования: теоретически обосновать, спроектировать и реализовать дополнительную образовательную программу по математике

Методы исследования:

- 1) сбор и анализ литературных источников;
- 2) анкетирование;
- 3) наблюдение;
- 4) педагогический эксперимент.

Основные результаты магистерской диссертации. Из полученных результатов можно сделать вывод, что после спроектированных дополнительных образовательных программ по математике у учащихся повышается интерес к предмету, формируются успешные образовательные результаты.

Научная новизна исследования состоит в том, что данная программа формирует первоначальные исследовательские и практические умения учащихся, включает их в активную познавательную деятельность, в частности, учебно-исследовательскую. В школьном курсе не рассматриваются темы, содержание которых может способствовать интеллектуальному, творческому развитию школьников, расширению кругозора и позволит увидеть необычные стороны математики и ее приложений.

Практическая значимость работы данной программы состоит в том, что учащиеся смогут освоить ряд предметных умений (планировать свою деятельность, контролировать выполненные действия) и общеучебных умений (вести диалог с учителем, с одноклассниками, защита своих взглядов, устанавливать контакты с целью выполнения заданий за пределами школы). Безусловно, полезным окажется и опыт практической деятельности, приобретенный в результате выполнения заданий.

Abstract

Structure of the thesis

The work consists of an introduction, two chapters, a conclusion, a reference list, and attachments. The thesis contains 2 illustrations, the reference list includes 53 sources.

Brief description of the thesis

At present, the modern school should provide functional literacy and social adaptation of students on the basis of their acquisition of competent experience in the field of learning, cognition, professional and labor choice, personal development, value orientations and creativity. The innovative processes taking place today in the system of teacher education most sharply raise the question of preparing a highly educated intellectually developed personality. Scientific and technological progress dictates certain requirements for a person of the 21st century: he must not only be a creator, but a creator creative and intellectually developed, therefore a modern school should be engaged in the upbringing and formation of such a person, where the principles of an individual approach to students are implemented.

The object of the study : the educational process of additional education in mathematics in secondary school students.

The subject of the study: design and implementation of additional math programs in high school.

The aim of the study: theoretically justified, design and implement an additional educational program in mathematics

Methods of research:

- 1) collection and analysis of literary sources;
- 2) questioning;
- 3) observation;
- 4) pedagogical experiment.

Main results. From the results obtained, it can be concluded that after the designed additional educational programs in mathematics, students have an increased interest in the subject, successful educational results are being formed.

Scientific novelty. Consists in the fact that this program forms the initial research and practical skills of students, includes them in active cognitive activity, in particular, educational research. The school course does not address topics whose content can contribute to the intellectual, creative development of students, broaden their horizons and allow you to see the unusual aspects of mathematics and its applications.

Practical significance. This program consists in the fact that students will be able to master a number of subject skills (to plan their activities, to control the

actions performed) and general educational skills (to conduct a dialogue with the teacher, with classmates, protect their views, establish contacts in order to complete assignments outside the school). Of course, practical experience gained as a result of completing assignments will also be useful.

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Теоретические аспекты функционирования системы дополнительного образования	9
1.1. История развития дополнительного образования школьников в России.....	9
1.2. Анализ литературы по организациям и содержанию дополнительного математического образования.....	13
1.3. Требования к содержанию и оформлению дополнительных образовательных программ.....	21
Глава 2. Практика разработки и реализации дополнительных образовательных программ по математике средней общеобразовательной школе.....	32
2.1. Классификация программ дополнительного образования детей.....	32
2.2. Содержание дополнительных программ по математике.....	43
2.3. Результаты опытно-экспериментальной работы.....	58
Заключение.....	63
Библиографический список.....	64
Приложения.....	69

Введение

В настоящее время современная школа должна обеспечить функциональную грамотность и социальную адаптацию обучающихся на основе приобретения ими компетентного опыта в сфере учения, познания, профессионально-трудового выбора, личностного развития, ценностных ориентаций и творчества. Инновационные процессы, идущие сегодня в системе педагогического образования, наиболее остро ставят вопрос о подготовке высокообразованной интеллектуально развитой личности. Научно-технический прогресс диктует определенные требования к человеку XXI века: он должен быть не просто созидателем, а созидателем творческим и интеллектуально развитым, поэтому воспитанием и становлением такого человека должна заниматься современная школа, где реализуются принципы индивидуального подхода к учащимся.

Федеральные государственные образовательные стандарты второго поколения значительное внимание уделяют *метапредметным и личностным* образовательным результатам. Внеурочная деятельность ориентирована на работу с интересами учащихся, развитием их личностных компетенций, профориентацию. Образовательный стандарт нового поколения ставит новые цели. У детей изменяется характер учебной деятельности, содержание учебного материала представляет собой систематическое изложение основ наук. Новые знания обогащают и расширяют представления подростков об окружающей действительности, открывают новые области явлений, интересы становятся более устойчивыми, перестают носить эпизодический характер. Обучающимся необходимо привить две группы новых умений. Речь идет, во-первых, об универсальных учебных действиях, составляющих основу умения учиться: навыках решения творческих задач и навыках поиска, анализа и интерпретации информации. Во-вторых, речь идет о формировании у детей мотивации к обучению, о помощи им в самоорганизации и саморазвитии.

Метод проекта – это одна из личностно-ориентированных технологий, в основе которой лежит развитие познавательных навыков учащихся, умений самостоятельно конструировать свои знания, ориентироваться в информационном пространстве, развитие критического и творческого мышления.

Программа, которая последовательно применяет этот метод, строится как серия взаимосвязанных проектов, вытекающих из тех или иных жизненных задач. От ребенка требуется умение координировать свои усилия.

Чтобы добиться успеха, ему приходится добывать необходимые знания и с их помощью проделывать конкретную работу. Идеальным считается тот проект, для исполнения которого необходимы различные знания, позволяющие разрешить целый комплекс проблем.

Актуальность проектной деятельности сегодня осознается всеми. ФГОС нового поколения требует использования в образовательном процессе технологий деятельностного типа, методы проектно-исследовательской деятельности определены как одно из условий реализации основной образовательной программы среднего общего образования.

Включение в образовательный процесс проектных задач, с одной стороны, способствует получению качественно новых результатов в усвоении учебного материала и дает возможность проведения эффективного мониторинга становления этих результатов, с другой стороны, закладывает основу для эффективного внедрения проектной деятельности как ведущей формы построения учебного процесса в подростковом возрасте, содействует развитию психологических процессов школьника: восприятия, представления, памяти, внимания, мышления, речи, воображения, развивает познавательную деятельность учащихся. Программа выражает **целевую направленность** на развитие интеллектуальной деятельности школьников и совершенствование познавательного процесса, способствует формированию математических

способностей учащихся, а именно: учит обобщать материал, рассуждать, анализировать, выдвигать гипотезу, обоснованно делать выводы, доказывать.

Цель исследования: теоретически обосновать, спроектировать и реализовать дополнительную образовательную программу по математике

Объект исследования: образовательный процесс дополнительного образования по математике у учащихся средней общеобразовательной школы.

Предмет исследования: проектирование и реализация дополнительных программ по математике в средней школе.

В основу нашего исследования положена следующая **гипотеза**: если наряду с основной образовательной программой реализуется и дополнительная образовательная программа, то это будет способствовать повышению мотивации обучающихся и формированию успешных образовательных результатов.

Задачи исследования:

- 1) Определить теоретико-методологические основания проектирования дополнительной образовательной программы для обучающихся по математике.
- 2) Выявить и классифицировать с учётом причин возникновения типичные школьные трудности при обучении учащихся по математике.
- 3) Разработать модель дополнительной образовательной программы по математике.
- 4) Экспериментально проверить эффективность разработанной программы и подготовить методические рекомендации.

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования**: анализ психолого-педагогической и методической литературы по проблеме исследования, наблюдение, анкетирование школьников, анализ продуктов деятельности обучающихся и организация, проведение педагогического эксперимента.

Научная новизна исследования состоит в том, что данная программа формирует первоначальные исследовательские и практические умения

учащихся, включает их в активную познавательную деятельность, в частности, учебно-исследовательскую. В школьном курсе не рассматриваются темы, содержание которых может способствовать интеллектуальному, творческому развитию школьников, расширению кругозора и позволит увидеть необычные стороны математики и ее приложений

Практическая значимость работы данной программы состоит в том, что учащиеся смогут освоить ряд предметных умений (планировать свою деятельность, контролировать выполненные действия) и общеучебных умений (вести диалог с учителем, с одноклассниками, защита своих взглядов, устанавливать контакты с целью выполнения заданий за пределами школы). Безусловно, полезным окажется и опыт практической деятельности, приобретенный в результате выполнения заданий.

Во Введении обоснована актуальность исследования, сформулирована его цель, объект, предмет, гипотеза и задачи; раскрыта практическая значимость, охарактеризованы методы исследования.

В первой главе были охарактеризованы проблемы дополнительного образования в педагогической науке. Были выделены особенности проектирования дополнительных программ.

Во второй главе представлены методические разработки дополнительных занятий. Проведена экспериментальная проверка эффективности данных разработок; проанализированы полученные результаты.

В Заключении подведены итоги работы, обозначены перспективы дальнейшего исследования.

В Приложение представлен: план-конспект занятий .

Актуальность программы определяется также общей задачей оптимизации учебного процесса в условиях школы. Однообразность какой-либо работы снижает интерес к ней. Поэтому сегодня становится необходимым обучить учащихся современным технологиям. Для этого на занятиях будут использоваться активные формы работы. Содержание курса

составляют разнообразные задачи, имеющие жизненно-практическую ценность, что положительно скажется на понимании учащимися прикладного характера знаний по математике, поскольку математика проникла практически во все сферы человеческой жизни. Современное производство, компьютеризация общества, внедрение современных информационных технологий требуют математической грамотности. Это предполагает определённый стиль мышления, вырабатываемый математикой. Математическое образование вносит свой вклад в формирование общей культуры человека. Изучение математики способствует эстетическому воспитанию человека, пониманию красоты и изящества математических рассуждений. Знания и умения, необходимые для организации проектной и исследовательской деятельности, в будущем станут основой для организации научно-исследовательской деятельности в вузах, колледжах, техникумах и т.д.

Особенностью данной программы является реализация педагогической идеи формирования у детей умения учиться самостоятельно добывать и систематизировать новые знания. В этом качестве программа обеспечивает реализацию следующих принципов: *интегральность* – объединение и взаимовлияние учебной и проектной деятельности обучающихся, когда опыт и навыки, полученные при выполнении исследовательских работ, используются на уроках и содействуют повышению успеваемости и развитию психологической сферы; *непрерывность* – процесс длительного ориентирующего образования и воспитания в творческом объединении учащихся, обучение, в котором погружение в проблему предполагает глубокое систематизированное знание предмета и широкую эрудицию в разных областях, формирование навыков исследовательского труда, повышение мотивации в учении через построение образовательного процесса, через логику деятельности, имеющей личностный смысл для ученика, вывод ученика на свой, личный, уровень развития через индивидуальный темп работы над проектом; формирование исследовательской культуры учащихся;

умений и навыков самостоятельного и творческого труда, самостоятельной работы с научной литературой; приобретение коммуникативных умений.

Развитие творческой личности в процессе обучения и воспитания является одной из социально значимых задач современного российского общества. В качестве высшей цели образования определено становление саморазвивающейся и самоопределяющейся личности, способной к открытому творческому взаимодействию с окружающей средой и обществом. Поэтому необходимо уделять огромное внимание выявлению и созданию условий в классе, в группе для развития духовно-богатой, творчески-мыслящей личности, выявлению и развитию способностей каждого ребёнка с учётом его интересов и наклонностей. Носителем собственного метода познания мира является математика, с помощью которой рассматриваются формы и взаимное расположение предметов.

Результатом работы является спроектированные дополнительные образовательные программы. Было установлено, что если в процессе изучения математики реализовать дополнительные занятия, то это будет способствовать повышению мотивации обучающихся и формированию успешных образовательных результатов.

Глава 1. Теоретические аспекты функционирования системы дополнительного образования

1.1 История развития дополнительного образования школьников в России

Дополнительное образование детей как неотъемлемая часть системы образования России приобрела системные характеристики в 90-х годах прошлого столетия. В соответствии с законом Российской Федерации «Об образовании» внешкольные учреждения преобразованы в учреждения дополнительного образования, а система внешкольного образования преобразована в систему дополнительного образования.

Исследователями выделяются хронологические периоды, в которых наиболее ярко прослеживаются особенности развития внешкольного образования и особенности становления дополнительного образования. По мнению исследователей, этими периодами являются временные отрезки: конец XIX - начало XX века, 20-30-е годы XX века, 40-80-е годы XX века и период с 1992 года по настоящее время.

Идеи внешкольного образования начали овладевать передовыми умами еще в XIX веке. Общественность понимала, что социально-экономические условия вынуждали детей включаться в производство рано, а они не имели возможностей для полноценного развития [11].

Деятельность педагогов по организации жизни детей с учетом общественно-хозяйственной деятельности России носила характер конкретно-практической направленности воспитания, что имело исключительную педагогическую ценность для становления общественного воспитания. Первые внешкольные учреждения во многом выполняли компенсирующую функцию: занятия в этих учреждениях компенсировали отсутствие у детей школьного образования [18].

В конце XIX – начале XX века прогрессивные деятели-энтузиасты создавали в разных городах России клубы для детей, летние колонии на средства местных педагогических обществ. В это же время появился термин

«внешкольная работа». Е.Н. Медынский подчеркивал, что «помочь войти растущему человеку в культуру, освоить ее и сделать частью своей жизни только школьное образование не может, оно непременно должно быть дополнено внешкольными формами» [24].

В 20-30-е годы XX века внешкольная деятельность в принципе сохраняет и развивает формы, существовавшие до 1917 г. Содержание внешкольной работы обогащается делами пионерской и комсомольской организации как неотъемлемых частей воспитания личности социалистического государства.

Во внешкольных учреждениях основной организационной формой в эти годы стали кружки по интересам. Первоначально их главными задачами были обучение детей основным трудовым умениям рабочих специальностей.

Развитие системы внешкольных учреждений в 40-50-е гг. XX века, по мнению исследователя О. Е. Лебедева, характеризуется реализацией четырех основных социально-педагогических функций: профессиональное и гражданское самоопределение детей; дополнительное образование; коммуникативная; методическая. В эти годы в деятельности внешкольных учреждений преобладает парадность и формализм, индивидуальная и клубные формы работы сменяются массовостью праздников [17].

В 60-е годы XX века, в годы «оттепели», наблюдаются значительные изменения в характере деятельности внешкольных учреждений, воспитание приобретает «деятельностный» характер. Рождается и получает широкое распространение методика коллективного творческого дела И. П. Иванова («Коммуна юных фрунзенцев» в Ленинграде во Фрунзенском доме пионеров).

В эти годы в деятельности внешкольных учреждений приоритетными становятся: уважение к увлечению ребенка, его занятию в коллективе по интересам; показ подростку общественной ценности его занятия, значимости его знаний и умений для коллектива; использование его личного интереса, знаний и умений в коллективных целях; изменение статуса ребенка в школьном коллективе на основе учета его успехов во внешкольном

учреждении, участия в школьных делах; совместное изучение школой и внешкольным учреждением опыта подготовки актива; взаимная информация педагогов внешкольных учреждений и школы о кружковцах [23].

Периодом наивысшего развития внешкольных учреждений явились 70-80-е годы XX века. Именно в этот период, подчеркивает исследователь В. И. Семенова, определились главные направления социально-педагогической деятельности, и сложилась уникальная система работы с детьми, не имеющая аналогов в мире, включающая четко определенные задачи, содержание, и формы внешкольной работы. Внешкольные учреждения стали одним из основных институтов общества, так как усилилась их практическая роль в организации деятельности учащихся и ее воспитательного воздействия на них по месту жительства, в индивидуализации работы с неблагополучными детьми [12].

Процесс становления дополнительного образования вызвал интерес не только у педагогов-практиков, но и у ученых, которые в своих исследованиях научно обосновывают такое социально-педагогическое явление, как дополнительное образование.

Исследователи характеризуют дополнительное образование как:

- особое образовательное пространство, где объективно задаются множество отношений, где осуществляются специальные образовательные деятельности различных систем (государственных, общественных, смешанных) по развитию индивида и его организации, так как оно расширяет возможности практического опыта ребенка, является временем творческого освоения новой информации и самоосмысления, формирования новых жизненных умений и способностей, на которые школа не ориентирована;
- целенаправленный процесс обучения и воспитания, ориентированный на развитие личностных профессиональных качеств человека и реализуемых через творческие образовательные программы, не входящие в содержание Госстандартов образования;

- специфически органическая часть системы общего и профессионального образования, представляющая собой процесс и результат формирования личности ребенка в условиях развивающей среды, предоставляющая детям интеллектуальные, психолого-педагогические, образовательные, развивающие и другие услуги на основе свободного выбора и самоопределения;

- образование, предоставляющее детям возможность свободного выбора форм и видов деятельности, направленных на формирование их мироощущения и миропонимания, развитие мотивационной положительной направленности в сфере свободного времени.

Эти определения не исключают по своему содержанию друг друга, в них прослеживается потенциал дополнительного образования в воспитании социально активной личности [2].

Закон РФ «Об образовании» 1992 г. обозначил один тип образовательного учреждения дополнительного образования. В 1996 году в новой редакции закона уточнена типология учреждений дополнительного образования взрослых и учреждений дополнительного образования детей. Сложилась система дополнительного образования детей. Системообразующим фактором дополнительного образования является творческое развитие личности ребенка [15].

Изучая процесс трансформации сети внешкольных учреждений в систему дополнительного образования, исследователи обращают внимание на изменения в функциях учреждений дополнительного образования: отпала функция идеологического воспитания, направленная на формирование заранее заданной мировоззренческой позиций; значима функция выявления и поддержки детей, способных к творческой деятельности; ведущей стала образовательная функция; функции самоопределения, формирования духовного образа жизни, реализации коммуникативных потребностей детей сохранились, но изменился подход к определению путей их осуществления.

Для учреждений дополнительного образования детей на этапе перехода в качественно новое состояние присущи тенденции их обновления в целом: изменился взгляд на личность человека, усилились позиции культурно-исторической педагогики развития, возросло значение неформального образования, определились приоритеты дополнительного образования детей, вариативность его содержания, форм и методов, индивидуализация образовательных маршрутов социального самоопределения обучающихся; первичной организационной формой дополнительного образования становится добровольное объединение детей и взрослых, выступающее как продуктивная социальная общность, моделирующая различные социальные и профессиональные роли и отношения людей; положительный эмоциональный фон сотрудничества детей и взрослых; складываются условия, способствующие усилению стартовых возможностей индивида на рынке труда и профессионального образования [16].

1.2 Анализ литературы по организации и содержанию дополнительного математического образования

Математика занимает особое место в общем образовании человека. На протяжении многих лет происходит изменение отношения учащихся к математике. Наблюдается снижение популярности математики среди школьников, о чем свидетельствуют беседы с учащимися и учителями, а также низкие конкурсы в вузы с вступительными экзаменами по математике и зачастую невысокие результаты последних.

Снижение уровня образования обуславливалось изменениями в обществе, недостаточном финансированием. К концу 90-х годов начинает подниматься престиж качественного образования, в связи с этим возрождаются многие угасающие формы работы с учащимися, активно развивается дополнительное математическое образование учащихся.

Под дополнительным математическим образованием мы понимаем образовательный процесс, нацеленный на развитие учащихся, формирование у них интереса к математике и обеспечивающий расширение и углубление

программного материала. Дополнительное математическое образование призвано решить целый комплекс задач по углубленному математическому образованию, всестороннему развитию индивидуальных способностей школьников и максимальному удовлетворению их интересов и потребностей.

Сфера дополнительного математического образования обладает рядом преимуществ по сравнению с основным, владея большей свободой в отборе содержания, форм, методов и средств обучения. Содержание дополнительного математического образования может быть оторвано от целей и задач основного образования.

Разработкой различных аспектов дополнительного математического образования занимались многие специалисты. Проведенные исследования можно условно рассредоточить по трем направлениям:

- разработка различных форм дополнительного математического образования;
- содержание занятий дополнительного математического образования;
- возможности повышения эффективности дополнительного математического образования.

О различных формах дополнительного математического образования писали М. Б. Балк, Е. К. Серебровская, В. К. Смышляев, А. И. Фетисов, Л. А. Шор, К. М. Щербина и др.

Разработкой содержания дополнительного математического образования учащихся занимались М. Б. Балк, Н. Я. Виленкин, Г. И. Линьков, А. П. Подашов, С. И. Шварцбурд и др.

Изучением возможных путей совершенствования дополнительного математического образования в школе в своих диссертационных исследованиях занимались Е. А. Акопян, И. Н. Алексеева, И. И. Дырченко, Е. А. Дышинский, Н. И. Мерлина, А. И. Можяев, Ф. Н. Чинчирова, Н. Шербоев.

Рассмотрим несколько взаимосвязанных форм дополнительного математического образования [4]. Опытная работа П. М. Горева и его собственная практика обучения школьников математике в ДМО показала, что

эффективными оказываются следующие из них [11,12].

1. Основной формой организации работы в дополнительном математическом образовании являются *занятия математического кружка*. Они несут основную содержательную нагрузку дополнительного математического образования учащихся в школе. Следует отметить, что занятия кружка обладают большим потенциалом в развивающей и воспитательной работе с учениками. «Вызывая интерес учащихся к предмету, кружки способствуют развитию математического кругозора, творческих способностей учащихся, привитию навыков самостоятельной работы и тем самым повышению качества математической подготовки учащихся» – пишет И. С. Петраков [33, с. 3].

По нашему мнению, кружковые занятия должны проходить в разнообразных формах, учитывающих индивидуальные особенности учащихся и организационные факторы, связанные со временем, местом проведения и содержанием кружка. Система кружковых занятий должна быть максимально гибкой: учитывать интересы и способности каждого школьника, давать возможность вновь прибывающим учащимся начинать заниматься в кружке с любого момента. В то же время содержание должно отвечать принципу концентрической последовательности: один и тот же материал изучается несколько раз на разных этапах с различным уровнем сложности.

Одним из основных видов кружка является тематическое занятие по решению задач [4, 33]. Как правило, на таких занятиях члены кружка решают подобранные учителем или специально подготовленным школьником задачи на определенную тему.

Другим видом кружка является презентация исследований учащихся в пленарном или стендовом виде. Как правило, она представляет собой выступление членов кружка по теме своего исследования, реализуемого в рамках проектно-исследовательской деятельности. Презентация исследований школьников является результатом их проектно-исследовательской учебной творческой деятельности, осуществляемой при использовании в обучении

метода проектов [27, 31, 36]. Реализация проекта, как правило, представляется в презентации полученного продукта в одной из предусмотренных форм: сайт, газета, портфолио, игра, анализ данных, видеоролик, пакет рекомендаций, стенд, статья, учебное пособие, справочник, сценарий, прогноз, публикация, экскурсия и т.д.

Среди других форм организации кружка, нашедших применение в практической работе, укажем следующие:

– *занятие по решению разнородных задач* проводится с целью ознакомления учащихся с основными идеями, методами и конструкциями в математике, а также при подготовке к математическим соревнованиям;

– *занятие по разбору задач, решаемых учащимися дома*, проводится в рамках реализации самообразования учащихся во внеклассной работе по предмету;

– *беседы на математические или историко-математические темы* способствуют формированию у учащихся общего восприятия математики как науки, влияют на развитие интереса школьников к занятиям кружка;

– *изготовление наглядных пособий по математике* дает возможность понять учащимся некоторые аспекты математики через непосредственную деятельность, что, несомненно, вызывает живой интерес к занятиям;

– *математические экскурсии и геодезические работы на местности* осуществляют межпредметные связи математики с другими отраслями науки и техники, приводят в действие механизм осознания практической значимости математического содержания;

– *круглые столы по различным проблемам математики* вскрывают суть математических проблем, способствуют организации школьников к чтению математической и периодической литературы, а также собственным исследованиям учащихся.

Следует отметить, что кружок для младших школьников должен отличаться большим разнообразием материала, представленного на одном занятии. Игровая форма разминки в начале занятия, самостоятельное решение

«хитрых» задач, знакомство с историческим материалом, решение объектных головоломок (то есть таких, которые можно подержать в руках) превращают занятие в чтение «живого журнала», каждая непрочитанная страница которого должна быть желанной для каждого школьника.

Таким образом, являясь основной формой организации работы в дополнительном математическом образовании, математический кружок во всем разнообразии форм его проведения является составной частью модели организации учебной деятельности школьников в дополнительном математическом образовании и концентрирует в себе основные содержательные линии и определяет общую образовательную политику дополнительного математического образования.

2. Полученные в рамках работы математического кружка знания и умения находят свое применение при участии школьников в разнообразных *математических соревнованиях*, являющихся еще одной формой дополнительного математического образования.

Среди наиболее ярких форм математических соревнований отметим: математические бои [8, 20]; математические олимпиады [4, 8, 10, 20]; математическую драку [8]; математический хоккей [8]; математический аукцион [8]; математические викторины, в том числе «Брейн-ринг» [2, 20]; математические турниры, в том числе математический КВН [3, 20]; остериаду [3]; математическую карусель.

Отметим также, что к списку математических соревнований следует добавить общеинтеллектуальные мероприятия, которые дают возможность разнообразить работу в дополнительном математическом образовании, внести в его структуру тенденцию к получению знаний вообще, а не только математических, развить в учащихся общую мыслительную культуру.

Многие из указанных соревнований являются командными. Это позволяет сформировать у учащихся умение работать в команде, воспитывает у них взаимопомощь и толерантность в общении со сверстниками.

Опыт преподавателей показывает, что систематическое проведение

математических мероприятий поддерживает спортивный интерес как к самим соревнованиям, так и к занятиям кружка и всего дополнительного математического образования в целом. Постоянное проведение соревнований вносит азарт и живость в дополнительное математическое образование, обеспечивает здоровую конкуренцию среди участников кружка. Отсутствие балловой оценки результатов работы в кружке, специфика его задачного материала делает математическое соревнование одновременно и промежуточной самооценкой школьника, и стимулом к дальнейшим занятиям в кружке.

3. Важным этапом в осуществлении дополнительного математического образования является создание условий для функционирования *школьной математической печати*.

На наш взгляд, школьная математическая печать является неотъемлемой составляющей в пропаганде математических знаний и формировании познавательного интереса учащихся. Ко всему прочему, выпуск школьной математической печати имеет большое воспитательное значение в работе со школьниками.

К основным видам школьной математической печати отнесем многотиражную математическую газету, стенгазету (статическая школьная математическая печать), математический стенд, журнал математического кружка (динамическая школьная математическая печать).

Многотиражная математическая газета для школьников представляет собой не только блок интересной и полезной информации, но и является средством самовыражения некоторых школьников, связующим звеном для общения более широких масс, нежели собирает кружок или клуб. Общая газета для школьников разных возрастов дает возможность младшим школьникам интересоваться вопросами, изложенными для более старших школьников, а, значит, повышать уровень своей математической культуры.

Среди разнообразных форм школьной математической печати особо выделим журнал математического кружка, который наиболее эффективно

используется в практической деятельности [9]. Членами кружка периодически выпускается несколько тематических страниц, посвященных материалу, разобранному на занятиях. Выпущенные в течение года страницы подшиваются в одну папку, которую мы далее будем называть журналом математического кружка. Каждая страница журнала посвящается лишь одной теме (или ее логически завершенной части) и создается совместно педагогом и школьниками на трех этапах.

Можно выделить и другие виды математической печати: уголок математики, математическая фотогазета, монтажи фотографий и рисунков, математический альбом. Эти виды математической печати не получили широкого распространения, однако представляют собой определенный интерес для учителей математики и методистов.

Таким образом, школьная математическая печать является неотъемлемой частью нашей модели организации учебной математической деятельности в дополнительном математическом образовании.

4. Особое место в организации дополнительного математического образования играет *система кураторства младших школьников старшими*.

Систему кураторства младших школьников старшими в своей работе успешно применяет Р. Г. Хазанкин [41]. Основные цели такой системы заключаются в повышении интереса школьников к математике, помощи в овладении предметом, неформальный обмен опытом.

Кураторство организуется на нескольких уровнях: *уровень общения* заключается в помощи педагогу в проведении внеклассных мероприятий; *уровень сотрудничества* – в помощи учащимся в подготовке к кружковым занятиям, тренинг команд для соревнований, выпуск математических газет.

5. Неотъемлемой частью в организации дополнительного математического образования является *развитие связей с другими учебными заведениями*.

Нет большой необходимости говорить, что нужно постоянно держать связь, проводить совместные соревнования, производить обмен мнениями с

другими образовательными учреждениями с целью сравнительного анализа достижений школ и дальнейшего обмена опытом.

6. Важным в организации учебной математической деятельности в дополнительном математическом образовании является открытие в школе специального *учебно-методического кабинета* для самостоятельной работы учащихся.

Наличие в школе специального учебно-методического кабинета, доступного школьникам в их свободное время – большой плюс к повышению интереса к математике и развитию учащихся. Он оборудуется необходимым числом рабочих мест. Школьникам в таком кабинете должна быть доступна интересующая их литература по математике, задачки. Со временем, силами педагогов и учащихся образуется банк задач, наглядных пособий, методических разработок мероприятий, объектных головоломок. В кабинете проводятся занятия кружка, проходят заседания клуба.

Таким образом, учебно-методический кабинет становится школьным центром математического образования, в том числе и дополнительного. Правильная организация его работы создает условия для постоянного функционирования, как отдельных составляющих дополнительного образования, так и всей системы занятий и мероприятий в целом.

Система дополнительного математического образования является преемником внеклассной и внешкольной работы, внешкольного воспитания. Главное принципиальное отличие его от своего предшественника в том, что это образование ведется так же, как другие типы и виды образования, – по конкретным образовательным программам. Известно, что Закон РФ «Об образовании» не определяет дополнительное образование детей как действующее в рамках стандартов. Содержание дополнительного математического образования не стандартизируется – оно безбрежно: работая с ребенком в соответствии с его интересами, его выбором, мы можем идти и вширь, и ввысь, и вглубь.

Часть научно-методической литературы, посвященной дополнительному математическому образованию, постепенно устаревает. Некоторые темы, которые ранее представляли собой содержание дополнительного образования, стали входить в программу общеобразовательных классов. Многие публикации по дополнительному математическому образованию учащихся представляют собой изложение вариантов использования занимательных задач на внеурочных математических занятиях. Зачастую эти задачи представлены без относительного содержания учебной программы, определенной логики, в большей степени ради занимательности.

Таким образом, среди форм организации дополнительного математического образования важными являются занятия математического кружка, которые несут основную содержательную нагрузку дополнительного математического образования.

1.3 Требования к содержанию и оформлению дополнительных образовательных программ

Содержание образовательных программ должно соответствовать:

- достижениям мировой культуры, российским традициям культурно-национальным особенностям регионов;
- определенному уровню образования (дошкольного, начального общего, основного общего, среднего (полного) общего образования;
- направленностям дополнительных образовательных программ (научно-технической, спортивно-технической, художественной, физкультурно-спортивной, туристско-краеведческой, эколого-биологической, военно-патриотической, социально-педагогической, социально-экономической, естественно-научной и др.);
- современным образовательным технологиям, которые отражены в:
принципах обучения (индивидуальности, доступности, преемственности, результативности);
формах и методах обучения (активных методах дистанционного

обучения, дифференцированного обучения, занятиях, конкурсах, соревнованиях, экскурсиях, походах и т.д.);

методах контроля и управления образовательным процессом (анализе результатов деятельности детей);

средствах обучения (перечне необходимого оборудования, инструментов и материалов в расчете на объединение обучающихся).

Содержание образовательных программ должно быть направлено на:

- создание условий для развития личности ребенка;
- развитие мотивации личности к познанию и творчеству;
- обеспечение эмоционального благополучия ребенка;
- приобщение обучающихся к общечеловеческим ценностям;
- профилактику асоциального поведения;
- создание условий для социального, культурного и профессионального самоопределения, творческой самореализации личности ребенка, ее интеграции в систему мировой и отечественной культур;
- интеллектуальное и духовное развитие личности ребенка;
- укрепление психического и физического здоровья;
- взаимодействие педагога дополнительного образования с семьей.

Цели и задачи дополнительных образовательных программ должны обеспечивать обучение, воспитание, развитие детей.

Дополнительная образовательная программа должна включать следующие структурные элементы:

1. Титульный лист.
2. Пояснительную записку.
3. Учебно-тематический план.
4. Содержание изучаемого курса.
5. Методическое обеспечение дополнительной образовательной программы.
6. Список литературы.

1. Титульный лист включает:

- наименование образовательного учреждения;
- где, когда и кем утверждена дополнительная образовательная программа;
- название дополнительной образовательной программы;
- возраст детей, на которых рассчитана дополнительная образовательная программа;
- срок реализации дополнительной образовательной программы;
- Ф.И.О., должность автора (авторов) дополнительной образовательной программы;
- название города, населенного пункта;
- год разработки дополнительной образовательной программы.

2. Пояснительная записка раскрывает:

- направленность дополнительной образовательной программы;
- новизну, актуальность, педагогическую целесообразность;
- цель и задачи дополнительной образовательной программы;
- отличительные особенности данной дополнительной образовательной программы от уже существующих ;
- возраст детей, участвующих в реализации данной дополнительной образовательной программы;
- сроки реализации дополнительной образовательной программы (продолжительность образовательного процесса, этапы);
- формы и режим занятий;
- ожидаемые результаты и способы их проверки;
- формы подведения итогов реализации дополнительной образовательной программы (выставки, фестивали, соревнования, учебно-исследовательские конференции и т.д.).

3. Учебно-тематический план дополнительной образовательной программы включает:

перечень разделов, тем;

- количество часов по каждой теме с разбивкой на теоретические и практические виды занятий.

4. Содержание дополнительной образовательной программы раскрывается через краткое описание тем (теория и практика).

5. Методическое обеспечение дополнительной образовательной программы включает в себя описание:

- форм занятий, планируемых по каждой теме или разделу (игра, беседа, поход, экскурсия, конкурс, конференция и т. д.);
- приемов и методов организации учебно-воспитательного процесса, дидактический материал, техническое оснащение занятий;
- форм подведения итогов по каждой теме или разделу.

6. Список литературы.

Программа – это нормативная модель совместной деятельности людей, определяющая последовательность действий по достижению поставленной цели.

Классификация образовательных программ

Чаще всего образовательные программы подразделяются на примерные (типовые), модифицированные (адаптированные) и экспериментальные (авторские).

Примерная (типовая) программа рекомендована органом управления образованием по той или иной образовательной области направлению деятельности. Такая программа ориентирована на достижение обучающимися определенного уровня освоения знаний, умений и навыков. Оно проверяется, как правило, по результатам традиционных форм оценивания: зачетов, экзаменов, контрольных работ и т.п.

В основу модифицированной (адаптированной) программы положена примерная (типовая) программа, которая изменена с учетом особенностей образовательного учреждения, возраста и уровня подготовки обучающихся, режима и временных параметров осуществления деятельности,

нестандартности индивидуальных результатов обучения и воспитания. Коррективы вносятся в программу самим педагогом и не затрагивают концептуальных основ организации образовательного процесса, традиционной структуры занятий, присущих исходной программе, которая была взята за основу. Диагностика результатов работы по таким программам связана с демонстрацией достижений обучающихся на отчетных концертах, выставках, соревнованиях, конкурсах, конференциях и т.д. При этом педагоги не отказываются и от количественных показателей знаний, умений и навыков.

Необходимо, чтобы модифицированная программа была обсуждена на методическом совете и утверждена руководителем образовательного учреждения.

Экспериментальная программа разрабатывается педагогом с целью решения какой-либо практической задачи, связанной с преодолением определенных трудностей в образовательном процессе. Она может предполагать изменения в содержании и методах обучения.

На работу по экспериментальной программе должно быть дано разрешение методического совета и руководителя образовательного учреждения. После этого она обязательно проходит апробацию. В случае выявления новизны предложений автора экспериментальная программа может претендовать на статус авторской.

Обязательное условие отнесения образовательной программы к разряду авторских – её новизна. Она должна быть полностью создана педагогом (или коллективом авторов) и принадлежать ему (им) на правах интеллектуальной собственности. Как правило, эта программа предполагает:

- преподавание нового учебного курса (предмета);
- реализацию собственного подхода педагога к традиционным темам.

При этом название «авторская» требует документального доказательства новизны и принадлежности этой новизны именно данному автору. Для этого претендент на авторство в пояснительной записке к программе должен

убедительно показать принципиальные отличия его разработки от подходов других авторов, решающих сходную проблему.

Авторская программа должна быть рекомендована к использованию методическим советом и утверждена руководителем учреждения. Официально статус авторской присваивается программе вышестоящим органом управления образованием. В ряде регионов России разработчикам программ, прошедшим соответствующую экспертизу, выдается сертификат (свидетельство), подтверждающий, что данная программа действительно является авторской и принадлежит разработчику на правах интеллектуальной собственности.

При разработке программы необходимо обратить особое внимание на содержание следующих ее частей: пояснительной записки, учебно-тематического плана, содержания, методического обеспечения.

Пояснительная записка. В пояснительной записке раскрываются цели образовательной деятельности, обосновываются принципы отбора содержания и последовательность изложения материала, характеризуются формы работы с обучающимися в условиях реализации программы.

Рекомендации по написанию пояснительной записки.

1. В обосновании необходимости разработки и внедрения программы отмечаются:

- ее актуальность и практическая значимость для обучающихся;
- связь программы с уже существующими по данному направлению деятельности;
- вид программ (модифицированная, экспериментальная, авторская);
- новизна (для программ, претендующих называться авторскими).

2. При формулировании цели и задач программы следует помнить, что цель – это предполагаемый результат образовательного процесса, к которому необходимо стремиться. Поэтому в описании цели важно избежать общих абстрактных формулировок, таких, например, как «всестороннее развитие личности», «создание возможностей для творческого развития детей», «удовлетворение образовательных потребностей» и т.п. Такие формулировки

не отражают специфики конкретной программы. Кроме того, цель должна быть связана с названием программы, отражать ее основную направленность.

Конкретизация цели осуществляется через определение задач, раскрывающих пути достижения цели. Задачи показывают, что нужно сделать для достижения цели. Выделяют следующие типы задач:

- обучающие (развитие познавательного интереса к чему-либо, включение в познавательную деятельность, приобретение определенных знаний, умений и навыков, развитие мотивации к определенному виду деятельности и т.п.);
- воспитательные (формирование у обучающегося социальной активности, гражданской позиции, культуры общения и поведения в социуме, навыков здорового образа жизни и т.п.);
- развивающие (развитие деловых качеств, таких как самостоятельность, ответственность, активность, аккуратность и т.д.; формирование потребностей в самопознании, саморазвитии).

Формулирование задач также не должно быть абстрактным. Важно, чтобы они были соотнесены с прогнозируемыми результатами.

3. Описывая особенности программы, следует отразить:

- ведущие идеи, на которых она базируется;
- ключевые понятия которыми оперирует автор;
- этапы ее реализации, их обоснование и взаимосвязь.

4. В пояснительной записке отмечают:

- основные возрастные особенности учащихся, которым адресована программа;
- вид детской группы (профильная, экспериментальная и др.) и ее состав (постоянный, переменный и др.);
- особенности набора обучающихся (свободный, конкурсный).

5. Характеризуя режим организации занятий, необходимо указать:

- общее количество часов в год;
- количество часов и занятий в неделю;

- периодичность занятий
- б. Описывая прогнозируемые результаты и способы их проверки, следует:
- сформулировать требования к знаниям и умениям, которые должен приобрести обучающийся в процессе занятий по программе (т.е. важно четко описать, что он должен знать и уметь);
 - перечислить качества личности, которые могут развиваться у обучающихся в ходе занятий;
 - дать характеристику системе отслеживания и оценивания результатов обучения по программе, указав способы учета знаний и умений, возможные варианты оценки личностных качеств обучающихся. В качестве процедур оценивания могут использоваться тестирования, зачеты, экзамены, выставки, соревнования, конкурсы, учебно-исследовательские конференции и т.п.

Учебно-тематический план (по годам обучения). Учебно-тематический план раскрывает последовательность изучения тем предлагаемого курса и количество часов на каждую из них; определяет соотношение учебного времени, отводимого на теоретические и практические занятия.

Педагог имеет право самостоятельно распределять часы по темам в пределах установленного времени. При распределении учебного времени имеет смысл руководствоваться следующими нормами (см. таблицу 1):

Таблица 1

Продолжительность занятия	Периодичность в неделю	Количество часов в неделю	Количество часов в год
1 час	2 раза	2 часа	72 часа
2 часа	2 раза	4 часа	144 часа
2 часа	3 раза	6 часов	216 часов

3 часа	2 раза	6 часов	216 часов
3 часа	3 раза	9 часов	324 часа

Оформлять учебно-тематический план рекомендуется в виде таблицы (см. таблицу 2)

Таблица 2

№п	Наименование разделов и тем	Общее кол-во учебных часов	В том числе:	
			теоретических	практических
1.	Название раздела			
1.1.	Название темы			
1.2.	Название темы			
2.	Название раздела			
2.1.	Название темы			
2.2.	Название темы			
...	...			
Итого часов				

Содержание программы. В содержании программы приводится краткое описание разделов и тем. Раскрывать содержание тем следует в порядке их представления в учебно-тематическом плане.

Кратко описать тему означает:

- указать ее название;
- перечислить основные содержательные моменты, которые изучаются в рамках данной темы;
- указать, в каких формах организуется образовательный процесс.

Изложение содержания программы ведется в именительном падеже.

Обычно первой темой программ является введение в изучаемый предмет.

Методическое обеспечение программы (частично может быть описано в пояснительной записке). В этом разделе программы необходимо:

- кратко описать основные способы и формы работы с детьми, которые планируются по каждому разделу – индивидуальные и групповые, практические и теоретические;
- отметить, какие формы занятий планируется использовать. Кроме того, желательно пояснить, чем обусловлен выбор таких форм занятий;
- описать основные методы организации образовательного процесса;
- перечислить используемые дидактические материалы;
- дать краткую характеристику средств, необходимых для реализации программы (кадровых, материально-технических и прочих). Характеризуя кадры, целесообразно определить критерии отбора педагогов для реализации программы; перечислить работников, занятых в ее реализации. Описывая материально-технические условия, имеет смысл дать краткий перечень оборудования, инструментов и материалов, необходимых для реализации программы (в расчете на количество обучающихся).

Выводы по главе 1

Анализ учебно-методической, психолого-педагогической литературы по теме выпускной квалификационной работы позволили сформулировать теоретические основы содержания дополнительного математического образования

1. Во время исследования развития дополнительного математического образования в современной школе была выявлена связь и различия дополнительного образования и основного математического образования. Была выявлена ценность дополнительного математического образования в современной школе.

Дополнительное математическое образование усиливает общее математическое образование, тем самым способствует развитию творческого потенциала, навыков адаптации к современному обществу.

2. В учебно-методической и психолого-педагогической литературе отмечена важная роль организации дополнительного математического образования в средней школе, представлены несколько взаимосвязанных форм организации дополнительного математического образования.

Занятия математического кружка являются важной формой организации дополнительного математического образования в средней школе, которые концентрируют в себе основные содержательные линии и определяют общую образовательную политику дополнительного математического образования.

3. В работе были сформулированы методические рекомендации по организации и содержанию дополнительного математического образования. Были отмечены принципы, которым должна удовлетворять программа занятий, результат которых будет прослеживаться в развитии математических способностей учащихся.

Глава 2. Разработка и реализация дополнительных образовательных программ по математике средней общеобразовательной школе

2.1 Классификация программ дополнительного образования детей

Педагогическая программа чаще всего рассматривается как документ или модель, определяющая цели, задачи, содержание, способы организации, ожидаемые результаты деятельности. Программы дополнительного образования детей могут быть, как минимум, двух уровней — уровня учреждения и уровня педагога.

С учетом специфики дополнительного образования детей, определенной государственным заказом и запросами обучающихся и их родителей, выделяются следующие виды программ:

— *примерная программа дополнительного образования детей* утверждается Министерством образования и рекомендуется к использованию по той или иной области или направлению деятельности в соответствии с ФГОС общего образования. Примерные программы имеют одинаковую структуру, которая включает пояснительную записку, учебно-тематический план, содержание курса, краткий перечень материалов, инструментов и оборудования, рекомендуемую литературу;

— *модифицированная (адаптированная) программа дополнительного образования детей* — это программа, измененная с учетом особенностей образовательного учреждения, региональных особенностей, в соответствии с социальным заказом, режимом и временными параметрами осуществления деятельности;

— *авторская программа* — это программа, которая полностью написана педагогом или коллективом педагогов, ее содержание — это предложение средств решения проблемы в образовании, оно обязательно отличается новизной, актуальностью.

Проект нового Закона РФ «Об образовании» выделяет дополнительные общеобразовательные программы — дополнительные общеразвивающие программы, дополнительные предпрофессиональные программы.

Программы организации дополнительного образования детей могут быть разработаны образовательными учреждениями самостоятельно или на основе переработки ими примерных программ. Для педагогических работников школы весьма актуальным является умение разрабатывать собственные программы деятельности. Особенно это умение становится важным при разработке программ дополнительного образования детей, направленных на реализацию государственного заказа, прописанного в ФГОС общего образования, а также социального заказа детей, родителей, учреждений, организаций, решение конкретных индивидуальных или групповых социальных проблем заказчиков.

Рассматривая программу как комплексную модель дополнительного образования детей, можно провести классификации программ по реализуемым в системе образования образовательным и социально-педагогическим функциям.

В рамках реализации образовательных функций дополнительного образования детей можно выделить учебные, воспитательные, развивающие программы, комплексные образовательные программы.

Учебные программы дополнительного образования детей могут быть направлены на формирование знаний, умений и навыков по учебному предмету, предусмотренному основной образовательной программой в соответствии с ФГОС общего образования (факультативы, предметные кружки по физике, химии, математике и т. д.), а также по предметам дополнительного образования разной направленности (кружки, студии, школы, лаборатории художественно-эстетической, физкультурно-спортивной, научно-технической, культурологической и других направленностей).

Учебные программы дополнительного образования детей должны обеспечивать удовлетворение различных образовательных потребностей детей в форме особого рода интеллектуальных, психолого-педагогических услуг, позволяющих им осваивать, углублять и развивать знания, которые они получают в общеобразовательной школе, или осваивать отрасли знаний, которые не изучаются в школе или других образовательных учреждениях.

Воспитательные программы дополнительного образования детей должны быть направлены на формирование личностного смысла того, что усваивается ребенком в процессе образования, формирование определенной направленности личности: социальной, духовно-нравственной, патриотической, общекультурной и др. Процесс воспитания рассматривается как целенаправленные действия по созданию условий для социального развития человека, то есть его готовности к участию в сложной системе социальных отношений в экономической, политической и духовной сферах. При этом в политической области молодой человек должен не только определить свои политические позиции, но и попробовать свои силы в роли лидера, осознать свою роль избирателя, сформировать у себя готовность к неуклонному исполнению государственных законов. В духовной области предполагается формирование нравственной позиции человека во взаимоотношениях с людьми, в отношении к религии, определении своих возможностей в эстетической деятельности и др. В экономической области дети апробируют свои профессиональные возможности, усваивают различные роли в системе рыночных отношений^[1].

Можно выделить несколько вариантов воспитательной деятельности, которая осуществляется в рамках дополнительного образования детей, — патриотическое, нравственное, эстетическое, социальное и другие виды воспитания.

— *Патриотическое воспитание* предполагает формирования у детей высокой социальной активности, гражданской ответственности, духовности, чувства верности Отечеству, готовности к выполнению гражданского долга и конституционных обязанностей по защите интересов Родины.

— *Эстетическое воспитание* — это развитие способности личности к полному восприятию и правильному пониманию прекрасного в искусстве и действительности; формирование системы художественных представлений, взглядов и убеждений, воспитание стремления и умений вносить элементы прекрасного во все стороны бытия, бороться против всего уродливого, а также готовности к посильному проявлению себя в искусстве.

— *Социальное воспитание* — формирование социальной активности, устойчивости, адаптированности, индивидуальности в процессе освоения ребенком системы социальных ролей и др.

Развивающие программы дополнительного образования детей должны быть направлены на реализацию процесса качественного изменения личности, предполагающего изменение ее сущностных сфер: интеллектуальной, мотивационной, эмоциональной, волевой, экзистенциальной, предметно-практической и сферы саморегуляции. В рамках дополнительного образования детей можно обеспечивать следующее содержание развития личности:

— *интеллектуальное развитие* — развитие мышления, ума, познавательных процессов, в том числе сообразительности, гибкости, самостоятельности, критичности ума, а также предметных и специальных знаний, умений и навыков;

— *эмоциональное развитие* — формирование эмоционального отношения ребенка к предмету творчества, умения понимать эмоциональные состояния и управлять своими эмоциями и чувствами;

— *мотивационное развитие* — развитие потребностей, мотивов и целей ребенка, в том числе мотивов учения, мотивов к познанию и творчеству, побуждающих детей к овладению способами познания, творчества, активности в творческой и учебной деятельности;

— *волевое развитие* — развитие инициативы, настойчивости, умения преодолевать трудности, владеть собой, доводить начатое дело до конца, действовать самостоятельно и др.;

— *развитие предметно-практических сфер* — развитие специальных способностей детей — музыкальных, художественных, лидерских, исследовательских и др., а также умения применять их в жизни;

— *развитие экзистенциальной сферы детей* — развитие способностей ребенка управлять своими физическими и психическими состояниями, умения держать их на должном уровне, гармонии чувств и поступков, слова и дела и других умений, позволяющих формировать собственную «Я-концепцию»;

— *развитие сферы саморегуляции* — развитие активного внимания, моторно-слуховой памяти, наблюдательности, умения концентрироваться, а также формирование навыков анализа жизненных ситуаций, обучение навыкам осознанного поведения, самокритичности, рефлексии и др.

Анализ практики деятельности образовательных учреждений указывает на то, что чаще всего встречаются *комплексные образовательные программы дополнительного образования детей*, которые реализует комплексную модель, содержащую цели, содержание, методы обучения, воспитания и развития как триединого процесса (могут быть варианты комплексных двуединых программ, например, учебно-воспитательная, учебно-развивающая). Так, программа «Школы организаторов досуга» направлена на развитие организаторских качеств учащихся и ориентации их на профессию педагога-

организатора; программа «Школы педагогической ориентации» предполагает ориентацию старшеклассников на педагогические профессии через включение их в систему социальных отношений, активную деятельность, формирование социально значимых качеств личности; программа хоровой студии направлена на привитие подросткам музыкальной культуры; программа «Студия народных ремесел» нацелена на духовное развитие детей в процессе освоения народных ремесел и др.

Большим педагогическим потенциалом обладают социально-педагогические программы, реализуемые в дополнительном образовании детей. *Социально-педагогические функции дополнительного образования детей* способствуют реализации образовательных функций, обеспечивают более полное достижение их целей. В соответствии с социально-педагогическими функциями можно внести в классификацию программ дополнительного образования детей программы *социальной поддержки, оздоровления, социальной адаптации, культурно-досуговые программы* и др.

Культурно-досуговые программы направлены на удовлетворение духовных, физических и других социально значимых потребностей детей в их свободное время. Их реализация предполагает создание условий для развития личности ребенка в свободное время через общение: обмен информацией, опытом, знаниями, умениями, навыками, оценками, суждениями, мыслями, результатами деятельности; участие в неформальных общественных процессах и структурах на основе общего интереса; разрядки индивидуальных и групповых напряжений, восстановления, возмещения, уравнивания сил. В содержание культурно-досуговой программы можно включить

— *развлечения* — посещение концертов, спортивных соревнований, представлений, а также путешествия, прогулки, праздники, дающие человеку смену впечатлений и получение дополнительной и информации для общего развития;

— *активный* (занятие физкультурой, слушание музыки) и *пассивный* (расслабление) *отдых*;

— *самообразование* — участие в дискуссиях, деловых играх, экскурсиях и др.;

— *творчество* — создание условий для реализации разнообразных хобби и любительских занятий;

— *общение* — обмен информацией, опытом, знаниями, мыслями, оценками, суждениями, навыками, умениями, результатами деятельности в форме встреч, конференций, фестивалей, игр и др.

Программы профессиональной подготовки направлены на формирование профессионального интереса детей, их профессиональное самоопределение, адаптацию к избранной профессии. Данный вид программ предполагает следующие формы организации: *школы довузовской подготовки* — подготовка школьников к поступлению в высшие учебные заведения; *очнозаочные однопрофильные школы* (математическая, физико-техническая, филологическая и др.) — знакомство детей с разными профессиями, создание условий для социальных проб в разных профессиях; *комплексные школы начальной профессиональной подготовки* (школы юного модельера, журналиста, педагога и др.) — получение начальной профессиональной подготовки по определенной профессии; *школы творческой ориентации* — последовательное знакомство детей с разными видами деятельности с целью выбрать тот, который больше заинтересует ребенка или в котором он проявит лучшие способности.

Программы оздоровления детей направлены на формирование у детей навыков здорового образа жизни, улучшение их физического, психологического, физиологического здоровья. Оздоровление детей в рамках

дополнительного образования детей школы может быть организовано в разных вариантах. Например, в виде:

— *интегрированной программы «Здоровье»*, которая может объединить всех участников образовательного процесса школы и создать условия для оздоровления детей и педагогов или профилактики заболеваний (досуговые программы), восстановления здоровья и поддержания физической формы особо в этом нуждающихся (специальные программы оздоровления) и реализации здоровьесберегающих технологий;

— *программ спортивно-оздоровительные лагеря* — специальные программы, организуемые в каникулярное время для детей с ослабленным здоровьем или для тренировочных сборов спортсменов школы;

— *программ оздоровительных образовательных объединений* — например, школы коррекции осанки, организация групп ОФП, ЛФК и здоровья и др.

Программы социальной поддержки детей направлены на создание условий для социальной, медицинской, правовой, экономической, предметно-практической и другой поддержки ребенка и его семьи, обеспечивают нормальные условия для физического, умственного и духовно-нравственного формирования и развития детей, предотвращения ущемления их прав и человеческого достоинства, обеспечение помощи в приобретении практических умения и навыков, которые помогут ребенку в будущей жизни — личной, профессиональной, семейной. Программы социальной поддержки детей в рамках дополнительного образования детей могут реализоваться в следующих вариантах: программы *правовой поддержки*, направленные на освоение ребенком правовых норм, приобретение опыта в защите своих прав, человеческого достоинства; программы *экономической поддержки*, создающие условия для участия детей в учебно-производственной и внебюджетной деятельности образовательного учреждения, приобретение

знаний и опыта зарабатывания денег; программы *психолого-педагогической поддержки*, направленные на поддержку детей, оказавшихся в особо трудном положении, — инвалидов, сирот, детей из неполных семей и семей повышенного риска; программы *социальной поддержки*, предполагающие помощь ребенку в освоении среды, нахождении вариантов типичных проблем, возникающих в процессе его социального взаимодействия.

К социально-педагогическим программам можно отнести также *программы работы с родителями или семьей*, направленные на решение проблем, возникающих во взаимодействии детей, родителей и педагогов.

Опираясь на складывающуюся практику, также можно выделить виды программ дополнительного образования детей по признаку «общее — профессиональное»:

— *общеразвивающие программы* направлены на решение задач формирования общей культуры ребенка, расширение его знания о мире и о себе, его социального опыта;

— *специализированные (профилированные) программы*, содержащие основы для раскрытия и развития способностей детей, приобретения ими специальных знаний и умений в избранном виде деятельности;

— *профессионально-ориентированные программы*, позволяющие детям ознакомиться с той или иной сферой жизнедеятельности людей, выявить свои личные возможности и определиться в выборе профессии, получить основы знаний и мастерства, в том числе сопряженные с определенными профессионально-квалификационными требованиями.

Можно также выделить виды программ дополнительного образования детей по признаку «достижение результата»:

— *тематические образовательные программы*, направленные на получение воспитательных результатов в определенном проблемном поле и использующие при этом возможности различных видов дополнительного образования детей (например, образовательная программа патриотического воспитания, воспитательная программа толерантности и т. п.);

— *образовательные программы, ориентированные на достижение результатов определенного уровня в рамках ФГОС общего образования нового поколения*: 1 — приобретение социальных знаний, понимания социальной реальности и повседневной жизни; 2 — формирование позитивного отношения к базовым ценностям нашего общества и к социальной реальности в целом; 3 — приобретение опыта самостоятельного социального действия (образовательная программа, обеспечивающая первый уровень результата; образовательная программа, обеспечивающая первый и второй уровни результатов; образовательная программа, обеспечивающая второй и третий уровни результатов). Такие программы могут иметь возрастную привязку, например: для 1-го класса — образовательная программа, ориентированная на приобретение школьником социальных знаний в различных видах деятельности; для 2—3-х классов — образовательная программа, формирующая ценностное отношение к социальной реальности; для 4-го класса — образовательная программа, дающая ученику опыт самостоятельного общественного действия;

— *образовательные программы по конкретным видам дополнительного образования детей* (духовно-нравственная, спортивно-оздоровительная и др.);

— *возрастные образовательные программы* (образовательная программа дополнительного образования детей младших школьников;

образовательная программа дополнительного образования детей-под-
ростков и т. д.);

— *индивидуальные образовательные программы для учащихся.*

Таким образом, мы видим, что в образовательных и социально-педагогических программах дополнительного образования детей имеет место широкая интегративность и вариативность: эта деятельность может протекать как индивидуально, так и коллективно; в ее основе лежит активность личности, направленная на выбор вариантов реализации целей общения, развлечений, отдыха, творчества. Кроме того, реализация дополнительного образования детей предполагает интеграцию с учреждениями дополнительного образования, культуры, спорта и др.

Особое место в реализации программ дополнительного образования детей занимают процессы внутренней (в рамках внутренней среды образовательного учреждения) и внешней (в рамках взаимосвязей образовательного учреждения с внешним окружением) интеграции. Таким образом, выделяются *интегрированные программы дополнительного образования детей*. Самыми яркими примерами программ внутренней интеграции являются сквозные интегрированные программы. Сквозная программа — это форма организации общей деятельности учреждения по одному из актуальных направлений, открытая любому участнику образовательного процесса учреждения, предоставляющая всем дополнительные возможности для развития, профессионального роста, самореализации. Например, интегрированная программа «Одаренные дети» может быть направлена на объединение возможностей педагогических работников образовательного учреждения на адаптацию и психологическую поддержку одаренных детей, оказание помощи педагогам и родителям в постижении феномена одаренности. Программа «Реабилитация» направлена на создание условий для

адаптации и развития детей-инвалидов в разных образовательных объединениях образовательного учреждения.

2.2 Разработка дополнительных образовательных программ

Занятия математического кружка в 10-11-ых классах рассчитаны на 144 часов (2 раза в неделю по 2 часа в течении одного года).

Программа способствует развитию математического мышления, а также эстетическому воспитанию обучающихся, пониманию красоты и изящества математических рассуждений, восприятию геометрических форм. Помимо углубленного изучения школьного курса математики программа направлена на ознакомление с решениями олимпиадных задач разного уровня, на получение начальных знаний высшей математики. Предложенный курс способствует выявлению и развитию математических способностей у обучающихся, позволяет «не упустить» математически одаренных обучающихся, развивает интерес к математике, создает условия для повышения мотивации к обучению математики.

Ниже представлена разработанная дополнительная программа по математике.

Одним из основных принципов обучения математике в дополнительном математическом образовании является обучение через задачи. Минимальность теоретических сведений, разнообразие и широкий спектр задач по различным темам, которые в свою очередь способны влиять на развитие математических способностей учащихся, на развитие творческого потенциала.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дополнительная общеобразовательная (общеразвивающая) программа «Математика» (далее - программа) имеет естественнонаучную **направленность** и предназначена для реализации в системе дополнительного образования.

Данная рабочая программа составлена для обучения математике обучающихся, обладающих высокими интеллектуальными способностями и проявляющими повышенный интерес к математике. Эффективное развитие одаренных детей может быть осуществлено только благодаря дополнительным занятиям, которые должны быть направлены на оказание помощи ребенку в развитии своего творческого потенциала в соответствии с его способностями, склонностями и психофизиологическими особенностями. Именно для таких занятий и предназначена эта учебная программа.

Актуальность. Программа способствует развитию математического мышления, а также эстетическому воспитанию обучающихся, пониманию красоты и изящества математических рассуждений, восприятию геометрических форм. Помимо углубленного изучения школьного курса математики программа направлена на ознакомление с решениями олимпиадных задач разного уровня, на получение начальных знаний высшей математики. Предложенный курс способствует выявлению и развитию математических способностей у обучающихся, позволяет «не упустить» математически одаренных обучающихся, развивает интерес к математике, создает условия для повышения мотивации к обучению математики.

Новизна программы состоит в направленности на подготовку обучающихся к математическим олимпиадам, интеллектуальным конкурсам, решению заданий повышенной сложности, показывает многогранность применения математических знаний в окружающем мире, а также дает возможность обучающимся познакомиться с некоторыми разделами высшей математики.

Педагогическая целесообразность программы состоит в том, чтобы поддерживать интерес к математическим знаниям обучающихся, имеющих способности к изучению предмета, уделять внимание обучающимся, которые хотят овладеть знаниями за пределами школьной программы.

Цель программы – развитие математических способностей, логического мышления через расширение общего кругозора в процессе рассмотрения различных практических, нестандартных задач и обучение нахождению нетрадиционных способов решений задач.

В соответствии с поставленной целью можно выделить следующие **задачи:**

обучающие:

- познакомить учащихся с историей развития и становления математики как науки;
- рассмотреть некоторые методы решения арифметических, логических, комбинаторных, геометрических задач;
- формировать представление о методах и способах решения нестандартных задач и алгебраических уравнений на уровне, превышающем уровень государственных образовательных стандартов;
- систематизировать сведения о числах;
- знакомство с основными идеями и методами решения нестандартных задач;
- формирование продуктивного мышления;

развивающие:

- расширить и совершенствовать алгебраический аппарат, сформированного в предыдущие годы обучения и его применение к решению задач;
- расширение и систематизация общих сведений о функциях, пополнение класса изучаемых функций, иллюстрация широты применения функций для решения уравнений и неравенств, для описания и изучения реальных зависимостей,
- расширение навыков исследовательской работы;

- подготовить школьников к участию в олимпиадах, конкурсах, проектах по предмету;
- развитие логического мышления, алгоритмической культуры, критичности мышления;

воспитательные:

- воспитание средствами математики культуры личности: знакомство с историей развития математики, эволюцией развития математической науки;
- воспитание трудолюбия, терпения, настойчивости, инициативы.

Возраст обучающихся: 15-17 лет. Набор в группы – свободный.

Срок обучения: 1 год (144 часа – 2 раза в неделю по 2 часа).

Формы организации деятельности: коллективные, групповые (малые группы, работа в парах) и индивидуальные (консультации, индивидуальный образовательный маршрут для учащихся, проявляющих особый интерес к математике).

Формы проведения занятий: беседы, лекции, самостоятельная работа, практическая работа, научно-исследовательская деятельность, предполагающая выполнение учащимися исследовательских заданий; посещение выставок, учебных заведений, предприятий; встречи с преподавателями и студентами вузов, сочетание различных форм учебных занятий. Структура учебных занятий проводится по гибкому планированию, т.е. предполагается введение динамических пауз в зависимости от утомляемости и работоспособности учащихся, изменения структурных элементов занятий и т.д.

Методы обучения, в основе которых лежит способ организации занятия: словесные, наглядные, практические.

Методы, в которых лежит уровень деятельности детей: объяснительно-иллюстративные, репродуктивные, частично-поисковые.

Ожидаемые результаты.

В результате изучения данного курса ученик должен:

знать/понимать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира;
- систематизировать полученные знания;
- применять различные методы при решении нестандартных задач;
- конструктивно оперировать математическими понятиями и терминами.

уметь/владеть:

- решать комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием формул;
- вычислять вероятность событий на основе подсчета числа исходов;
- решать задачи на принцип Дирихле
- доказывать утверждения на обобщенный принцип Дирихле.
- выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня, степени с рациональным показателем;
- применять понятия связанные с делимостью целых чисел;

- находить корни многочленов с одной переменной, раскладывать многочлены на множители;
- проводить преобразования числовых и буквенных выражений, включающих степени.
- изображать геометрические фигуры и тела, выполнять чертеж по условию задачи;
- решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства фигур, применяя алгебраический и тригонометрический аппарат;
- проводить доказательные рассуждения при решении задач.

Образовательная деятельность учащихся заключается не только в обучении определенным знаниям, умениям и навыкам, но и в развитии и совершенствовании **универсальных действий**:

- **познавательные:**

- уметь осуществлять самоконтроль, самооценку и самокоррекцию практической деятельности;
- осуществлять поиск необходимой информации для выполнения заданий,
- применять метод информационного поиска, в том числе с помощью компьютерных средств

- **коммуникативные:**

- формулировать собственное мнение и позицию;
- уметь учитывать разные мнения и стремиться к координации различных позиций в сотрудничестве;
- разрешать конфликты, принимать решения;
- уметь планировать совместную работу в группе, определять цели, функции участников, способы взаимодействия

- **регулятивные:**

- умение планировать, организовывать и контролировать свои действия;
- учитывать выделенные педагогом ориентиры действия в новом учебном материале в сотрудничестве с педагогом;

- адекватно воспринимать предложения и оценку педагога, товарищей, родителей и других людей;

- **личностные:**

- уметь оценивать ситуации и поступки;
- уметь соотносить поступки и события с принятыми этическими нормами;
- знать основные моральные нормы и ориентация на их выполнение;
- уметь соотносить поступки и события с принятыми этическими принципами.

В результате освоения программы предполагается овладение учащимися следующими **компетенциями**: когнитивная, информационная, коммуникативная; социальная; креативная; ценностно-смысловая; личностного самосовершенствования.

Таблица 3

Компетенция	Образовательный результат
Когнитивная	Готовность к самостоятельной познавательной деятельности, умение использовать имеющиеся знания, организовывать и корректировать свою деятельность
Информационная	Умение работать с информацией различных источников, отбирать и систематизировать её, оценивать её значимость
Коммуникативная	Умение вести диалог, сдерживать негативные эмоции, представлять и корректно отстаивать свою точку зрения, проявлять активность в обсуждении вопросов.
Социальная	Способность использовать потенциал социальной среды для собственного развития, проявлять активность к социальной адаптации в обществе и самостоятельному самоопределению.
Креативная	Способность мыслить нестандартно, умение реализовывать собственные творческие идеи, осваивать самостоятельные формы работы.
Ценностно-смысловая	Готовность видеть и понимать окружающий мир, ориентироваться в нём, осознавать свою

	роль и предназначение, уметь выбирать целевые и смысловые установки для своих действий и поступков.
Личностного самосовершенствования	Готовность осуществлять физическое, духовное и интеллектуальное саморазвитие, эмоциональную саморегуляцию и самоподдержку.

Способы определения результативности

Для изучения эффективности освоения содержания программы применяются различные формы и методы контроля.

Методы диагностики успешности овладения учащимися содержанием программы: педагогическое наблюдение; педагогический анализ результатов заданий, участия учащихся в олимпиадах и интеллектуальных конкурсах, защиты проектов.

Формы подведения итогов по темам и разделам программы:

- 1) Зачёт, экзамен по билетам
- 2) Тестирование по индивидуальным тестам
- 3) Тестирование по одному варианту
- 4) Контрольная работа по вариантам
- 5) Зачёт-беседа по материалам курса
- 6) Устный опрос
- 7) Опрос с помощью ПК (тест с выбором ответа)
- 8) Реферат (исследовательская работа)
- 9) Творческое задание (изготовление пособий, карточек)
- 10) Смотр знаний, конкурс, игра, олимпиада, викторина.

Таблица 4

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п/п	Тема	Всего часов	В том числе	
			Теоретически	Практических
1.	Вводное занятие.	2	2	-
2	Функции и их графики	14	6	8
3	Четность	12	6	6
4	Делимость и остатки	16	6	10
5	Принцип Дирихле	16	6	10
6	Индукция	20	8	12
7	Теория многочленов и уравнения высших степеней	16	6	10
8	Уравнения, неравенства и системы уравнений с параметрами	16	6	10
9	Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	16	6	10
10	Неравенство треугольника. Построение и исследование геометрических фигур	16	6	10
	Итого	144	58	86

Количество часов в неделю 4, в год 144

Календарно тематическое планирование.

Таблица 5

№ урока	Содержание материала	Часы учебного времени	Плановые сроки прохождения	Фактические сроки прохождения	Форма занятия	Примечание
1	Вводное занятие.	2			беседа	
2	Функции и их графики	2			лекция	
5	Функции и их графики	12			практическое	
17	Четность	2			лекция	
18	Четность	1			лекция	
19	Четность	10			практическое	
29	Делимость и остатки	2			лекция	
31	Делимость и остатки	14			практическое	
45	Принцип Дирихле	2			лекция	
47	Принцип Дирихле	14			практическое	

61	Индукция	2			лекция	
63	Индукция	18			практическое	
80	Теория многочленов и уравнения высших степеней	17			практическое	
97	Уравнения, неравенства и системы уравнений с параметрами	2			лекция	
99	Уравнения, неравенства и системы уравнений с параметрами	15			практическое	
114	Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	2			лекция	
116	Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	14			практическое	
133	Неравенство треугольника. Построение и исследование геометрических фигур	2			лекция	
135	Неравенство треугольника. Построение и исследование геометрических фигур	14			практическое	

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Раздел 1. Вводное занятие

Теория: порядок и содержание работы объединения на учебный год. Обсуждение плана работы объединения на новый учебный год. Правила поведения во время обучения. Распределение заданий (общественных поручений) среди обучающихся.

Раздел 2. Функции и их графики.

Теория: Понятие функции. Способы задания функций. Элементарные функции и их графики. Исследование функций и построение их графиков. Основные способы преобразования графиков функций. Графики функций, содержащих модули. Сложные функции и их графики.

Практика: Решение квадратных неравенств с помощью графика квадратичной функции. Построение графиков функций, знание различных способов ее задания и умение устанавливать соответствие между ними, использование свойств функций при решении задач.

Раздел № 3. Четность.

Теория: Понятие четности. Чередование направлений вращения, чередование клеток шахматной доски. Разбиение на пары: возможность разбиения на пары; четное и нечетное число пар при разбиении, их свойства. Четность и нечетность суммы и разности, произведения и частного.

Практика: Решение олимпиадных задач на четность.

Раздел № 4. Делимость и остатки.

Теория: Простые и составные числа. Основная теорема арифметики. Остатки от деления. Перебор возможных остатков. Свойства остатков. Свойства делимости. Алгоритм Евклида.

Практика: Решение линейных уравнений с двумя переменными в целых числах: метод перебора, метод остатков, метод выделения целой части.

Раздел № 5. Принцип Дирихле.

Теория: Формулировка принципа Дирихле, доказательство принципа методом от противного.

Практика: Решение задач с помощью принципа Дирихле.

Раздел № 6. Индукция

Теория: Процесс и метод индукции. Метод математической индукции. Игра «Ханойская башня». Алгоритм решения задачи методом математической индукции. Метод математической индукции и догадка по аналогии.

Практика: Классические задачи, решаемые методом математической индукции.

Раздел № 7. Теория многочленов и уравнения высших степеней

Теория: Понятие многочлена. Действия с многочленами. Метод неопределенных коэффициентов. Теорема Безу. Схема Горнера. Уравнения высших степеней и методы их решения.

Практика: Решение нестандартных математических задач с целыми числами – восстановление знаков действий и цифр натурального числа, перестановка и зачеркивание цифр в натуральном числе, представление целых чисел в некоторой форме. Решение нестандартных алгебраических задач – делимость многочленов, условные тождества, последовательности и прогрессии.

Раздел № 8. Уравнения, неравенства и системы уравнений с параметрами.

Теория: Рациональные уравнения с параметрами. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами и способы решений. Системы неравенств с параметрами. Графический метод решения уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств с параметрами.

Практика: Решение уравнений, неравенств и систем уравнений различного вида. Решение олимпиадных задач.

Раздел № 9. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

Теория: Решение комбинаторных задач на перестановки, размещения, сочетания. Решение статистических задач – нахождение моды, медианы,

среднего арифметического, размаха; составление таблиц и диаграмм. Формула полной вероятности. Формула Бейеса. Формула Бернулли. Случайная величина. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Решение задач на применение формул. Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Способы отбора. Полигон и гистограмма.

Практика: Решение задач по теории вероятностей – теорема сложения вероятностей, условная вероятность, независимость событий, теорема умножения вероятностей.

Раздел № 10. Неравенство треугольника. Построение и исследование геометрических фигур.

Теория: Замечательные точки и линии в треугольниках. Применение подобия треугольников к решению задач. Метрические соотношения в треугольнике и круге. Геометрические преобразования – применения движений, самосовмещения, применение подобия и гомотетии, инверсия. Неравенство треугольника и его применение – геометрические неравенства, доказываемые применением неравенства треугольника; неравенство треугольника и геометрические преобразования; симметрия и неравенство треугольника; дополнительные построения как способ доказательства геометрического неравенства; основные принципы применения неравенства треугольника.

Практика: Задачи на доказательство: доказательства равенства треугольников по исходным данным, доказательства на равенства или отношения расстояний. Задачи на построение: наименьшее и наибольшее расстояния, равноудаленность от заданной точки, построение равнобедренных и прямоугольных треугольников.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Для проведения занятий с одаренными детьми по математике рекомендуется использовать:

- Современные педагогические технологии.

- Материал по истории математики, дидактический материал для проведения занятий.
- Проведение викторин, конкурсов, олимпиад.

Каждое занятие планируется с учетом гармоничного сочетания теории и практики. С учетом цели занятия используются современные методики на основе развивающей и личностно-ориентированной моделей обучения.

- Используемые технологии развивающей модели обучения:

Проблемно-поисковая технология используется при изучении нового материала и решении практических задач.

Технологию групповой творческой деятельности (мозговой штурм) использую на занятиях с одаренными детьми. При помощи этой технологии можно проводить математический бой, а так же разработку и выпуск стенгазеты по математике.

Технология исследовательского обучения используется при решении практических задач по геометрии (задачи на разрезание, на построение).

Коммуникативно-диалоговая технология, как организация различного вида дискуссий, широко используется не только на уроках основного курса, но и на уроках предпрофильного курса. Именно на уроках предпрофильного курса, где отсутствует традиционная индивидуальная оценка ученика, формирование мировоззренческих позиций идет в процессе общения.

- Используемые технологии личностно-ориентированного обучения:

Технология модульного обучения.

Технология дифференцированного обучения используется при работе на занятиях с одаренными детьми для создания индивидуальных образовательных траекторий учащихся с разным уровнем познавательных способностей.

Информационные технологии используются при подготовке и проведении Интернет-олимпиад по математике.

Литература

• **для педагога:**

1. Альхова З. Н., Макеева А. В. Внеклассная работа по математике. – Саратов: «Лицей», 2008.
2. Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. - М.: Просвещение, 2003.
3. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка). Издание 2-е, испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2004.
4. Рязановский А. Р., Зайцев Е. А. Математика. 5 – 11 кл.: Дополнительные материалы к уроку математики. – М.: Дрофа, 2009.
5. Фарков А. «Математические кружки в школе. 5-8 классы», М «Айрис-Пресс», 2008.
6. Шейнина О. «Занятия школьного кружка по математике. 5-6 класс», М «НЦ ЭНАС», 2010.

• **для обучающихся:**

1. А. Фарков «Математические олимпиады. 5-11 класс.», М «Экзамен», 2011.
2. И.В.Ященко «Приглашение на математический праздник». М., МЦНПО, 2010.
3. И.Я. Демман, Н.Я. Виленкин. «За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5 – 6 классов сред школ. – М.: «Просвещение», 2009.
4. Перельман, Я. И. Живая математика / Я. И. Перельман. — М. : АСТ , 2009.
5. Перельман, Я. И. Занимательная арифметика / Я. И. Перельман. — М.: Центрполиграф , 2010.
6. «Все задачи "Кенгуру"», С-П.,2015.
7. Газета «Математика» «Первое сентября».

2.3.Описание и анализ опытно-экспериментальной работы

В рамках выпускной квалификационной работы был разработан и апробирован курс занятий кружка для 10-11ых классов средней школы.

Опытно-экспериментальная работа осуществлялась в 10-ых классах МОУ СОШ № 30 г. Красноярска на занятиях математического кружка.

В МОУ СОШ № 30 г. Кирова был проведен полностью курс кружковых занятий в 10-ых классах, а курс занятий для 11 класса должен быть проведен в следующем учебном году в этих же классах.

Кружок проводился в 10а, 10б, 10в классах. Дети собраны (14 человек) и приходили после уроков в 14³⁰ на один урок. На занятиях работала поощрительная система – система жетончиков. После того как были собраны 10 жетончиков они обменивались на пятерку. Занятия велись с сентября по данной схеме.

В третьей четверти было проведено 10 занятий (приложение 1) математического кружка, *цель* которых была в формировании и развитии познавательного интереса, мотивации к изучению математики, логического мышления, математического языка.

Задачи курса кружковых занятий в системе дополнительного математического образования:

- расширение и систематизация общих сведений о функциях, пополнение класса изучаемых функций, иллюстрация широты применения функций для решения уравнений и неравенств, для описания и изучения реальных зависимостей,
- расширение навыков исследовательской работы;
- подготовить школьников к участию в олимпиадах, конкурсах, проектах по предмету;
- развитие логического мышления, алгоритмической культуры, критичности мышления;

Анализ результатов опытно-экспериментальной работы

Для проверки гипотетических положений была использована методика для проверки уровня математических способностей учащихся, т.е. были проведены тесты Айзенка [1] в начале эксперимента (в сентябре) и в конце (в мае). Методика проводилась на одной и той же группе учащихся, которая принимала участие в кружковых занятиях по математике.

Тесты состояли из 25 вопросов каждый. На выполнение теста отводилось 20 минут, после чего бланки тестов собирались. Результаты тестирования представлены в таблице.

Таблица 6

№ п/п	Фамилия Имя	Кол-во правильных ответов тест №1	Кол-во правильных ответов тест №2	Знак
1	Агарков Евгений	12	19	+
2	Владимирова Анна	12	15	+
3	Власов Алексей	7	13	+
4	Воропаев Дмитрий	9	16	+
5	Домнин Павел	8	14	+
6	Исаков Сергей	10	14	+
7	Караваева Дарья	11	16	+
8	Кошкин Олег	9	14	+
9	Кошечев Олег	8	17	+
10	Кропачева Елена	8	16	+
11	Лопатин Андрей	11	18	+
12	Перминов Александр	12	18	+
13	Тараканова Юлия	5	10	+
14	Щелчков Роман	10	13	+
Всего				14
+				14
-				0

Обработку и анализ результатов опытно-экспериментальной работы проведем по следующей схеме. Сначала сравним средние результаты изучаемого параметра – уровень математических способностей по каждому из двадцати пяти заданий в начале и конце эксперимента. Используя критерий знаков, выявим влияние применяемой методики на формирование математических способностей школьников.

Представим наглядно результаты опытно-экспериментальной работы (рисунок 1)

Диаграмма дает наглядную иллюстрацию того, что практически в каждом из двадцатипяти заданий наблюдается рост показателей. Это говорит о том, что работа со школьниками в ходе опытно-экспериментальной работы в среднем повысила показатели изучаемого параметра.

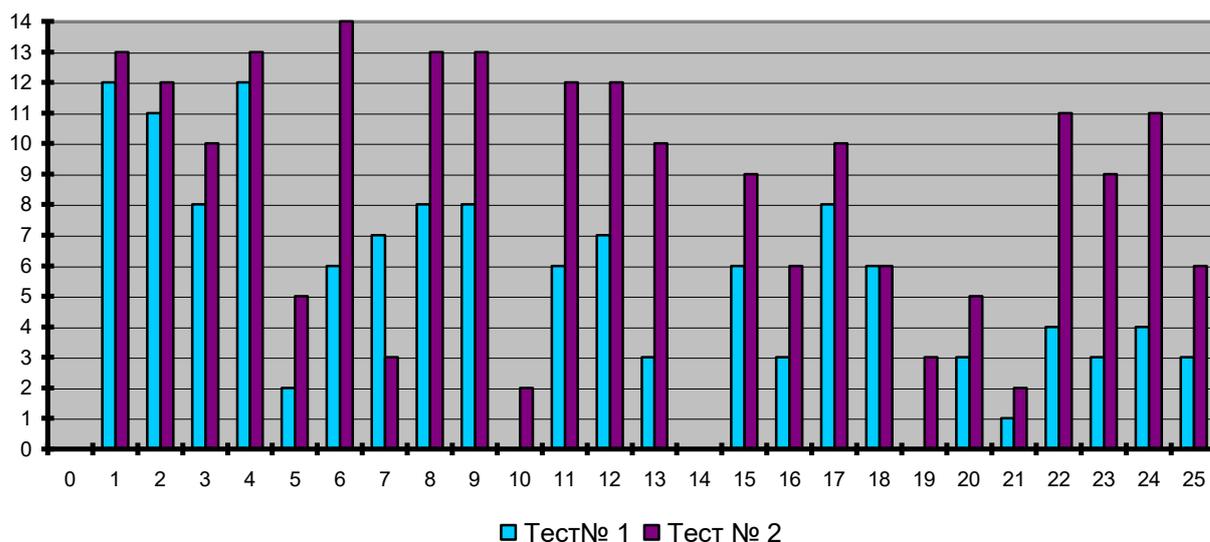


Рисунок 1 Результаты оценки параметра «математические способности» в заданиях в начале (тест 1) и конце эксперимента (тест 2)

Определим характер изменения показателей экспериментальной группы, применив критерий знаков и проанализировав суммарный балл по изучаемому параметру. Сформулируем нулевую гипотезу H_0 : «предлагаемая методика не способствует улучшению параметра – уровень математических способностей». Тогда конкурирующая гипотеза H_1 будет определяться следующим образом: «предлагаемая методика способствует улучшению параметра – уровень математических способностей».

По данным таблицы для параметра «уровень математических способностей» получаем общее количество ненулевых разностей $n=14$, значение экспериментальной статистики $T_{наб}=14$ (число знаков «+»). При уровне значимости $\alpha = 0,05$ критическое значение статистики $T_{табл}=14$. Таким образом, $T_{наб} \geq T_{табл}$ и нулевая гипотеза отклоняется и принимается

конкурирующая гипотеза H_1 : «предлагаемая методика способствует улучшению параметра – уровень математических способностей».

Дадим наглядную иллюстрацию результатов оценки уровня математических способностей:

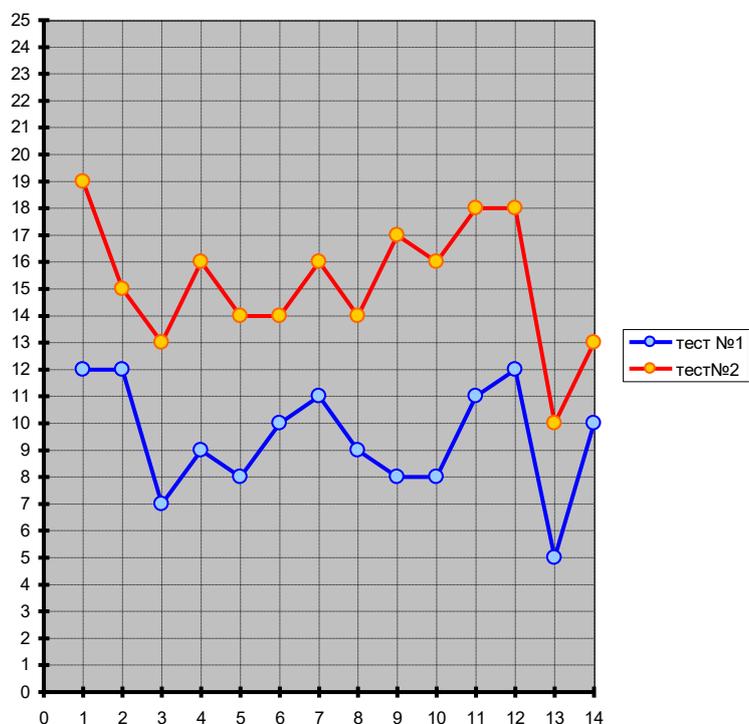


Рисунок 2 Результаты оценки изучаемого параметра в начале (тест № 1) и в конце эксперимента (тест № 2)

Диаграмма дает наглядную иллюстрацию того, что рост изучаемого параметра присутствует довольно ощутимо. До эксперимента показатели были ниже среднего, но после эксперимента они стали выше среднего.

Таким образом, анализ результатов исследования определяет различия в сторону повышения результатов уровня математических способностей учащихся экспериментальной группы после эксперимента.

Выводы по главе 2

1. В выпускной квалификационной работе разработана программа дополнительных образовательных программ в соответствии с данными методическими рекомендациями по организации и содержанию

дополнительного математического образования в 10-11-ых классах средней школы.

2. Для каждого занятия подобрана система задач, направленная на развитие логического мышления, математических и творческих способностей, внимания и воображения

3. Результаты опытно-экспериментальной работы подтвердили эффективность предложенной методики в повышении уровня математических способностей школьников.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были изучены требования федерального государственного образовательного стандарта для дополнительных образовательных программ .

Были рассмотрены подходы к проектированию дополнительных образовательных программ по математике.

Мы разработали дополнительные образовательные программы по математике. Также нами подобран комплекс задач с уклоном на проектную деятельность. В задачах используется профессиональная лексика, даны необходимые определения и справочный материал.

При проведении дополнительных занятий по математике был сделан вывод о том, что уровень результатов школьников возрос, также увеличился уровень мотивации учащихся.

Проведенное нами исследование и полученные результаты позволяют утверждать, что поставленная цель и задачи магистерской диссертации были достигнуты. Гипотеза была подтверждена частично; для более полного подтверждения необходимо продолжить дальнейшую экспериментальную работу. Проводить дополнительные занятия по математике необходимо и целесообразно.

Перспективы дальнейшего исследования данной проблемы видятся в усовершенствовании дополнительных образовательных программ по математике, в том числе на основе использования цифровых образовательных ресурсов и компьютерных сред.

Библиографический список

1. Айзенк, Г. Новые IQ тесты [Текст] / Г. Айзенк. – М.: Эксмо, 2003. – 192 с.
2. Альхова, З. Н. Внеклассная работа по математике [Текст] / З. Н. Альхова,

- А. В. Макеева. – Саратов: Лицей, 2001. – 288 с.
3. Афанасьев, С. П. Сто отрядных дел [Текст] / С. П. Афанасьев, С. В. Коморин. – Кострома: МЦ Вариант, 2000. – 112 с.
 4. Балк, М. Б. Организация и содержание внеклассных занятий по математике [Текст] / М. Б. Балк. – М.: ГУПИ МП РСФСР, 1956. – 248 с.
 5. Блохина, А. Г. Методы быстрого устного счета [Электронный ресурс] / А. Г. Блохина. – Режим доступа: <http://www.kata-log.ru/education/metody-bystrogo-ustnogo-scheta.html>.
 6. Галкин, Е. В. Нестандартные задачи по математике: задачи с целыми числами [Текст] / Е. В. Галкин. – Челябинск: Взгляд, 2005. – 271 с.
 7. Гарднер, М. Математические головоломки и развлечения [Текст] / М. Гарднер. – М.: Мир, 1999. – 447 с.
 8. Генкин, С. А. Ленинградские математические кружки [Текст] / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. – Киров: АСА, 1994. – 272 с.
 9. Горев, П. М. Журнал математического кружка как средство развития творческих способностей школьников [Текст] / П. М. Горев // Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России: тезисы докладов III Всероссийской научной конференции. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. – С. 68.
 10. Горев, П. М. Материалы к проведению школьной олимпиады по математике в 5-9 классах [Текст] / П. М. Горев. – Киров, 2000. – 8 с.
 11. Горев, П. М. Об организации системы дополнительного математического образования в средней школе [Текст] / П. М. Горев // Вопросы технологии в обучении математике: материалы региональной научно-практической конференции «Преподавание математики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики». – Глазов: Изд-во Глазов. гос. пед. ин-та, 2003. – С. 36-39.
 12. Горев, П. М. Система внеклассной работы по математике в средней школе № 21 города Кирова [Текст] / П. М. Горев // Российские регионы:

- проблемы, суждения, поиск путей развития: тезисы IV межрегиональной научно-практической конференции. – Киров: ВСЭИ, 2001. – С. 174.
13. Детская энциклопедия. Том 2. Мир небесных тел. Числа и фигуры [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.childrenpedia.org/2/contents4.html>.
 14. Дьюдени, Г. Э. 200 знаменитых головоломок мира [Текст] / Г. Э. Дьюдени, пер. с англ. Ю. Н. Сударева. – М.: АСТ, 1999. – 352 с.
 15. Екимова, М. А. Задачи на разрезание [Текст] / М. А. Екимова, Г. П. Кукин. – М.: МЦНМО, 2002. – 120 с.
 16. Задачи [Электронный ресурс] // Режим доступа: <http://www.problems.ru>.
 17. Задачи на смекалку [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://mat-of-all.narod.ru/zadachi.htm>.
 18. Задачи со спичками [Электронный ресурс] // Режим доступа: <http://www.nazva.net/rubric/17>.
 19. Зайцева, И. А. Персональный сайт учителя математики и информатики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.zaitseva-irina.ru/html/f1148360210.html>.
 20. Зильберберг, Н. И. Приобщение к математическому творчеству [Текст] / Н. И. Зильберберг. – Уфа: Башкирское книжное изд-во, 1988. – 96 с.
 21. История появления и развития чисел [Электронный ресурс] // Режим доступа: <http://www.chisla.net.ru/sto.php>.
 22. Кабинет арифметики [Электронный ресурс] // режим доступа: <http://www.arifmantica.narod.ru/p38.htm>.
 23. Канель-Белов, А. Я. Как решают нестандартные задачи [Текст] / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи; под ред. В. О. Бугаенко. – М.: МЦНМО, 2004. – 96 с.
 24. Клуб учителей начальной школы [Электронный ресурс] // Режим доступа: <http://www.4stupeni.ru/stady/olimp/5360-chislovye-rebusy.html>.
 25. Козлова, Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) [Текст] / Е. Г. Козлова. – М.: МЦНМО, 2004. – 165 с.

26. Комбинаторика [Электронный ресурс] // Режим доступа: <http://e-lib.gasu.ru/eposobia/deev/kombina.htm>.
27. Крымова, Л. Н. Метод проектов в обучении математике [Текст] / Л. Н. Крымова // Математика в школе. – 2006. – № 4. – С. 62-68.
28. Логические задачи и головоломки. Логика и рассуждения [Электронный ресурс] // Режим доступа: http://www.smekalka.pp.ru/math_logic.html.
29. Логические задачи и головоломки. Задачи на взвешивания и переливания [Электронный ресурс] // Режим доступа: <http://www.smekalka.pp.ru/weight.html>.
30. Малый мехмат МГУ [Электронный ресурс] // Режим доступа: <http://mmmf.math.msu.su/archive/20052006/z5/17.html>.
31. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования [Текст] / Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина, М. В. Моисеева, А. Е. Петров; под ред. Е. С. Полат. – М.: Академия, 2003. – 272 с.
32. Перелыгина, О. Н. Внеклассная работа по математике [Текст]: дисс. ... канд. пед. наук / О. Н. Перелыгина. – Улан-Удэ, 2007. – 31 с.
33. Петраков, И. С. Математические кружки в 8-10 классах [Текст]: кн. для учителя / И. С. Петраков. – М.: Просвещение, 1987. – 224 с.
34. Саженина, Е. С. Учимся решать логические задачи [Электронный ресурс] / Е. С. Саженина. – Режим доступа: <http://logika.vobrazovanie.ru/index.php?link=pereliv.html&&a=0>.
35. Случайное событие и его вероятность [Электронный ресурс]: реферат // Режим доступа: <http://www.bestreferat.ru/referat-88647.html>.
36. Сергеев, И. С. Как организовать проектную деятельность учащихся [Текст]: практическое пособие для работников общеобразоват. учреждений / И. С. Сергеев. – М.: АРКТИ, 2005. – 80 с.
37. Серебровская, Е. К. Опыт внеклассной работы по математике в 5-7 классах [Текст]: пособие для учителей / Е. К. Серебровская. – М.: ГУПИ МП РСФСР, 1954. – 143 с.

38. Спивак, А. В. Математический кружок. 6-7 классы [Текст] / А. В. Спивак. – М.: Посад, 2003. – 128 с.
39. Теория вероятностей [Электронный ресурс] // Режим доступа: http://www.erudition.ru/referat/ref/id.24255_1.html.
40. Умники и умницы: заочная школа для учащихся 5 классов [Электронный ресурс] // Режим доступа: <http://www.aleks-umniki.narod.ru/p76aa1.html>.
41. Хинчин, А. Я. О воспитательном эффекте уроков математики [Текст] / А. Я. Хинчин // Повышение эффективности обучения математике в школе / Сост. Г. Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1989. – С. 18-37.
42. Центр дистанционного образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.elitarium.ru/2004/07/22/istorija_vozniknovenija_kriptografii.html.
43. Шклярский, Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики [Текст] / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. – М.: Наука, 1954. – 267 с.
44. XIX Международная конференция по народному образованию 1956 Рекомендация «Обучение математике в средней школе» [Электронный ресурс]. URL: <http://www.math.ru/conc/olddocs/1968-unesco.htm> (дата обращения 08.06.2018).
45. Буйлова Л. Н. Современные подходы к разработке дополнительных общеобразовательных общеразвивающих программ // Молодой учёный. — 2015. — №15. — С. 567-572.
46. Буйлова Л. Н. Технология разработки и экспертизы дополнительных общеобразовательных программ и рабочих программ курсов внеурочной деятельности // Методическое пособие. – 2015. – С. 6-100.
47. Буйлова Л. Н. Методические рекомендации по разработке и оценке качества дополнительных общеобразовательных общеразвивающих программ // Методическое пособие. – 2016. – С. 4-36.
48. Воронина Е.А. Проектирование дополнительных общеразвивающих программ в современном нормативном правовом поле // Информационно-

методический и научно-педагогический журнал. – 2015. – Интернет-журнал "Источник".

49.Писарев А.Е. Как организовать аттестацию учащихся в детском объединении учреждения дополнительного образования//Методическое пособие. – 2012. – С. 4-7

50.Концепция развития математического образования, утвержденная распоряжением Правительства Российской Федерации № 2506-р от 24 декабря 2013 года;

Приложение

План-конспекта занятий

«Уравнения и неравенства спараметрами»

Если в уравнении или неравенстве некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются *параметрами*, а само уравнение или неравенство *параметрическим*.

Для того, чтобы решить уравнение или неравенство с параметрами необходимо:

1. Выделить особое значение - это то значение параметра, в котором или при переходе через которое меняется решение уравнения или неравенства.
2. Определить допустимые значения – это значения параметра, при которых уравнение или неравенство имеет смысл.

Решить уравнение или неравенство с параметрами означает:

- 1) определить, при каких значениях параметров существуют решения;
- 2) для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующее множество решений.

Решить уравнение с параметром можно следующими методами: аналитическим или графическим.

Аналитический метод предполагает задачу исследования уравнения рассмотрением нескольких случаев, ни один из которых нельзя упустить.

Решение уравнения и неравенства с параметрами каждого вида аналитическим методом предполагает подробный анализ ситуации и последовательное исследование, в ходе которого возникает необходимость **«аккуратного обращения»** с параметром.

Графический метод предполагает построение графика уравнения, по которому можно определить, как влияет соответственно, на решение уравнения изменение параметра. График подчас позволяет аналитически сформулировать необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи. Графический метод решения особенно эффективен тогда, когда нужно установить, сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра и обладает несомненным преимуществом увидеть это наглядно.

§ 1. Линейные уравнения и неравенства

Линейное уравнение $ax=b$, записанное в общем виде, можно рассматривать как уравнение с параметрами, где x – неизвестное, a, b – параметры. Для этого уравнения особым или контрольным значением параметра является то, при котором обращается в нуль коэффициент при неизвестном.

При решении линейного уравнения с параметром рассматриваются случаи, когда параметр равен своему особому значению и отличен от него.

Особым значением параметра a является значение $a=0$.

1. Если $a \neq 0$, то при любой паре параметров a и b оно имеет единственное

$$\text{решение } x = \frac{b}{a}.$$

2. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид: $0x = b$. В этом случае значение $b = 0$ является особым значением параметра b .

При $b \neq 0$ уравнение решений не имеет.

При $b = 0$ уравнение примет вид: $0x = 0$. Решением данного уравнения является любое действительное число.

Неравенства вида $ax > b$ и $ax < b$ ($a \neq 0$) называются линейными неравенствами. Множество решений неравенства $ax > b$ – промежуток

$(\frac{b}{a}; +\infty)$, если $a > 0$, и $(-\infty; \frac{b}{a})$, если $a < 0$. Аналогично для неравенства

$ax < b$ множество решений – промежуток $(-\infty; \frac{b}{a})$, если $a > 0$, и $(\frac{b}{a}; +\infty)$,

если $a < 0$.

Пример 1. Решить уравнение $ax = 5$

Решение. Это линейное уравнение.

Если $a = 0$, то уравнение $0x = 5$ решения не имеет.

Если $a \neq 0$, $x = \frac{5}{a}$ – решение уравнения.

Ответ: при $a \neq 0$, $x = \frac{5}{a}$

при $a = 0$ решения нет.

Пример 2. Решить уравнение $ax - 6 = 2a - 3x$.

Решение. Это линейное уравнение, $ax - 6 = 2a - 3x$ (1)

$$ax + 3x = 2a + 6$$

Перепишав уравнение в виде $(a+3)x = 2(a+3)$, рассмотрим два случая:

$$a = -3 \text{ и } a \neq -3.$$

Если $a = -3$, то любое действительное число x является корнем уравнения (1).

Если же $a \neq -3$, уравнение (1) имеет единственный корень $x = 2$.

Ответ: При $a = -3$, $x \in \mathbb{R}$; при $a \neq -3$, $x = 2$.

Пример 3. При каких значениях параметра a среди корней уравнения

$2ax - 4x - a^2 + 4a - 4 = 0$ есть корни больше 1?

Решение. Решим уравнение $2ax - 4x - a^2 + 4a - 4 = 0$ – линейное уравнение

$$2(a - 2)x = a^2 - 4a + 4$$

$$2(a - 2)x = (a - 2)^2$$

При $a = 2$ решением уравнения $0x = 0$ будет любое число, в том числе и большее 1.

При $a \neq 2$ $x = \frac{a-2}{2}$. По условию $x > 1$, то есть $\frac{a-2}{2} > 1$, $a > 4$.

Ответ: При $a \in \{2\} \cup (4; \infty)$.

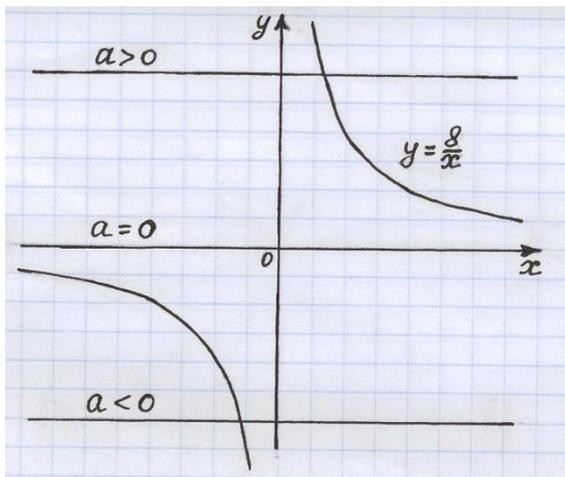
Пример 4. Для каждого значения параметра a найти количество корней уравнения $ax = 8$.

Решение. $ax = 8$ – линейное уравнение.

$$a = \frac{8}{x},$$

$y = a$ – семейство горизонтальных прямых;

$y = \frac{8}{x}$ - графиком является гипербола. Построим графики этих функций.



Ответ: Если $a = 0$, то уравнение решений не имеет. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет одно решение.

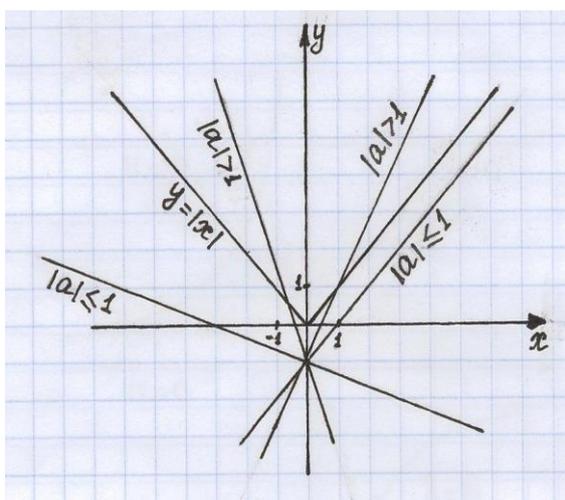
Пример 5. С помощью графиков выяснить, сколько корней имеет уравнение:

$$|x| = ax - 1.$$

$$y = |x|,$$

$y = ax - 1$ – графиком является прямая, проходящая через точку $(0; -1)$.

Построим графики этих функций.



Ответ: При $|a| > 1$ - один корень
при $|a| \leq 1$ – уравнение корней не имеет.

Пример 6. Решить неравенство $ax + 4 > 2x + a^2$

Решение. $ax + 4 > 2x + a^2$ $(a - 2)x > a^2 - 4$. Рассмотрим три случая.

1. $a = 2$. Неравенство $0x > 0$ решений не имеет.

2. $a > 2$. $(a - 2)x > (a - 2)(a + 2)$ $x > a + 2$

3. $a < 2$. $(a - 2)x > (a - 2)(a + 2)$ $x < a + 2$

Ответ. $x > a + 2$ при $a > 2$; $x < a + 2$, при $a < 2$; при $a = 2$ решений нет.

§ 2. Квадратные уравнения и неравенства

Квадратное уравнение – это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, a, b, c – параметры.

Для решения квадратных уравнений с параметром можно использовать стандартные способы решения на применение следующих формул:

1) дискриминанта квадратного уравнения: $D = b^2 - 4ac$, $(\frac{D}{4} = k^2 - ac)$

2) формул корней квадратного уравнения: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$,

$$(x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a})$$

Квадратными называются неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad (1), (2)$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad (3), (4)$$

Множество решений неравенства (3) получается объединением множеств решений неравенства (1) и уравнения, $ax^2 + bx + c = 0$. Аналогично находится множество решений неравенства (4).

Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ меньше нуля, то при $a > 0$ трехчлен положителен при всех $x \in \mathbb{R}$.

Если квадратный трехчлен имеет корни $(x_1 < x_2)$, то при $a > 0$ он положителен на множестве $(-\infty; x_2) \cup (x_1; +\infty)$ и отрицателен на интервале

$(x_1; x_2)$. Если $a < 0$, то трехчлен положителен на интервале $(x_1; x_2)$ и отрицателен при всех $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Пример 1. Решить уравнение $ax^2 - 2(a-1)x - 4 = 0$.

Это квадратное уравнение

Решение. Особое значение $a = 0$.

1. При $a = 0$ получим линейное уравнение $2x - 4 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = 2$.

2. При $a \neq 0$. Найдем дискриминант.

$$D = (a-1)^2 + 4a = (a+1)^2$$

Если $a = -1$, то $D = 0$ – один корень.

Найдем корень, подставив вместо $a = -1$.

$-x^2 + 4x - 4 = 0$, то есть $x^2 - 4x + 4 = 0$, находим, что $x = 2$.

Если $a \neq -1$, то $D > 0$. По формуле корней получим: $x = \frac{(a-1) \pm (a+1)}{a}$;

$$x_1 = 2, x_2 = -\frac{2}{a}.$$

Ответ: При $a = 0$ и $a = -1$ уравнение имеет один корень $x = 2$; при $a \neq 0$ и

$a \neq -1$ уравнение имеет два корня $x_1 = 2, x_2 = -\frac{2}{a}$.

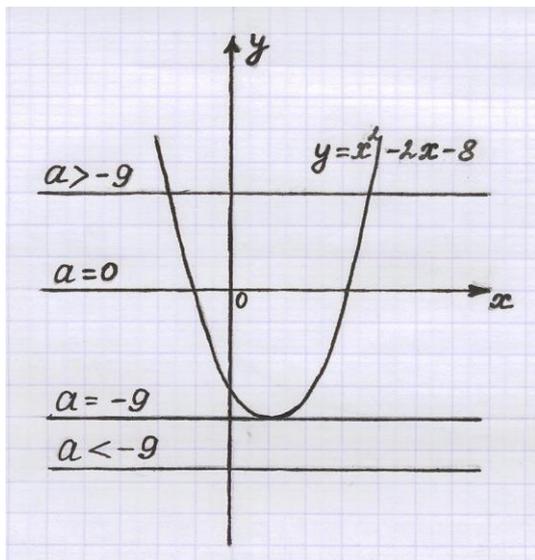
Пример 2. Найдите количество корней данного уравнения $x^2 - 2x - 8 - a = 0$ в зависимости от значений параметра a .

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $x^2 - 2x - 8 = a$

$y = x^2 - 2x - 8$ - графиком является парабола;

$y = a$ - семейство горизонтальных прямых.

Построим графики функций.



Ответ: При $a < -9$, уравнение решений не имеет; при $a = -9$, уравнение имеет одно решение; при $a > -9$, уравнение имеет два решения.

Пример 3. При каких a неравенство $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$ выполняется для всех значений x ?

Решение. Квадратный трехчлен положителен при всех значениях x , если $a - 3 > 0$ и $D < 0$, т.е. при a , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} a - 3 > 0 \\ a^2 - (a - 3)(3a - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 > 0 \\ 2a^2 - 15a + 18 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (3; +\infty) \\ a \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (6; +\infty) \end{cases}, \quad \text{откуда}$$

следует, что $a > 6$.

Ответ. $a > 6$

§ 3. Дробно-рациональные уравнения с параметром, сводящиеся к линейным

Процесс решения дробных уравнений выполняется по обычной схеме: дробное заменяется целым путем умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой и правой его частей. После чего решается целое

уравнение, исключая посторонние корни, то есть числа, которые обращают знаменатель в нуль.

Вслучае уравнений с параметром эта задача более сложная. Здесь, чтобы «исключить» посторонние корни, требуется найти значение параметра, обращающее общий знаменатель в нуль, то есть решить соответствующие уравнения относительно параметра.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{x-a}{x+2} = 0$

Это дробно-рациональное уравнение

Решение. Д.З: $x+2 \neq 0, x \neq -2$

$$x - a = 0, x = a.$$

Ответ: При $a \neq -2, x=a$

При $a = -2$ корней нет.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$ (1)

Это дробно-рациональное уравнение

Решение. Значение $a = 0$ является особым. При $a = 0$ уравнение теряет смысл и, следовательно, не имеет корней. Если $a \neq 0$, то после преобразований уравнение примет вид: $x^2 + 2(1-a)x + a^2 - 2a - 3 = 0$ (2) – квадратное уравнение.

Найдем дискриминант $\frac{D}{4} = (1-a)^2 - (a^2 - 2a - 3) = 4$, находим корни уравнения $x_1 = a + 1, x_2 = a - 3$.

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) расширилась область определения уравнения (1), что могло привести к появлению посторонних корней. Поэтому, необходима проверка.

Проверка. Исключим из найденных значений x такие, при которых

$$x_1 + 1 = 0, x_1 + 2 = 0, x_2 + 1 = 0, x_2 + 2 = 0.$$

Если $x_1 + 1 = 0$, то есть $(a + 1) + 1 = 0$, то $a = -2$. Таким образом, при $a = -2$, x_1 - посторонний корень уравнения. (1).

Если $x_1 + 2 = 0$, то есть $(a + 1) + 2 = 0$, то $a = -3$. Таким образом, при $a = -3$, x_1 - посторонний корень уравнения. (1).

Если $x_2 + 1 = 0$, то есть $(a - 3) + 1 = 0$, то $a = 2$. Таким образом, при $a = 2$, x_2 - посторонний корень уравнения (1).

Если $x_2 + 2 = 0$, то есть $(a - 3) + 2 = 0$, то $a = 1$. Таким образом, при $a = 1$, x_2 - посторонний корень уравнения (1).

В соответствии с этим при $a = -3$ получаем $x = -3 - 3 = -6$;

$$\text{при } a = -2 \quad x = -2 - 3 = -5;$$

$$\text{при } a = 1 \quad x = 1 + 1 = 2;$$

$$\text{при } a = 2 \quad x = 2 + 1 = 3.$$

Можно записать ответ.

Ответ: 1) если $a = -3$, то $x = -6$; 2) если $a = -2$, то $x = -5$; 3) если $a = 0$, то корней нет; 4) если $a = 1$, то $x = 2$; 5) если $a = 2$, то $x = 3$; 6) если $a \neq -3$, $a \neq -2$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2$, то $x_1 = a + 1$, $x_2 = a - 3$.

§4. Иррациональные уравнения и неравенства

Уравнения и неравенства, в которых переменная содержится под знаком корня, называется *иррациональным*.

Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению путем возведения в степень обеих частей уравнения или замены переменной. При возведении обеих частей уравнения в четную степень возможно появление посторонних корней. Поэтому при использовании указанного метода следует проверить все найденные корни подстановкой в исходное уравнение, учитывая при этом изменения значений параметра.

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство $f(x) \geq 0$ следует из уравнения $f(x) = g^2(x)$.

При решении иррациональных неравенств будем использовать следующие равносильные преобразования:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \begin{cases} f(x) \leq g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g^2(x) \\ g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$ (3)

Это иррациональное уравнение

Решение. По определению арифметического корня уравнение (3) равносильно

системе
$$\begin{cases} (a-2)x = 2a+1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}.$$

При $a = 2$ первое уравнение системы имеет вид $0x = 5$, то есть не имеет решений.

При $a \neq 2$ $x = \frac{2a+1}{a-2}$. Выясним, при каких значениях a найденное значение

удовлетворяет неравенству $x \geq -1$: $\frac{2a+1}{a-2} \geq -1, \frac{3a-1}{a-2} \geq 0,$

откуда $a \leq \frac{1}{3}$ или $a > 2$.

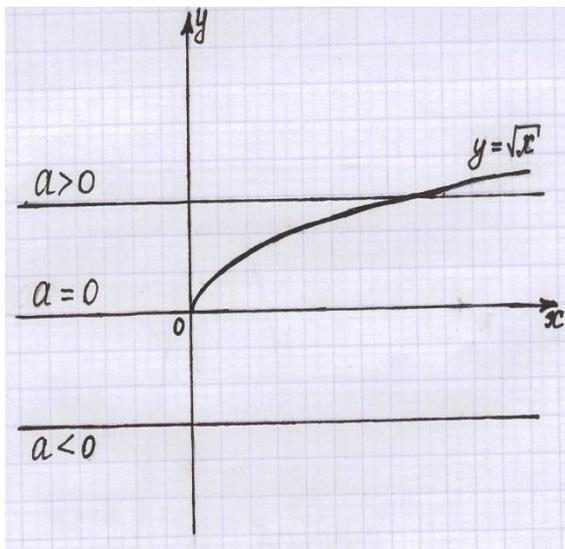
Ответ: При $a \leq \frac{1}{3}, a > 2$ $x = \frac{2a+1}{a-2}$, при $\frac{2a+1}{a-2} < a \leq 2$ уравнение решений не имеет.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x} = a$ (приложение 4)

Решение. $y = \sqrt{x}$

$y = a$ – семейство горизонтальных прямых.

Построим графики функций.



Ответ: при $a < 0$ – решений нет;
при $a \geq 0$ – одно решение.

Пример 3. Решим неравенство $(a+1)\sqrt{2-\delta} < 1$.

Решение. О.Д.З. $x \leq 2$. Если $a+1 \leq 0$, то неравенство выполняется при всех допустимых значениях x . Если же $a+1 > 0$, то

$$(a+1)\sqrt{2-\delta} < 1. \sqrt{2-\delta} < \frac{1}{a+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < \frac{1}{(a+1)^2} \\ 2-x \geq 0, \end{cases}$$

откуда $x \in (2 - \frac{1}{(a+1)^2}; 2]$

Ответ. $x \in (-\infty; 2]$ при $a \in (-\infty; -1)$, $x \in (2 - \frac{1}{(a+1)^2}; 2]$

при $a \in (-1; +\infty)$.

§ 5. Тригонометрические уравнения и неравенства

Error! Bookmark not defined.**Error! Bookmark not defined.**решений**Error!**
Bookmark not defined.

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1, (1)$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1. (2)$$

Если $|a| > 1$, то уравнения (1) и (2) решений не имеют.

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$$

Для каждого стандартного неравенства укажем множество решений:

$$1. \sin x > a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

при $a < -1, x \in \mathbb{R}$; при $a \geq 1$, решений нет.

$$2. \sin x < a \Leftrightarrow \pi - \arcsin a + 2\pi n < x < 2\pi + \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

при $a \leq -1$, **Error! Bookmark not defined.** при $a > 1, x \in \mathbb{R}$

$$3. \cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

при $a < -1, x \in \mathbb{R}$; при $a \geq 1$, решений нет.

$$4. \cos x < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

при $a \leq -1$, решений нет; при $a > 1, x \in \mathbb{R}$

$$5. \operatorname{tg} x > a, \operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$6. \operatorname{tg} x < a, -\pi/2 + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Пример 1. Найти a , при которых данное уравнение имеет решение:

$$\cos^2 x + 2(a-2)\cos x + a^2 - 4a - 5 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x + (2a-4)\cos x + (a-5)(a+1) = 0, \text{ решая его как квадратное, получаем}$$

$$\cos x = 5-a \text{ и } \cos x = -a-1.$$

Уравнение $\cos x = 5-a$ имеет решения при условии $-1 \leq 5-a \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq a \leq 6$, а

уравнение $\cos x = -a-1$ при условии $-1 \leq -a-1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 0$.

Ответ. $a \in [-2; 0] \cup [4; 6]$

Пример 2. При каких b найдется a такое, что неравенство $\frac{a}{\sin x} + b > 0$

выполняется при всех $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Положим $a = 0$. Неравенство выполняется при $b > 0$. Покажем теперь, что ни одно $b \leq 0$ не удовлетворяет условиям задачи. Действительно, достаточно положить $x = \pi/2$, если $a < 0$, и $x = -\pi/2$ при $a \geq 0$.

Ответ. $b > 0$

§ 6. Показательные уравнения и неравенства

1. Уравнение $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$ при $h(x) > 0$ равносильно совокупности двух

систем $\begin{cases} h(x) = 1 \\ x \in D(f) \cap D(g) \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ h(x) > 0, h(x) \neq 1 \end{cases}$

2. В частном случае ($h(x) = a$) уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a > 0$, равносильно

совокупности двух систем $\begin{cases} h(x) = 1 \\ x \in D(f) \cap D(g) \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$

3. Уравнение $a^{f(x)} = b$, где $a > 0, a \neq 1, b > 0$, равносильно уравнению $f(x) = \log_a b$. Случай $a = 1$ рассматриваем отдельно.

Решение простейших показательных неравенств основано на свойстве степени. Неравенство вида $f(a^x) > 0$ при помощи замены переменной $t = a^x$ сводится к решению системы неравенств, а затем к решению соответствующих простейших показательных неравенств.

При решении нестрого неравенства необходимо к множеству решений строгого неравенства присоединить корни соответствующего уравнения. Как и при решении уравнений во всех примерах, содержащих выражение $a^{f(x)}$, предполагаем $a > 0$. Случай $a = 1$ рассматриваем отдельно.

Пример 1. При каких a уравнение $8^x = \frac{3a-2}{4-a}$ имеет только положительные корни?

Решение. По свойству показательной функции с основанием, большим единицы, имеем $x > 0 \Leftrightarrow 8^x > 1 \Leftrightarrow \frac{3a-2}{4-a} > 1 \Leftrightarrow \frac{4a-6}{4-a} > 0$, откуда $a \in (1,5; 4)$.

a

Error! Bookmark not defined. 2. Решить **Error! Bookmark not defined.** $a^2 \cdot 2^x > a$.
Error! Bookmark not defined. три случая:

1. $a < 0$. Так как левая часть неравенства положительна, а правая отрицательна, то неравенство выполняется для любых $x \in \mathbb{R}$.

2. $a = 0$. Решений нет.

3. $a > 0$. $a^2 \cdot 2^x > a2^x > x > -\log_2 a$

Ответ. $x \in \mathbb{R}$ при $a > 0$; решений нет при $a = 0$; $x \in (-\log_2 a; +)$ при $a > 0$.

§ 7. Логарифмические уравнения и неравенства

Приведем некоторые эквивалентности, используемые при решении логарифмических уравнений и неравенств.

1. Уравнение $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0, f(x) \neq 1, g(x) > 0. \end{cases}$$

В частности, если $a > 0, a \neq 1$, то

$$\log_a g(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2. Уравнение $\log_a g(x) = b \Leftrightarrow g(x) = a^b$ ($a > 0, a \neq 1, g(x) > 0$).

3. Неравенство $\log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \leq g(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \leq h(x). \end{cases}$$

Если a, b – числа, $a > 0, a \neq 1$, то

$$\log_a f(x) \leq b \begin{cases} f(x) \geq a^b, \text{ если } 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b, \text{ если } a > 1 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) > b \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \text{ если } 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b, \text{ если } a > 1 \end{cases}$$

Пример 1. Решите уравнение Решить $\frac{\log_a^2 x - 2}{4 - \log_a x} = 1$

Решение. Найдем ОДЗ: $x > 0, x \neq a^4, a > 0, a \neq 1$. Преобразуем уравнение

$$\log_a^2 x - 2 = 4 - \log_a x \Leftrightarrow \log_a^2 x + \log_a x - 6 = 0, \text{ откуда } \log_a x = -3$$

$x = a^{-3}$ и $\log_a x = 2$ $x = a^2$. Условие $x = a^4 \Leftrightarrow a^{-3} = a^4$ или $a^2 = a^4$ не выполняется на ОДЗ.

Ответ: $x = a^{-3}$, $x = a^2$ при $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 2. Найдите наибольшее значение a , при котором уравнение

$2\log_2^2 x - |\log_2 x| + a = 0$ имеет решения.

Решение. Выполним замену $|\log_2 x| = t$ и получим квадратное уравнение

$2t^2 - t + a = 0$. Решая, найдем $D = 1 - 8a$. Рассмотрим $D \geq 0$, $1 - 8a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{8}$.

При $a = \frac{1}{8}$ квадратное уравнение имеет корень $t = \frac{1}{4} > 0$.

Ответ. $a = \frac{1}{8}$

Пример 3. Решить неравенство $\log(x^2 - 2x + a) > -3$

Решение. Решим систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 2x + a > 0 \\ x^2 - 2x + a < 8. \end{cases}$

Корни квадратных трехчленов $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$ и $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{9-a}$

Критические значения параметра : $a = 1$ и $a = 9$.

Пусть x_1 и x_2 – множества решений первого и второго неравенств, тогда $x_1 \cap x_2 = x$ – решение исходного неравенства.

При $0 < a < 1$ $x_1 = (-\infty; 1 - \sqrt{1-a}) \cup (1 + \sqrt{1-a}; +\infty)$, при $a > 1$ $x_1 = (-\infty; +\infty)$.

При $0 < a < 9$ $x_2 = (1 - \sqrt{9-a}; 1 + \sqrt{9-a})$, при $a \geq 9$ x_2 – решений нет.

Рассмотрим три случая:

1. $0 < a \leq 1$ $x = (1 - \sqrt{9-a}; 1 - \sqrt{1-a}) \cup (1 + \sqrt{1-a}; 1 + \sqrt{9-a})$.

2. $1 < a < 9$ $x = (1 - \sqrt{9-a}; 1 + \sqrt{9-a})$.

3. $a \geq 9$ x – решений

Задания для самостоятельной работы

§1. Линейные уравнения и неравенства

1. Решить уравнения:

а) $ax = -4$

б) $2 - 5x = ax - 2$

в) $2x + 3 = ax$

г) $ax - 2x = 3(x - 1)$

д) $ax = x + 3$

е) $4 + ax = 3x + 1$

2. Решить неравенства:

а) $ax > 5$

б) $ax - 2x < 3(x + 1)$

в) $a^2x + 3 \geq a + 3ax$

г) $(n - 1)x \leq 2(n + x)$

д) $a > \frac{1}{a} + \frac{x-1}{a-1}$

3. При каких значениях параметра a уравнения

а) $|x| = ax - 2$

б) $(a^2 - a - 2)x \leq a^5 - 4a^4 + 4a^3$

не имеют решений?

4. При каких значениях параметра p все решения неравенства $(p - 3)x > 5$

являются решениями неравенства $px > 2$?

5. При каких значениях параметра a корень уравнения

$$\frac{2(a+1)x}{a} = \frac{7}{a} + 3(x+1) \text{ не меньше корня уравнения}$$

$$5(x-2) - 4(3+x) = 2 + ax?$$

6. Определить количество корней в зависимости от значений

параметра a : а) $ax - 6 = 2a - 3x$

б) $2ax - 4x - a^2 + 4a - 4 = 0$

§2 Квадратные уравнения и неравенства

1. Решить уравнения:

а) $x^2 - 5x + 6 = a$

б) $x^2 - 2|x| - a = 0$

в) $x^2 + 5ax + 4a^2 = 0$

г) $x^2 - (2a - 4)x - 8a = 0$

д) $x^2 - (3a - 2)x + 2a^2 - a - 3 = 0$

е) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$

ж) $(a + 1)x^2 - 2x + 1 - a = 0$

з) $abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab = 0$

2. Решить неравенства:

а) $x^2 + 2x > a + 3$

б) $x^2 - cx - 2c^2 < 0$

в) $x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0$

г) $x^2 - (3b - 2) - 6b \leq 0$

д) $ax^2 - 2(a - 1)x - 4 \geq 0$

е) $x^2 - 2x - 8 - a > 0$

ж) $x^2 - 12x + c < 0$

3. При каких a разность корней уравнения $2x^2 - (a + 1)x + (a - 1) = 0$ равна их произведению?

4. При каком a уравнения $x^2 + 2x + a = 0$ и $x^2 + ax + 2 = 0$ имеют общий корень?

5. При каких a существует хотя бы одно общее решение неравенств

$$x^2 + 4ax + 3a^2 - 2a - 1 > 0 \text{ и } x^2 + 2ax - 3a^2 + 8a - 4 \leq 0 ?$$

§3. Дробно – рациональные уравнения и неравенства

1. Решить уравнения:

а) $\frac{x-a}{x+2} = 0$

б) $\frac{x-2}{x+a} = 0$

в) $\frac{x-a}{x^2-4x+3} = 0$

г) $\frac{x^2-4x+3}{x-3} = 0$

д) $\frac{x+a}{x+1} + \frac{a-3x}{x-3} = 2$

е) $\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$

2. При каких значениях параметра уравнения имеют бесконечно много решений

а) $\frac{x^2+(3-a)x-3a}{x^2-x-12} = 0$

б) $\frac{x^2-(3b-1)x+2b^2-2b}{x^2-7b+6} = 0$

3. Решить неравенства:

$$a) \frac{x+2a}{x+a} < 0$$

$$б) \frac{a(x-2)}{x-a} \leq 0$$

$$в) \frac{x^2 - (a+1)x + 2a - 2}{3x^2 - 7x + 2} > 0$$

$$г) \frac{a-1}{x+6} \geq \frac{2x+7}{(x+2)^2 - x - 22}$$

4. При каких a неравенство $\frac{4x-a}{x-2a} < 0$ выполняется для всех $x \in [2;4]$?

§4. Иррациональные уравнения и неравенства

1. Решить уравнения:

$$a) \sqrt{x} = a$$

$$б) a\sqrt{x} = 4$$

$$в) \sqrt{x-1} = a$$

$$г) \sqrt{x} = a - 2$$

$$д) x - \sqrt{a-x^2} = 1$$

$$е) \sqrt{x} + \sqrt{x+a} = 0$$

$$д) \sqrt{x-1} + a^2 \sqrt{x} = 0$$

$$е) a^2 \sqrt{x-1} + \sqrt{x} = 0$$

$$ж) a^2 \sqrt{x-3} + |x| = 0$$

2. Решить неравенства:

а) $x < \sqrt{a-x^2}$

б) $\sqrt{x-3} \geq a$

в) $\sqrt{x} > -a$

г) $a\sqrt{x} \leq 0$

д) $x - \sqrt{a-x} < 0$

е) $\sqrt{(x+6)(x+1)} \leq b+a$

3. При каких значениях параметра a неравенство

$$\sqrt{x^2 + 8x + 20} \leq \frac{2a^2 - 4a - 3}{a^2 - 2a - 8} \text{ не имеет решений?}$$

4. При каких a неравенство

$$\sqrt{x^2 - 10x + 26} \geq \frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 + 2a - 8} \text{ выполняется для всех значений } x?$$

§5. Тригонометрические уравнения и неравенства

1. Решить уравнения:

а) $\sin(2x + 3) = a + 4$

б) $2\cos(x + \pi/3) = a^2 - 3a$

в) $\operatorname{tg}^2 2x - (2a + 1)\operatorname{tg} 2x + a(a + 1) = 0$

2. Решить неравенства:

а) $\cos x \leq 2 - a^2$

б) $(a - 2)\sin x > 3a + 4$

в) $(2\cos x - a)(3\cos x + b) < 0, (0 < a < 2, 0 < b < 3)$

3. Найдите целые a , при которых имеют решения уравнения:

$$a) 1 + a \cos x = (a + 1)^2$$

$$б) \sin^2 x - 3 \sin x + a = 0$$

$$в) a \sin x + 2\sqrt{a+1} \cos x = 2a + 1$$

4. Доказать, что для любых $p \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$4(p-3)^4 + 2 + (2 - 4(p-3)^4) \cos t \geq 0$. Найти все пары чисел $(p; t)$, для которых это неравенство обращается в равенство.

§6. Показательные уравнения и неравенства

1. При каких a уравнение имеет единственное решение?

$$A) 5^{2x} - 10^x + 4^{x-1}(a-2) = 0$$

$$б) 25^x - 2 \cdot 10^x + (2a+3) \cdot 4^x = 0$$

$$в) 4^x - a \cdot 2^{x+1} - 3a^2 + 4a = 0$$

$$г) a \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{-x} = 2$$

$$д) 2^{2x} - a \cdot 2^x - 2a = 0$$

$$е) 3^{(a+1)x^2 - 2(a-2)x + a} = 27$$

2. Решить неравенства:

$$a) a \cdot 2^x \leq a^2$$

$$б) a^{x^2 - 15} > a^{2x}$$

$$в) 4^{x+1} a^2 - 65 \cdot 2^x a + 16 > 0$$

$$г) \frac{a^x}{a^x - 1} > \frac{1 + a^x}{1 - 2a^{-x}}$$

3. При каких a неравенство $4^x + (a-1)2^x + (2a-5) > 0$ выполняется при любом $x \in \mathbb{R}$?

4. При каких a неравенство $36^x + a \cdot 6^x + a + 8 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение?

§ 7. Логарифмические уравнения и неравенства

1. Решите уравнение

а) $\log_{2x}(ax+1) = \frac{1}{2}$

б) $\log_a \sqrt{1+x} + 3 \log_{a^2}(1-x) = \log_{a^4}(1-x^2)^2 + 2$

в) $\log_3 2a + \log_3 x(a-2) = \log_3(a-2)$

г) $\log_{\sqrt{2-a}} \sqrt{2x+a} = 2$

д) $2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2 \cdot a} a = 0$

2. При каких a уравнение $\log_{\sqrt{2-a}}(4x+a) = 4$ имеют решения.

3. При каких a корни уравнения

$(a-1) \log_3^2(x-2) - 2(a+1) \log_3(x-2) + a-3 = 0$ меньше 3?

4. При каких a расстояние между корнями уравнения

$2 \log_a x + 3 \log_{a^2} a + 5 = 0$ меньше $\frac{6}{25}$?

5. Решите неравенства

а) $\log_x(a^2+1) < 0$

б) $(\log_2 x - 1)(\log_2 x + a) > 0$

в) $\log_a x + 1 > 2 \log_x a$

г) $\log_a \sqrt{3,5x-1,5} \cdot \log_x a < 1$

6. Решите неравенство $\log_a(x^2+x+2) < \log_a(2x^2 - 18)$, если известно, что оно удовлетворяется при $x = -3,5$.

7. При каких значениях a неравенство $\log_2(x^2+ax+1) > -1$ выполняется для любого $x < 0$?