

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Красноярский государственный педагогический университет им. В.П.
Астафьева»
Институт социально-гуманитарных технологий
Кафедра Информационных технологий обучения и математики (ИТОиМ)

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
(для очной и заочной форм обучения)**

МАТЕМАТИКА

Направление подготовки / Профиль
39.03.02 Социальная работа / Социальная работа в системе социальных
служб
Квалификация (степень) – бакалавр

Рабочая программа дисциплины
«Математика»

составлена _____ доцентом Романовой Н.Ю.
(должность и ФИО преподавателя)

Рабочая программа дисциплины обсуждена на заседании кафедры
_____ Информационных технологий обучения и математики (ИТОиМ)

протокол № 1 от " 31 " августа _____ 2016 г.

Заведующий кафедрой _____ Безруков А.А.
(ф.и.о., подпись)

Одобрено учебно-методическим советом

(указать наименование совета и направление)

" _____ " _____ 201__ г.

Председатель _____
(ф.и.о., подпись)

Аннотация рабочей программы дисциплины «Математика»

Цели изучения дисциплины:

- 1) дать представление о математике как об одном из основных инструментов познания окружающего мира, как о науке, изучающей математические модели реальных процессов;
- 2) привить ясное понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке;
- 3) дать представления о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре;
- 4) научить логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и корректно использовать математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений;
- 5) получить навыки обработки различной статистической информации;

Задачи изучения дисциплины.

Овладение математической культурой, а также системой базовых знаний по математике и умения применять их к практическим задачам, в том числе с помощью компьютера.

Содержание дисциплины.

Базовый модуль №1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия

- Тема 1: Матрицы и действия над ними (сложение, умножение, транспонирование).
Определители и их свойства (миноры, алгебраические дополнения).
- Тема 2: Ранг матрицы. Системы линейных уравнений, обратная матрица, формулы Крамера.
Метод последовательных исключений Жордана-Гаусса.
- Тема 3: Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось, координаты вектора. Деление отрезка в данном отношении.
- Тема 4: Нелинейные операции над векторами (скалярное, векторное, смешанное произведения).
- Тема 5: Уравнения линий и поверхностей. Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве. Взаимное положение прямых на плоскости, прямых и плоскостей в пространстве. Кривые второго порядка.

Базовый модуль №2. Дифференциальное и интегральное исчисления.

- Тема 6: Предел последовательности, предел функции. Методы раскрытия неопределенностей. Замечательные пределы.
- Тема 7: Понятие производной. Таблица производных. Правила дифференцирования функций. Дифференцирование сложной функции. Логарифмическая производная. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически.

- Тема 8: Применение производной для исследования функции. Общая схема исследования функций.
- Тема 9: Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов, правила интегрирования. Замена переменных.
- Тема 10: Интегрирование по частям. Интегрирование тригонометрических функций, рациональных дробей.
- Тема 11: Определенный интеграл. Определение и свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
- Тема 12: Численное интегрирование. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Системы дифференциальных уравнений. Существование решений.

Базовый модуль №3. Теория вероятностей и Математическая статистика

- Тема 13: Случайные события и их вероятности. Случайные величины, их распределения и числовые характеристики.
- Тема 14: Элементы математической статистики. Статистическое оценивание и проверка гипотез.
- Тема 15: Математическая обработка результатов измерений. Регрессионный анализ.

Место дисциплины в структуре ООП. Дисциплина входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла Б2.В.ДВ.

Требования к предварительной подготовке студента. Для успешного освоения дисциплины студент должен иметь базовую подготовку по школьным курсам математики и информатики.

Трудоёмкость дисциплины: 3 зачётных единицы.

Семестры изучения и формы итогового контроля знаний: 2 семестра на 1 курсе, экзамен.

Формируемые компетенции. Дисциплина участвует в формировании компетенций: ОК-1, ОК-10, ОК-12.

Виды занятий. Лекции, семинарские занятия, самостоятельная работа студента.

Пояснительная записка

1. Место дисциплины в структуре образовательной программы.

Рабочая программа учебной дисциплины «Математика» разработана в соответствии с проектом ФГОС ВО 3 + по направлению подготовки: 39.03.02

Психолого-педагогическое образование. Профиль «Социальная работа в системе социальных служб» – заочная. Квалификация (степень): бакалавр.

Данная дисциплина входит в базовую часть естественнонаучного блока и изучается на 1 курсе в течение 2-х семестров.

2. Трудоемкость дисциплины

На изучение дисциплины отведено 4 З.Е.(144 часа).

Аудиторных занятий – 18 часов:

лекций – 8 часов;

семинаров — 10 часов;

Самостоятельная работа студентов – 90 часов.

3. Цели освоения дисциплины:

Развитие представления о математике как об одном из основных инструментов познания окружающего мира, умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и корректно использовать математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений; навыки обработки различной статистической информации.

4. Планируемые результаты обучения.

Изучение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций (Педагогическое образование).

– владеть культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения - ОК-1

– использовать в профессиональной деятельности основные законы естественнонаучных дисциплин, в том числе медицины, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования - ОК-10

– владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, иметь навыки работы с компьютером как средством управления информацией - ОК-12

Таблица

«Планируемые результаты обучения»

Задачи освоения дисциплины	Планируемые результаты обучения по дисциплине (дескрипторы)	Код результата обучения (компетенция)
Формирование математической	<i>Знать:</i> роль и место математики в системе	ОК-1 ОК-10

культуры	<p>наук, осознавать как фундаментальный, так и прикладной характер математики; понятийный аппарат аксиоматического метода;</p> <p><i>Уметь:</i></p> <p>уметь использовать основные алгоритмические структуры при решении задач;</p> <p><i>Владеть:</i></p> <p>логической культурой мышления, способами анализа и синтеза информации, системой основных математических структур и аксиоматическим методом;</p>	
Овладение основами дискретной математики	<p><i>Знать:</i></p> <p>основные понятия теории множеств и алгебры логики; основные понятия теории вероятностей и математической статистики;</p> <p><i>Уметь:</i></p> <p>решать простейшие логические, комбинаторные задачи, производить операции с множествами; производить расчет вероятностей, использовать законы распределения случайных величин; проводить статистическую обработку информации;</p> <p><i>Владеть:</i></p> <p>Основными математическими техниками линейной алгебры, математического анализа и теории вероятностей.</p>	ОК-1 ОК-10
Овладение современными методами компьютерной обработки математической информации	<p><i>Знать:</i></p> <p>возможности применения вычислительной техники и программного обеспечения при решении математических задач.</p> <p><i>Уметь:</i></p> <p>применять компьютер, информационные технологии в решении прикладных задач; оценивать программное обеспечение и перспективы его использования с учетом решаемых профессиональных задач;</p> <p><i>Владеть:</i></p> <p>методами компьютерной обработки</p>	ОК-12 ОК-1 ОК-10

5. Контроль результатов освоения дисциплины «Математика».

Посещение лекций, решение контрольных, самостоятельных и домашних работ, выполнение лабораторных работ, подготовка к семинарам, решение математических задач с помощью специальных программ онлайн-сервисов..

Форма итогового контроля - экзамен.

Оценочные средства результатов освоения дисциплины, критерии оценки выполнения заданий представлены в разделе «Фонды оценочных средств».

6. Перечень образовательных технологий, используемых при освоении дисциплины «Математика»

1. Современное традиционное обучение (лекционно-семинарская система).
2. Обучение с использованием современных компьютерных средств: решение задач обработки математической информации с помощью офисных и специализированных программ, обучение с использованием онлайн-сервисов.

**Лист согласования учебной программы с другими дисциплинами
образовательной программы
на 201__ / _____ учебный год**

Наименование дисциплин, изучение которых опирается на данную дисциплину	Кафедра	Предложения об изменениях в дидактических единицах, временной последовательности изучения и т.д.	Принятое решение (протокол №, дата) кафедрой, разработавшей программу

Заведующий кафедрой _____

Председатель НМС

" ____ " _____ 20__ г.

ЛИСТ ВНЕСЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЙ

Дополнения и изменения в учебной программе на 2016/2017 учебный год

В учебную программу вносятся следующие изменения:

1. Изменен титульный лист РПД
2. Изменения в курсе лекций: модернизирована форма, дополнено и изменено содержание.
3. Структурно изменено содержание основных разделов.
4. Модернизирован фонд оценочных средств:
 - Дополнены и изменены контрольные и самостоятельные задания по разделу «Теория вероятностей и математическая статистика».
 - Разработаны новые лабораторные работы по статистической обработке информации.
 - Разработаны тестовые задания для раздела 2.
5. Дополнена карта литературного обеспечения дисциплины.

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
" 31 " 08 2016 г., протокол № 1

Внесенные изменения утверждаю

Заведующий кафедрой

Декан факультета (директор института)

_____ " _____ " _____ 201__ г.

Организационно-методические документы

Технологическая карта обучения дисциплине

Математика

(наименование дисциплины)

Для обучающихся образовательной программы

(указать уровень, шифр и наименование направления подготовки.)

Направление подготовки: 39.03.02 Психолого-педагогическое образование.

Профили/название программы: психология и социальная педагогика (общий профиль).

Квалификация (степень): бакалавр по очной форме обучения

(указать профиль/ название программы и форму обучения)

(общая трудоемкость дисциплины __4__ з.е.)

Наименование модулей, разделов, тем	В с е г о ч а с о в	Аудиторных часов				Внеаудиторных часов	Содержание внеаудиторной работы	Формы контроля
		в	л	с	л			
I. Входной модуль							Проверка минимального набора школьных знаний по математике, необходимых для дальнейшего изучения курса	Тестовая работа

Базовый Модуль №1. <u>Линейная алгебра, аналит. геометрия</u> 1. Системы линейных алгебраических уравнений 2. Векторы 3. Элементы аналитической геометрии	36	6	2	2		30	Подготовка к лабораторным занятиям: Изучение теоретического материала. Выполнение контрольных работ.	Тема I.1 с/р Операции с матрицами, определитель матрицы, решение СЛАУ Тема I.2 с/р Операции с векторами Тема I.3 с/р Прямые, плоскость, кривые второго порядка Контрольная по Линейной алгебре и аналитической геометрии
Базовый Модуль №2 <u>Математический анализ.</u> Дифференциальное и интегральное исчисление. Диф. уравнения.	36	6	2	2		30	Подготовка к лабораторным занятиям: Изучение теоретического материала. Выполнение контрольных работ.	Тема II.1 с/р Пределы, производные. Контрольная Исследование функции Тема II.2 с/р Вычисления и применение интегралов Тема II.1 с/р Решение дифференциальных уравнений. Контрольная по мат. анализу.
Базовый Модуль №3. Теория вероятностей. Математическая статистика	36	6	4	6		30	Подготовка к лабораторным занятиям: Изучение теоретического материала. Выполнение контрольных работ. Планирование и постановка эксперимента. Статистические измерения, обработка статистических данных (практическая часть лабораторных работ)	Тема.1 с/р Вероятности элементарных событий Тема.2 с/р Законы распределения вероятностей Тема 3 л/р Проведение эксперимента по измерению и обработке выборочных данных.
Итоговый модуль.	36						Самостоятельная подготовка билетов к экзамену. Решение задач.	Экзамен: 2 теоретических вопроса 1 задача
Всего	108	18	8	10	0	90		

Содержание основных разделов и тем дисциплины «Математика»

Базовый модуль №1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия

- Тема 1: Матрицы и действия над ними (сложение, умножение, транспонирование).
Определители и их свойства (миноры, алгебраические дополнения).
- Тема 2: Ранг матрицы. Системы линейных уравнений, обратная матрица, формулы Крамера.
Метод последовательных исключений Жордана-Гаусса.
- Тема 3: Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось, координаты вектора. Деление отрезка в данном отношении.
- Тема 4: Нелинейные операции над векторами (скалярное, векторное, смешанное произведения).
- Тема 5: Уравнения линий и поверхностей. Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве. Взаимное положение прямых на плоскости, прямых и плоскостей в пространстве. Кривые второго порядка.

Базовый модуль №2. Дифференциальное и интегральное исчисления.

- Тема 6: Предел последовательности, предел функции. Методы раскрытия неопределенностей. Замечательные пределы.
- Тема 7: Понятие производной. Таблица производных. Правила дифференцирования функций. Дифференцирование сложной функции. Логарифмическая производная. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически.
- Тема 8: Применение производной для исследования функции. Общая схема исследования функций.
- Тема 9: Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов, правила интегрирования. Замена переменных.
- Тема 10: Интегрирование по частям. Интегрирование тригонометрических функций, рациональных дробей.
- Тема 11: Определенный интеграл. Определение и свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
- Тема 12: Численное интегрирование. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Системы дифференциальных уравнений. Существование решений.

Базовый модуль №3. Теория вероятностей и Математическая статистика

- Тема 13: Случайные события и их вероятности. Случайные величины, их распределения и числовые характеристики.
- Тема 14: Элементы математической статистики. Статистическое оценивание и проверка гипотез.
- Тема 15: Математическая обработка результатов измерений. Регрессионный анализ.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Методические рекомендации по организации изучения дисциплины «Основы мат. обработки информации»

Рекомендуемые образовательные технологии:

- Посещение лекций.
- Посещение практических занятий.
- Выполнение домашних самостоятельных заданий.
- Выполнение контрольных и лабораторных работ.

Изучение дисциплины разделено на несколько разделов: входной, три базовых и итоговый. Работы, входящие в базовые и итоговый разделы, являются обязательными, и, в зависимости от качества их выполнения, оцениваются соответствующим количеством баллов.

Выполнение лабораторных работ производится согласно «Методическим рекомендациям для студентов». Выбор лабораторных для выполнения на аудиторных занятиях производится преподавателем в зависимости от отведенных на практические занятия часов и успеваемости группы.

Контрольные работы раздаются студентам в печатном виде («Контрольные работы»). Стандартное количество – 4 (по 3-6 заданий).

Планирование и организации времени, отведенного на изучение дисциплины.

Рекомендуется сдача лабораторных работ непосредственно в день изучения темы. В случае отставания или отсутствия возможно самостоятельное выполнение со сдачей на последующих занятиях.

Контрольные работы должны быть сданы к зачетной неделе.

Проблемные вопросы разрешаются на индивидуальных занятиях, назначаемых преподавателем по мере необходимости в количестве, предусмотренном учебным планом.

В случае рубежного контроля со стороны деканата факультета баллы начисляются за выполненные и сданные лабораторные и контрольные работы. Если они отсутствуют, аттестация не выставляется.

Компоненты мониторинга учебных достижений

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА РЕЙТИНГА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины/курса	Уровень/ступень образования	Статус дисциплины в рабочем учебном плане (А, В, С)	Количество зачетных единиц/кредитов
«Основы мат. обработки информации»	бакалавр		4 кредита 144 часов
Смежные дисциплины по учебному плану			
Предшествующие: школьный курс по математике			
Последующие: методика преподавания дисциплины			

ВХОДНОЙ раздел (проверка «остаточных» знаний по ранее изученным смежным дисциплинам)			
	Форма работы*	Количество баллов 0 %	
		min	max
	Тестирование	0	0
Итого		0	0

БАЗОВЫЙ раздел № 1			
	Форма работы*	Количество баллов 20%	
		min	max
Текущая работа			
	Решение задач	4	8
	Выполнение лабораторных работ	4	5
	Индивидуальное задание	3	5
Промежуточный рейтинг-контроль	Тестирование	2	2
Итого		13	20

БАЗОВЫЙ раздел № 2			
	Форма работы*	Количество баллов 20 %	
		min	max
Текущая работа			
	Контрольные работы	4	8
	Самостоятельные работы	4	5
	Индивидуальное задание	3	5
Промежуточный рейтинг-контроль	Тестирование	2	2
Итого		13	20

БАЗОВЫЙ раздел № 3			
--------------------	--	--	--

Форма работы*		Количество баллов 26 %	
		min	max
Текущая работа			
	Постановка и проведение эксперимента по статистической обработке результатов измерений	6	14
	Самостоятельные работы	4	5
	Индивидуальное задание	3	5
Промежуточный рейтинг-контроль	Тестирование	2	2
Итого		15	26

Итоговый раздел			
Содержание	Форма работы*	Количество баллов 34 %	
		min	max
	Экзамен	24	34
Итого		24	34

Общее количество баллов по дисциплине	min	max
		60

ФИО преподавателей: Романова Н.Ю.

Утверждено на заседании кафедры _____ 20__ г. Протокол № _____

Зав. кафедрой _____

Фонд оценочных средств (контрольно-измерительные материалы)

по дисциплине

«Математика»

Задачи по базовому модулю I

Тема I.1: Системы линейных алгебраических уравнений

Задание 1

1. Вычислить $A \cdot B$:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы B .

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z - 8 = 0 \\ 2x + 4y - 5z - 11 = 0 \\ 4x - 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Задание 2

1. Даны матрицы:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 8 \\ -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} .5 & 1 \\ 0 & .5 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычислить $A \times B$

2. Вычислить определитель матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Задание 3

1. Найти $A^2 - A^T$:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \quad 2. \text{ Вычислить определитель:}$$

$$\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 0 & -\sin^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}$$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 4x - 6y + 2z = 2 \\ 6x - 9y + 3z = 3 \end{cases}$$

Задание 4

6) Найти $A^T A$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

7) Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

8) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 8z = 0 \end{cases}$$

Задание 5

1. Найти $2C \times (A+B)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 5z = 3 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

Задание 6

1. Найти $2A \cdot A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 9 & 4 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & 7 & -2 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \\ x + 5y - 9z = 0 \end{cases}$$

Задание 7

1. Найти $-A^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = C$$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x+3y=2 \\ x-2y=-3 \\ 4x+9y=11 \end{cases}$$

Задание 8

1. Найти $3C^2$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы C.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ 3x + 3y + z - 3 = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Задание 9

1. Вычислить B^2 :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -35 \\ 6 & 5 & 0 \\ 1 & 24 & 65 \end{bmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы B

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 5z + 4y = 3 \\ z - 2y + x = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

Задание 10

1. Вычислить $B \times C + B \times B$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -35 \\ 6 & 5 & 0 \\ 1 & 24 & 65 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы C.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 8z = 0 \end{cases}$$

Задание 11

a) Найти $A \cdot A - 2A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Вычислить определитель матрицы A.

c) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$$

Задание 12

9) Найти $3A^2$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

10) Вычислить определитель: A

11) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 2x+4y-z=5 \\ 3x-y+z=2 \end{cases}$$

Задание 13

1. Найти C^2 ;

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы C.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y-4z-8=0 \\ 2x+4y-5z-11=0 \\ 4x-3y+2z-1=0 \end{cases}$$

Задание 14

1. Найти AA^T

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы A.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x-2y+3z=0 \end{cases}$$

Задание 15

1. Найти $A \cdot A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 29 & -31 & 27 \\ 27 & -29 & 26 \end{pmatrix}$$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 3/2x-y+z=0 \end{cases}$$

Задание 16

1. Найти $C \times B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ 3x + 3y + z - 3 = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Задание 17

1. Найти $C \times A$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы C .

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 5z + 4y - 3 = 0 \\ z - 2y + x = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

Тема 2: Векторы

Задание 1

1. Даны точки $A(1,-3,-2)$, $B(8,0,-4)$, $C(4,8,-3)$. Найти такую точку D , чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, и расстояние от неё до начала координат.
2. Дано $|a_1|=2$, $|a_2|=1$, угол между a_1 и a_2 равен $\pi/3$. Вычислить $(3a_1-2a_2)(a_1+2a_2)$
3. Найти модуль векторного произведения $(b \times c)$, где $b=5i+2j-2k$,
4. $c=2i+3j-2k$
5. Вычислить объем тетраэдра $OABC$: $A(1,2,-1)$, $B(0,1,-5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$. (Объем тетраэдра = $1/6$ объема параллелепипеда)

Задание 2

- Найти координаты середины отрезка CD : $C(7,0,3)$ и $D(-5, 0, 0)$.
- Даны векторы $a_1(4,-2,-4)$ и $a_2(6,-3,2)$. Вычислить $(2a_1-3a_2) \cdot (a_1+2a_2)$.
- Найти любой вектор, ортогональный векторам $a_1(4,-2,-4)$ и $a_2(6,-3,2)$.
- Используя свойства смешанного произведения, доказать, что векторы a , b , c компланарны, если $a=2i+3j-k$, $b=i-j+3k$, $c=i+9j-11k$.

Задание 3

1. Отрезок с концами в точках $A(1,-4)$ и $B(4,2)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.
2. Даны векторы $a_1(4,-2,-4)$ и $a_2(6,-3,2)$. Вычислить $(a_1-a_2)^2$.
3. Упростить выражение: $(i \times (j+k)) - (j \times (i+k)) + (k \times (i+j+k))$.
4. Вычислить объем тетраэдра, построенного на векторах $A=(2,-3,5)$, $B=(0,2,1)$, $C=(-2,-2,3)$.

Задание 4

1. Даны 3 вершины $A(2,-5,6)$, $B(-6,2,-3)$, $C(1,2,-3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты точки пересечения его диагоналей.
2. Даны векторы $a_1(4,-2,-4)$ и $a_2(6,-3,2)$. Вычислить $(a_1+a_2)^2$.
3. Дан треугольник с вершинами $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$. Найти высоту BD .
4. Вычислить объем тетраэдра $DABC$, если $A=(2,-3,5)$, $B=(0,2,1)$, $C=(-2,-2,3)$, $D=(3,2,4)$.

Задание 5

- a) Даны 3 вершины $A(2,-5,6)$, $B(-6,2,-3)$, $C(1,2,-3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти расстояние от вершины D до начала координат.
- b) Дано $|a_1|=3$, $|a_2|=5$, угол между a_1 и a_2 равен $\pi/4$. Вычислить $(a_1+a_2)^2$.
- c) Упростить выражение: $2i(j \times k) + 3j(i \times k) + 4k(i \times j)$.
- d) Пользуясь свойством смешанного произведения, доказать, что точки
- e) $A(1,2,-1)$, $B(0,1,-5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ лежат в одной плоскости.

Задание 6

1. Отрезок с концами в точках $A(3,-2)$ и $B(6,4)$ разделен пополам. Найти расстояние от точки деления до начала координат.
2. Найти \cos угла между векторами $a_1(4,-2,-4)$ и $a_2(6,-3,2)$
3. Найти модуль векторного произведения $(-3b \times 11c)$, где
4. $b=5i+2j-2k$, $c=2i+3j-2k$.
5. Пользуясь свойством смешанного произведения, проверить, будут ли компланарны векторы $2a$, b , $5c$, где $a=3i-2j+k$, $b=2j-3k$, $c=-3i+2j-k$.

Задание 7

- На оси ординат найти точку M , расстояние до которой от точки $A(3,0)$ равно 5.
- Найти \cos угла между векторами $a_1(1,3,3)$ и $a_2(0,5,-2)$

- Найти любой вектор, ортогональный векторам $a_1(1,2,1)$ и $a_2(-1,3,2)$.
- Пользуясь свойством смешанного произведения, проверить, будут ли компланарны векторы $5a, 4b, 3c$, где
- $a=3i-2j+k, b=2j-3k, c=-3i+2j-k$.

Задание 8

1. На оси ординат найти точку M , равноудаленную от точек $A(1,-4,7)$ и $B(5,6,-5)$.
2. Найти \cos угла между векторами $a_1(1,1,2)$ и $a_2(-2,3,5)$
3. Найти любой вектор, ортогональный векторам $a_1(4,-2,-4)$ и $a_2(6,-3,2)$.
4. Вычислить объем тетраэдра $DABC$, если $A=(2,-3,5), B=(0,2,1), C=(-2,-2,3), D=(3,2,4)$.

Задание 9

- a) На оси ординат найти точку M , равноудаленную от точек $A(0,4)$ и $B(1,1)$.
- b) Найти \cos между векторами AC и AB .
- c) $A(2,1,3), B(5,2,-1), C(-3,3,-3)$.
- d) Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,1,1), B(2,3,4), C(4,3,2)$.
- e) Пользуясь свойством смешанного произведения, проверить, будут ли компланарны векторы: $a_1=(3,-2,1), a_2=(2,1,2), a_3=(3,-1,-2)$.

Задание 10

- 1) Найти координаты точки пересечения отрезка CD с плоскостью YZ : $C(7,0,3)$ и $D(-5, 0, 0)$.
- 2) Найти \cos угла между векторами $a_2=(1,-1,3), a_3=(1,9,-11)$.
- 3) Найти векторное произведение векторов $b=i-j+3k$ и $c=i+9j-11k$.
- 4) Пользуясь свойством смешанного произведения, проверить, будут ли компланарны векторы a, b, c , где $a=3i-2j+k, b=2j-3k, c=-3i+2j-k$.

Задание 11

2. Найти расстояние от начала координат до середины отрезка CD : $C(7,0,3)$ и $D(-5, 0, 0)$.
3. Найти любой вектор, ортогональный вектору $a=(1,-3,-2)$, и проходящий через точку $A(2,3,-1)$
4. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-3,2,7), B(2,-1,8), C(1,-3,4)$.
5. Пользуясь свойством смешанного произведения, проверить, будут ли компланарны векторы $a_1=(2,3,-1), a_2=(1,-1,3), a_3=(1,9,-11)$.

Задание 12

1. Даны точки $A(1,-3,-2), B(8,0,-4), C(4,8,-3)$. Найти такую точку D , чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.
2. Найти любой вектор, ортогональный вектору $a=(2,3,-1)$, и проходящий через точку $A(1,-3,-2)$
3. Пользуясь геометрическим свойством векторного произведения, вычислить площадь треугольника ABC с вершинами $A(2,-1,3), B(1,3,-5), C(0,-2,-3)$.
4. Образуют ли векторы a_1, a_2 и a_3 базис, если $a_1=(3,-2,1), a_2=(2,1,2), a_3=(3,-1,-2)$.

Тема 3: Элементы аналитической геометрии

1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(3,1)$ и наклоненных к прямой $2x+3y-1=0$ под углом 45° .
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1; -2; 0)$ и $M_2(1; 1; 2)$ и перпендикулярной к плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$.
3. Составьте канонические уравнения прямой: $5x + y = 0, 2x + 3y + 5 = 0$.

4. Найти расстояние между параллельными плоскостями:
 $4x + 3y - 5z - 12 = 0$
5. При каком значении параметра t прямые, заданные уравнениями $3tx - 8y + 1 = 0$ и $(1+t)x - 2ty = 4x + 3y - 5z - 8 = 0$
6. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 6 = 0$ и $x + 2y - z + 3 = 0$ и через точку $M(1; 2; 4)$.
7. Основания равнобедренной трапеции равны 10 и 6, а угол при основании равен 60° . Написать уравнения сторон этой трапеции, приняв за оси координат большее основание и ось симметрии трапеции.
8. Найти расстояние от точки $M(5; 1; -1)$ до плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.
9. Найти уравнение общей хорды двух окружностей:
 $x^2 + y^2 = 10$ и $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0$.
10. Составьте уравнение плоскости, зная, что точка $A(1, -1, 3)$ служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.
11. Найти проекцию точки $M(1, 2)$ на прямую $5x + 2y - 20 = 0$.
12. Составьте канонические уравнения прямой:
 $5x + y + z = 0, 2x + 3y - 2z + 5 = 0$.
13. Найти расстояние от точек $A(1, 2)$ и $B(-2, 1)$ до прямой $3x - 4y + 10 = 0$.
14. Даны точки $M_1(0; -1; 3)$ и $M_2(1; 3; 5)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной к вектору $\overline{M_1M_2}$.
15. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x + 4y - 7 = 0, 5x + 3y - 8 = 0$ и через начало координат.
16. Найти расстояние точки $M(4; 3; 0)$ от плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 3; 0), M_2(4; -1; 2)$ и $M_3(3; 0; 1)$.
17. Дан отрезок прямой AB с концами $A(-3, 2)$, и $B(1, -1)$. Написать уравнение прямой, соединяющей середину отрезка с началом координат.
18. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной к плоскостям
 $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
19. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 1)$:
 а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно к данной прямой.
20. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M_1(0; -2; 3)$.
21. Даны уравнения сторон треугольника $3x + 4y - 1 = 0, x - 7y - 17 = 0, 7x + y + 31 = 0$. Доказать, что этот треугольник равнобедренный. Решить задачу при помощи сравнения углов треугольника.
22. Найти проекцию точки $M(5; 2; -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.
23. Составить уравнение прямой, зная её угловой коэффициент k и отрезок "b", отсекаемый ею на оси Oy : а) $k = \frac{2}{3}, b = 3$; б) $k = 3, b = 0$; в) $k = 0, b = -2$; г) $k = -\frac{3}{4}, b = 3$.
24. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 1)$ перпендикулярно к прямой:
25. Написать уравнение прямой параллельной прямым $3x + 2y - 6 = 0, 6x + 4y - 3 = 0$ и проходящей на равных от них расстояниях: $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$
26. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 1; -2)$ и через прямую $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.
27. Найти проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2; -3)$ и $B(-5; 1)$.

28. Проверить, что прямые $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ и $\frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}$ пересекаются, и написать уравнение плоскости, проходящей через них.
29. Найти расстояние между двумя прямыми:
 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.
30. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и образующей с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ угол 60° .
31. Написать уравнения прямых, параллельных прямой $8x-6y+5=0$ и проходящих от нее на расстояниях, равных 2.
32. Дан треугольник с вершинами A(-2,1), B(2,-1), C(4,3). Определить координаты точки пересечения медиан этого треугольника.
33. Доказать, что прямая $\begin{cases} 5x-3y+z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ лежит в плоскости $4x-3y+7z-7=0$.
34. Найти проекцию точки M (2; -1; 3) на прямую $x=3t, y=5t-7, z=2t+2$.
35. Найти точку Q, симметричную точке P (1; 3; -4) относительно плоскости $3x+y-2z=0$.
36. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x-3y+5=0, 3x+2y-7=0$ и одна из его вершин A (2; -3). Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.
37. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x-2y=0$, и уравнение одной из его диагоналей $7x+y-15=0$. Найти вершины прямоугольника.
38. Найти точку M1, симметричную точке M2 (8, -9) относительно прямой, проходящей через точки A (3; -4) и B (-1; -2).
39. Даны середины сторон треугольника M1 (2; 1), M2 (5; 3) и M3 (3; -4). Составить уравнения его сторон.
40. Даны вершины треугольника M1 (2; 1), M2 (-1; -1) и M3 (3; 2). Составить уравнения его высот.
41. Даны вершины треугольника A (1; -1), B (-2; 1) и C (3; 5). Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

Задачи по базовому модулю II

Тема II.1: Производные

Вычисление пределов.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+1}{2x+1}$;

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-2x-3}$;

3. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\cos x}$;

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{3x-4x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln x}{x-4}$;

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+3x+2}$;

7. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{axx}}{x-a}$;

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1-2n}$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-1}{x+1}$;

10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$;

11. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{axx}}{x-a}$;

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-6x}}{3x+1}$

Вычисление производных

1) $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$	16) $y = \arcsin \frac{5x}{2}$
2) $y = \ln(x^2 - 1)$	17) $y = \frac{2}{(1-x)(1+x)}$
3) $y = \frac{8\sqrt[3]{x-2}}{16\sqrt{x-3}}$	18) $y = \frac{\arctg x^2}{x+4}$
4) $y = x^{\sin x}$	19) $y = x^2 - 3x$
5) $y = (x+1)e^{-2x}$	20) $y = \frac{\arctg x}{\arcsin x}$
6) $y = \sqrt{1 + \sin x}$	21) $y = \cos 2x$
7) $y = x^2 \arctg x$	22) $y = \sqrt{x^2 - 3}$
8) $y = \ln(x - \frac{1}{2}x^2)$	23) $y = \frac{1}{9} \arccos \left(\frac{9}{x} \right)$
9) $y = \arcsin x$	24) $y = (\sqrt[3]{x+1}) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right)$
10) $y = \sin x \cos x$	25) $y = ebx$
11) $y = \left(\frac{x}{3-4x^2} \right)^2$	26) $y = \frac{\operatorname{tg} ax}{x-4}$
12) $y = \sqrt[3]{x}$	27) $y = x + 4$
13) $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^3}}$	28) $y = \frac{1-x^3}{1-x^5}$
14) $y = e^{\sin x}$	29) $y = 1 + x^2$
15) $y = \frac{(5-x)(x-1)}{(x+2)}$	30) $y = \frac{1}{x^2+2}$
	31) $y = x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}$

Тема II.2: Интегралы

- 1) Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

- 2) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

- 3) Проинтегрировать по частям. Результат проверить дифференцированием:

$$\int_2^1 \ln x \sqrt{x} dx \quad (\text{принять } u = \ln x, dv = \sqrt{x} dx)$$

- 4) Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{25-x^2}$$

- 5) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{3 \cos x}}$$

- 6) Проинтегрировать по частям. Результат проверить дифференцированием:

$$\int \frac{x-2}{2} \ln x dx \quad \left(\text{принять } u = \ln x, dv = \frac{x-2}{2} dx \right)$$

- 7) Найти интеграл:

$$\int \frac{3}{\sqrt{x^2-4}} dx$$

- 8) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int 2x(x^2+1)^5 dx$$

- 9) Проинтегрировать по частям. Результат проверить дифференцированием:

$$\int \frac{1}{x} \ln \frac{x}{2} dx \quad \left(\text{принять } u = \ln(x/2), dv = \frac{1}{x} dx \right)$$

- 10) Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+36}}$$

- 11) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int x \sqrt{x^2-4} dx$$

- 12) Проинтегрировать по частям. Результат проверить дифференцированием:

$$\int \ln x \cdot dx \quad \left(\text{принять } u = \ln x, dv = dx \right)$$

- 13) Найти интеграл:

$$\int \frac{3-x^2}{4-x^2} dx$$

- 14) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

- 15) Проинтегрировать по частям. Результат проверить дифференцированием:

$$\int \frac{1}{x} \ln \frac{x}{2} dx \quad \left(\text{принять } u = \ln(x/2), dv = \frac{1}{x} dx \right)$$

- 16) Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{5+5x^2}$$

- 17) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{4x+1}{(x^2+x+2)^3} dx$$

18) Проинтегрировать по частям. Результат проверить дифференцированием:

$$\int x^2 e^{-x^2} dx \quad (\text{принять } u=x, dv=x e^{-x^2} dx)$$

19) Найти интеграл:

$$\int \frac{(\sqrt{x+2})^2}{\sqrt{x}} dx$$

20) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int e^{-x^2} x dx$$

21) Проинтегрировать по частям. Результат проверить дифференцированием:

$$\int x \arctg x dx \quad (\text{принять } u=\arctg x, dv=x dx)$$

22) Найти интеграл:

$$\int \frac{4\sqrt{x^3} - \sqrt{x^5}}{\sqrt{x}} dx$$

23) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{4x+3}{3x+4x^2} dx$$

24) Проинтегрировать по частям. Результат проверить дифференцированием:

$$\int \left(\frac{1}{x} - x + 1 \right) \ln x dx \quad (\text{принять } u=\ln x, dv=\left(\frac{1}{x} - x + 1 \right) dx)$$

25) Найти интеграл:

$$\int \left(\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} \right) dx$$

26) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x} dx$$

27) Проинтегрировать по частям. Результат проверить дифференцированием:

$$\int \arccos x dx \quad (\text{принять } u=\arccos x, dv=dx)$$

28) Найти интеграл:

$$\int (1+ax)^2 dx$$

29) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

30) Проинтегрировать по частям. Результат проверить дифференцированием:

$$\int \frac{1}{x} \ln \frac{x}{2} dx \quad (\text{принять } u=\ln(x/2), dv=\frac{1}{x} dx)$$

31) Найти интеграл:

$$\int (x^{1/3} - 3x^2 + 5) dx$$

- 32) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{\arctg x}}{x^2+1} dx$$

- 33) Проинтегрировать по частям. Результат проверить дифференцированием:

$$\int \frac{1}{x} \ln \frac{x}{2} \cdot dx \quad \left(\text{принять } u = \ln(x/2), dv = \frac{1}{x} dx \right)$$

- 34) Найти интеграл:

$$\int e^{5-x} dx$$

- 35) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{\arctg x}{x^2+1} dx$$

- 36) Проинтегрировать по частям, пользуясь рекуррентным соотношением. Результат проверить дифференцированием:

$$\int x^2 \cos x dx \quad \left(\text{принять } dv = \cos x dx, u = x^2 \text{ и т. д.} \right)$$

- 37) Найти интеграл:

$$\int e^x - 1 dx$$

- 38) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{1}{\arcsin x} dx$$

- 39) Проинтегрировать по частям, пользуясь рекуррентным соотношением. Результат проверить дифференцированием:

$$\int x^4 \cos x dx \quad \left(\text{принять } dv = \cos x dx, u = x^4 \text{ и т. д.} \right)$$

- 40) Найти интеграл:

$$\int 2 \cos(x-4) dx$$

- 41) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$$

- 42) Проинтегрировать по частям, пользуясь рекуррентным соотношением. Результат проверить дифференцированием:

$$\int x^2 \sin x dx \quad \left(\text{принять } dv = \sin x dx, u = x^2 \text{ и т. д.} \right)$$

- 43) Найти интеграл:

$$\int \frac{2 \cos 2x}{\cos^2 x} dx$$

- 44) Путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена найти интеграл:

$$\int \frac{1}{x^2+4x-5} dx$$

- 45) Проинтегрировать по частям, пользуясь рекуррентным соотношением. Результат проверить дифференцированием:

$$\int x^4 \sin x dx \quad \left(\text{принять } dv = \sin x dx, u = x^4 \text{ и т. д.} \right)$$

46) Найти интеграл:

$$\int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} dx$$

47) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \cos^2 \sin x dx$$

48) Путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена найти интеграл:

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx$$

49) Найти интеграл:

$$\int \frac{\sin^2 x - 6}{\sin^2 x} dx$$

50) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$$

51) Путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена найти интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{8x - x^2}} dx$$

52) Найти интеграл:

$$\int \frac{4 \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx$$

53) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$$

54) Путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена найти интеграл:

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x} dx$$

55) Найти интеграл:

$$\int \frac{1 - \sin x}{\sin^2 x} dx$$

56) Методом замены переменной (занесением под знак дифференциала) вычислить интеграл:

$$\int \sqrt{(x^2 + 1)^5} dx$$

Тема II.3: Дифференциальные уравнения

I. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = f(x)$$

и частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y = y_0$ при $x = x_0$.

1) $y' + 2x \cdot y = 2x e^{-x^2}$

$y_0 = 5, x_0 = 0$

2) $(1+x^2)y' - 2x \cdot y = (1+x^2)^2$

$y_0 = 5, x_0 = -2$

3) $y' - 4x \cdot y = x$

$y_0 = 3/4, x_0 = 0$

4) $y' + y = e^{-x}(1+x^2)$

$y_0 = 2, x_0 = 0$

5) $x \cdot y' - 3y = x^4 e^x$

$y_0 = e, x_0 = 1$

6) $xy' + 2y = 1/x$	$y_0 = 1, x_0 = 3$
7) $y' - (\sin x) \cdot y = e^{-\cos x} \sin 2x$	$y_0 = 3, x_0 = \pi/2$
8) $y' \cos x - 2y \cdot \sin x = 2$	$y_0 = 3, x_0 = 0$
9) $xy' + y = 2x/(1+x^2)$	$y_0 = 0, x_0 = 1$
10) $y' \cos x + \sin x \cdot y = 1$	$y_0 = 2, x_0 = 0$

II. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

и частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y = y_0, y' = y'_0$ при $x = x_0 = 0$.

1. $y'' + 4y' + 4y = 2e^x;$	$y_0 = -2; y'_0 = -2$
2. $y'' - 4y' + 4y = -x^2 + 3x;$	$y_0 = 3; y'_0 = -4/3$
3. $y'' - 5y' + 6y = 2 \cos x;$	$y_0 = 3; y'_0 = 1/2$
4. $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1;$	$y_0 = -3; y'_0 = 1/5$
5. $y'' + 2y' - 8y = 3 \sin x;$	$y_0 = -1; y'_0 = -3/2$
6. $y'' - 6y' + 9y = \cos 2x;$	$y_0 = 1; y'_0 = 1/3$
7. $y'' - 4y' + 5y = 2e^{3x};$	$y_0 = 2; y'_0 = -3/4$
8. $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x};$	$y_0 = 2; y'_0 = -1$
9. $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x;$	$y_0 = 0; y'_0 = 3/4$
10. $y'' + y' - 6y = x^2 - 1;$	$y_0 = 0; y'_0 = 1$

Задачи по базовому модулю III

Тема III.1: Свойства вероятностей случайных событий

- В урне содержится 5 черных и 4 белых шара. Наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из урны, окажется черным.
- В урне содержится 8 черных и 4 белых шара. Наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из урны, окажется белым.
- В урне содержится 9 черных и 4 белых шара. Наудачу извлечены два шара. Найти вероятность того, что они оба окажутся черными.
- В урне содержится 7 черных и 3 белых шара. Наудачу извлечены два шара. Найти вероятность того, что они оба окажутся белыми.
- В урне содержится 5 черных и 4 белых шара. Наудачу извлечены два шара. Найти вероятность того, что они окажутся разного цвета.
- В каждой из двух урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны, окажется черным.
- В каждой из двух урн содержится 6 черных и 7 белых шаров. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны, окажется белым.
- В каждой из двух урн содержится 8 черных и 2 белых шара. Из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в первую. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из первой урны, окажется черным.
- Студент знает 40 из 50 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает 2 вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете.
- Две команды по 20 спортсменов производят жеребьевку для присвоения номеров участникам соревнований. Два брата входят в состав различных команд. Найти вероятность того, что братья будут участвовать в соревнованиях под одним и тем же номером 18.
- Две перфораторщицы набили по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку равна 0,1; для второй перфораторщицы эта вероятность равна 0,2. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась вторая перфораторщица.
- Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна

P_1 ; для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны P_2 и P_3 . Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков поразит цель; б) только два стрелка поразят цель; в) все три стрелка поразят цель, если:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| $P_1=0,6 P_2=0,9 P_3=0,8$ | $P_1=0,8 P_2=0,8 P_3=0,9$ |
| $P_1=0,7 P_2=0,8 P_3=0,9$ | $P_1=0,7 P_2=0,5 P_3=0,4$ |
| $P_1=0,8 P_2=0,9 P_3=0,9$ | $P_1=0,4 P_2=0,8 P_3=0,9$ |
| $P_1=0,3 P_2=0,9 P_3=0,7$ | $P_1=0,7 P_2=0,7 P_3=0,9$ |
| $P_1=0,5 P_2=0,5 P_3=0,5$ | $P_1=0,9 P_2=0,8 P_3=0,9$ |

10) Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна P_1 ; для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны P_2 и P_3 . Найти вероятность того, что: а) хотя бы один снаряд попадет в цель; б) хотя бы два снаряда попадут в цель, если:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| $P_1=0,6 P_2=0,9 P_3=0,8$ | $P_1=0,8 P_2=0,8 P_3=0,9$ |
| $P_1=0,7 P_2=0,8 P_3=0,9$ | $P_1=0,7 P_2=0,5 P_3=0,4$ |
| $P_1=0,8 P_2=0,9 P_3=0,9$ | $P_1=0,4 P_2=0,8 P_3=0,9$ |
| $P_1=0,3 P_2=0,9 P_3=0,7$ | $P_1=0,7 P_2=0,7 P_3=0,9$ |
| $P_1=0,5 P_2=0,5 P_3=0,5$ | |
| $P_1=0,9 P_2=0,8 P_3=0,9$ | |

11) Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна P_1 и P_2 соответственно. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень; б) оба стрелка промахнутся; в) только один стрелок поразит мишень; г) хотя бы один из стрелков поразит мишень, если:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| $P_1=0,5 P_2=0,5$ | $P_1=0,9 P_2=0,8$ |
| $P_1=0,4 P_2=0,8$ | $P_1=0,6 P_2=0,9$ |
| $P_1=0,8 P_2=0,8$ | $P_1=0,3 P_2=0,9$ |
| $P_1=0,7 P_2=0,5$ | $P_1=0,7 P_2=0,8$ |
| $P_1=0,7 P_2=0,7$ | $P_1=0,8 P_2=0,9$ |

12) Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна P . Найти вероятность четырех попаданий при пяти выстрелах, если:

- | | |
|----------|----------|
| $P=0,99$ | $P=0,85$ |
| $P=0,98$ | $P=0,80$ |
| $P=0,95$ | $P=0,75$ |
| $P=0,90$ | $P=0,70$ |

13) Из аэровокзала отправились 2 автобуса-экспресса к трапам самолетов. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса в аэропорт равна P . Найти вероятность того, что: а) оба автобуса придут вовремя б)оба автобуса опоздают; в) только один автобус придет вовремя; г) хотя бы один автобус придет вовремя., если:

- | | |
|----------|----------|
| $P=0,99$ | $P=0,85$ |
| $P=0,98$ | $P=0,80$ |
| $P=0,95$ | $P=0,75$ |
| $P=0,90$ | $P=0,70$ |

Тема III.2-3: Элементы математической статистики

Обработка результатов измерений

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины X по данному закону ее распределения, заданному в виде таблицы:

X_i	15	19	24	27	30
p_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

X_i	1	2	3	4	5
-------	---	---	---	---	---

p_i	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4
-------	-----	-----	-----	-----	-----

X_i	5	7	9	11	13
-------	---	---	---	----	----

p_i	0,2	0,2	0,2	0,1	0,3
-------	-----	-----	-----	-----	-----

X_i	2	4	6	7	13
-------	---	---	---	---	----

p_i	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3
-------	-----	-----	-----	-----	-----

X_i	9	10	11	12	13
-------	---	----	----	----	----

p_i	0,3	0,2	0,1	0,1	0,3
-------	-----	-----	-----	-----	-----

X_i	0,8	0,9	1,1	1,5	1,7
-------	-----	-----	-----	-----	-----

p_i	0,1	0,2	0,1	0,1	0,5
-------	-----	-----	-----	-----	-----

X_i	2,5	3,5	4,0	4,5	5,0
-------	-----	-----	-----	-----	-----

p_i	0,5	0,1	0,1	0,1	0,2
-------	-----	-----	-----	-----	-----

X_i	1,5	1,9	2,4	2,7	3,0
-------	-----	-----	-----	-----	-----

p_i	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2
-------	-----	-----	-----	-----	-----

X_i	0,15	0,19	0,24	0,27	0,30
-------	------	------	------	------	------

p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
-------	-----	-----	-----	-----	-----

X_i	900	1090	1024	1027	1030
-------	-----	------	------	------	------

p_i	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2
-------	-----	-----	-----	-----	-----

Над случайной величиной, распределенной по нормальному закону, произведено N опытов. Получены оценочные значения математического ожидания - \bar{X} и среднеквадратического отклонения - σ . Найти *доверительный интервал* с заданной надежностью β .

1) $N=10, \bar{X}=4.6, \sigma=1.2, \beta=0.99$

- 2) $N=20, \bar{X}=5.6, \sigma=1.05, \beta=0.99$
- 3) $N=40, \bar{X}=55, \sigma=12, \beta=0.95$
- 4) $N=50, \bar{X}=556, \sigma=12, \beta=0.95$
- 5) $N=70, \bar{X}=88, \sigma=12, \beta=0.90$
- 6) $N=80, \bar{X}=7.05, \sigma=2.02, \beta=0.90$
- 7) $N=100, \bar{X}=66.2, \sigma=5.4, \beta=0.8$
- 8) $N=100, \bar{X}=908, \sigma=24, \beta=0.8$
- 9) $N=100, \bar{X}=0.05, \sigma=0.01, \beta=0.99$
- 10) $N=100, \bar{X}=0.89, \sigma=0.18, \beta=0.95$

Над случайной величиной, распределенной по нормальному закону, произведено 10 опытов. Получить оценочные значения *математического ожидания* - \bar{X} , *среднеквадратического отклонения* - σ . Построить *доверительный интервал* I_β с доверительной вероятностью 0,95.

№ опыта - i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	10.1	10.5	10.1	10.1	10.2	10.3	9.8	9.9	10.0	10.3

№ опыта - i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	101	105	101	101	102	103	98	99	100	113

№ опыта - i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	0.55	0.56	0.53	0.50	0.49	0.52	0.51	0.58	0.53	0.51

№ опыта - i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	66	65	63	64	68	61	69	62	66	65

№ опыта - i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	562	580	577	590	569	587	591	568	576	588

№ опыта - i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	12	13	13	13	15	16	12	11	10	15

№ опыта - i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	0.001	0.002	-0.004	-0.003	0.007	-0.006	0.004	-0.002	0.004	0.004

№ опыта - i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	25	26	28	23	24	26	29	25	21	26

№ опыта - i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	448	449	442	446	447	445	441	442	442	445

Оценить *совместное распределение вероятностей* величин X и Y (Найти коэффициент корреляции X и Y):

Y_i	448	449	442	446	447	445	441	442	442	445
X_i	0.2	0.3	0.1	0.3	0.4	0.1	0.2	0.2	0.1	0.3

Y_i	4	6	2	6	7	3	4	5	1	6
X_i	0.2	0.3	0.1	0.3	0.4	0.1	0.2	0.2	0.1	0.3

Y_i	5	9	3	8	11	3	6	7	4	10
X_i	0.2	0.3	0.1	0.3	0.4	0.1	0.2	0.2	0.1	0.3

Y_i	448	449	442	446	447	445	441	442	442	445
X_i	0.001	0.002	-0.004	-0.003	0.007	-0.006	0.004	-0.002	0.004	0.004

Y_i	0.001	0.002	-0.004	-0.003	0.007	-0.006	0.004	-0.002	0.004	0.004
X_i	0.2	0.3	-0.8	-0.6	0.14	-0.1	0.7	-0.4	0.8	0.9

Y_i	25	26	28	23	24	26	29	25	21	26
X_i	2	2	3	2	2	3	3	3	2	3

Y_i	25	26	28	23	24	26	29	25	21	26
X_i	0.2	0.3	0.3	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.2	0.3

Y_i	12	13	13	13	15	16	12	11	10	15
X_i	1.2	1.3	1.1	1.3	1.4	1.1	1.2	1.2	1.1	1.3

Y_i	48	49	52	50	59	64	50	45	42	61
X_i	12	13	13	13	15	16	12	11	10	15

Найти вероятность попадания величины X , распределенной по нормальному закону, в заданный интервал, если известны параметры её распределения:

<i>Интервал</i>	<i>Параметры распределения</i>	
$(4.7; \infty)$	$a=4.6$	$\sigma=1.2$
$(4.5; 5.5)$	$a=5.6$	$\sigma=1.0$
$(57; 60)$	$a=55$	$\sigma=12$
$(550; 560)$	$a=556$	$\sigma=12$
$(90; 95)$	$a=88$	$\sigma=12$
$(6.8; 6.9)$	$a=7.05$	$\sigma=2.02$
$(70; 71)$	$a=66.2$	$\sigma=5.4$
$(850; 950)$	$a=908$	$\sigma=24$
$(-\infty; 0.04)$	$a=0.05$	$\sigma=0.01$
$(0.9; \infty)$	$a=0.89$	$\sigma=0.18$

Практикоориентированные задания

Расчет неизвестных параметров распределения случайной величины.

Цель работы: исследование распределения случайной величины.

Теоретическая часть:

Над величиной X производятся n независимых опытов, давших результаты X_1, X_2, \dots, X_n . Требуется найти состоятельные и несмещенные оценки для математического ожидания m и среднеквадратического отклонения s . В качестве оценки мат. ожидания принимается *среднее арифметическое значение* величины X (средневзвешенное значение). Поскольку данные обычно записывают подряд, не разделяя на частоты, то это выражение проще записать в виде:

$$m_X = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad (1)$$

В качестве оценки *среднеквадратического отклонения* выступает величина s которая без учета частот на практике используется в виде:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2}{n-1}} \quad (2)$$

Доверительный интервал I_β . Доверительная вероятность β (надежность).

Если требуется построить доверительный интервал для математического ожидания величины X , необходимо найти такое число $t=t(\beta)$, чтобы интеграл вероятности

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-z^2/2} dz$$

равнялся β . Этому требованию отвечает интервал

$$I_\beta = \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t, m + \frac{s}{\sqrt{n}} t \right)$$

который накрывает истинное значение математического ожидания \bar{X} с вероятностью β .

Так как на опыте математическое ожидание часто неизвестно, то для доверительного интервала используется выражение:

$$I_\beta = \left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t, \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t \right) \quad (3)$$

t_β находится с помощью таблицы значений для t -распределения Стьюдента (см. приложение 2), которую можно найти в любой книге по Математической статистике или рекомендациях к лабораторным работам, \bar{X} находится по формуле (1), а s – по формуле (2).

Практическая часть. Определение основных параметров распределения случайной величины – среднего значения (мат. ожидания) \bar{X} , среднеквадратического отклонения s и доверительного интервала - I_β при заданной надежности **0,95**.

Для расчетов использовать не менее 10 измерений (или иных эмпирических данных).

Рекомендуется придерживаться следующего плана:

1) Сформулировать конкретную цель работы (с описанием измеряемой величины) и обрисовать схему эксперимента.

2) Провести экспериментальные измерения или подсчеты и результаты поместить в таблицу (см. также пример):

№ опыта i	Значение измеряемой величины X_i	$(X_i - \bar{X})^2$
1	2,50	...
2	2,45	...
3	2,39	...
...

- 3) Найти среднее значение по формуле (1).
- 4) Найти среднеквадратичное отклонение по формуле (2).
- 5) По таблице из приложения находим значение t_{β} для $k=n-1$ и $\beta=0,95$.
- 6) Находим доверительный интервал и результат записываем в виде:

$$X = \bar{X} \pm t_{\beta} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

что является другой формой записи I_{β} , или в виде (3).

7) Посчитать вероятность попадания X в произвольный интервал $[x_1, x_2]$, который определить самостоятельно из условий эксперимента. Для этого предположим, что наша величина подчиняется нормальному закону распределения вероятностей; в качестве a может быть использовано значение \bar{X} , а в качестве среднеквадратического отклонения $\sigma - s$. Вероятность попадания случайной величины X в интервал $[x_1, x_2]$ равна

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (4)$$

где $t_1 = \frac{x_1 - \bar{X}}{s}, t_2 = \frac{x_2 - \bar{X}}{s}$ (5)

а $\Phi(t_1)$ и $\Phi(t_2)$ находятся по таблице для интегралов вероятности Приложения 1.

8) Записать вывод.

Пример. Спортсменом проведена серия из 10 прыжков в длину с разбега с результатами: 8.05м, 8м, 7.95м, 8.04м, 8.02м, 8, 8.01м, 7.98м, 7.96м, 7.99м.

1. Рассчитать неизвестные характеристики распределения величины X (длины прыжка) – *среднее значение и среднеквадратическое отклонение.*
2. Определить доверительный интервал с надежностью $\beta = 0,95$.
3. Оценить вероятность того, что прыгун в контрольном испытании продемонстрирует результат более 8,04 м.

Решение. Составим следующую таблицу:

№ опыта, i	Длина прыжка (м) X_i	$(X_i - \bar{X})^2 \cdot 10^4$
1	8,05	25
2	8,00	0
3	7,95	25
4	8,04	16
5	8,02	4
6	8,00	0
7	8,01	1
8	7,98	4
9	7,96	16

10	7,99	1
10	80	92

По формулам (1), (2) получим следующие оценки для математического ожидания и среднеквадратического отклонения:

$$\bar{X} = 8,00$$

~~$$s = 0,0320$$~~

отсюда $s = 0,0320$.

Построим доверительный интервал, согласно (3) для значения доверительной вероятности 0,95, находя коэффициент Стьюдента по таблице для данной надежности и k равного $n-1 = 9$:

$$\beta = 0,95$$

$$t_{\beta} = 2,26$$

~~$$t_{\beta} = 2,26$$~~

Найдем вероятность того, что прыгун в очередном испытании «улетит» более чем на 8м 4см (то есть попадет в интервал $[8,04; \infty)$).

Для этого в качестве мат. ожидания и среднеквадратического отклонения возьмем их оценки - $\bar{X} = 8,00$ и $s = 0,0320$, затем пересчитаем границы интервала по формулам (4), (5).

Получим:


$$t_1 = \frac{8,04 - \bar{X}}{s}, \quad t_2 = \infty,$$

Искомая вероятность может быть оценена как

~~$$P(t_1 < T < t_2)$$~~, или $\approx 11\%$.

Практикоориентированные задания

Лабораторная работа. Расчет генеральных параметров распределения *оп* выборочным данным в ЭТ

Подготовьте в электронных таблицах мини-программу по расчету описательной статистики для ряда эмпирических данных с максимальным объемом выборки – 100, для этого в следующие ячейки введите формулы или функции (мастер функций находится в строке формул -  либо с помощью команды главного меню *Вставка-Функция...*), рассчитывающие различные статистические параметры:

Статистический параметр	Ячейка диап-зон	Вводимая информация
<i>Исходные данные</i>	A2:A102	Отформатируйте диапазон неяркой зелёной заливкой и рамкой. В A1 напишите «Данные выборки». Введите в столбец данные вашей выборки (не более 100, если необходимо обрабатывать больший массив, используйте здесь и далее диапазон необходимых размеров, например A2:A502). В конце работы приводится пример выборочных данных
<i>Объем выборки</i>	C2	Функция СЧЕТ (COUNT) из категории «Статистические», которая подсчитывает количество числовых значений в исследуемом диапазоне, игнорируя иные типы данных. В поле «значение 1» указать диапазон A2:A102
<i>Максимальное значение</i>	C3	МАКС (MAX) из категории «Статистические» – вычисляет максимальное значение из списка аргументов. В поле «значение 1» указать диапазон A2:A102
<i>Минимальное значение</i>	C4	МИН (MIN) – из категории «Статистические» вычисляет минимальное значение из списка аргументов. В поле «значение 1» указать диапазон A2:A102
<i>Размах выборки</i>	C5	Введите формулу: =C3-C4
<i>Мода</i>	C6	МОДА (MODE) – из категории «Статистические» вычисляет выборочную моду. В поле «число 1» указать диапазон A2:A102
<i>Медиана</i>	C7	МЕДИАНА (MEDIAN) – из категории «Статистические» вычисляет выборочную медиану. В поле «число 1» указать диапазон A2:A102
<i>Среднее выборочное</i>	C8	Функция СРЗНАЧ (или AVERAGE) (Вставка –Функция – из категории «Статистические»). В поле «значение 1» указать диапазон A2:A102

Среднеквадратическое (стандартное) отклонения	C9	Функция СТАНДОТКЛОН (STDEV) (Вставка – Функция – из категории «Статистические»). В поле «значение 1» указать диапазон A2:A102
Ошибка репрезентативности (статистическая ошибка)	C10	Рассчитывается по формуле: $\Delta m_x = \pm \frac{s}{\sqrt{n}}$ <p>где n – объем выборки, s – среднеквадратическое отклонение. Для этого в ячейку введите формулу: =C9/C2^(1/2)</p>
Коэффициент вариации	C11	Рассчитывается по формуле: $V = \frac{s}{\bar{X}} \cdot 100 \%$ <p>где \bar{X} – среднее выборочное из ячейки C8, s – среднеквадратическое отклонение из C9. Для этого в ячейку введите формулу: =C9/C8.</p> <p>Отформатируйте ячейку процентами (панель <i>Форматирование</i> – кнопка <input type="checkbox"/>%, или команда главного меню <i>Формат – ячейки</i> – вкладка «число», формат «процентный»)</p>
Расчет доверительного интервала.	C12	Функция ДОВЕРИТ (CONFIDENCE) (Вставка/Функция/CONFIDENCE из категории «Статистические»). Альфа — это уровень значимости. Например, альфа, равная 0,05 означает 95%-й уровень надежности
Нижняя граница	C13	Рассчитывается как Среднее значение минус величина, полученная с помощью функции «ДОВЕРИТ (CONFIDENCE)», то есть по формуле: =C8-C12
Верхняя граница	C14	Рассчитывается как Среднее значение плюс величина, полученная с помощью функции «ДОВЕРИТ (CONFIDENCE)», то есть по формуле: =C8+C12
В столбце В напротив каждой заполненной ячейки столбца С напишите названия рассчитанных величин. Оформите «шапку» полученной таблицы, сделайте рамку, залейте неярким розовым цветом.		
Описание данных (розовую табличку) можно продолжить, рассчитав такие характеристики распределения, как 1,3, квартили, коэффициенты асимметрии и эксцесса. Описания этих функций приводятся ниже.		
Дополнительное задание:		

<i>Асимметрия</i>	С15	<p>Значение асимметрии A рассчитывается следующим образом:</p> $A \approx \frac{1}{ns^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$ <p>для расчета A используется функция СКОС/ SKEW</p>
<i>Эксцесс</i>	С16	<p>Значение эксцесса E рассчитывается по формуле:</p> $A \approx \frac{1}{ns^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$ <p>для расчета эксцесса в ЭТ используется статистическая функция ЭКСЦЕСС/ KURT</p>

Запишите в тетрадь названия всех использованных статистических функций ЭТ.

Лабораторная работа. Графическое изображение статистических данных (аналитические графики математической статистики)

Постройте интервальный (дискретный) выборочный ряд (статистическое распределения выборки) – см. Алгоритм построения интервального ряда выборки

Статистический параметр	Ячейка (Диапазон)	Вводимая информация												
размах выборки – R	C5	См. Лабораторную работу 1												
Количество классов (интервалов) – k	E3	<p>По формуле Стерджесса: $n = 1 + 3,322 \lg (N)$, результат необходимо округлить до целых значений, используя функцию ОКРУГЛВВЕРХ (ROUNDUP) из категории математические, в строке количество при определении аргумента – число знаков после запятой, в нашем случае равное 0, то есть до целых долей: =ОКРУГЛВВЕРХ(1+3,322* LOG(C2;10);0) в CALC формула будет выглядеть так: =ROUNDUP((1+3,31*LOG10(C2));0). Или воспользуйтесь таблицей:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Объем выборки, n</th> <th>Число интервалов, k</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>25–40</td> <td>5–6</td> </tr> <tr> <td>40–60</td> <td>6–8</td> </tr> <tr> <td>60–100</td> <td>7–10</td> </tr> <tr> <td>100–200</td> <td>8–12</td> </tr> <tr> <td>Больше 200</td> <td>10–15</td> </tr> </tbody> </table>	Объем выборки, n	Число интервалов, k	25–40	5–6	40–60	6–8	60–100	7–10	100–200	8–12	Больше 200	10–15
Объем выборки, n	Число интервалов, k													
25–40	5–6													
40–60	6–8													
60–100	7–10													
100–200	8–12													
Больше 200	10–15													
Интервал класса – h	E4	<p>Размах выборки R делим на количество классов k: =C5/E3</p> <p>При необходимости округлить, исходя их характера выборки</p>												
Номер интервала (класса)	G2:G(k+1)	Введите порядковые номера от 1 до k												
Нижние границы интервалов	H2:H(k+1)	<p>Нижняя граница первого интервала – минимальное значение выборки (ячейка C4): =C4, нижняя граница 2-го интервала – это верхняя граница первого: =I2 и т.д.</p> <p>Формулу можно копировать на нижний диапазон</p>												

<i>Верхние границы интервалов</i>	I2:I(k+1)	Верхняя граница – это нижняя граница + интервал классов из ячейки E4, например, для первого интервала: =H2+E\$4 (ячейка со значением интервала класса является абсолютной ссылкой и должна быть закреплена знаком \$) Формулу можно копировать на нижний диапазон. Чтобы верхняя граница не включалась в подсчет, можно его уменьшить на сотую долю значения (зависит от точности измерений)
<i>Средние значения интервалов (классов)</i>	J2:J(k+1)	Среднее арифметическое верхней и нижней границы интервала. Формулу скопировать на нижний диапазон
<i>Накопленная частота интервалов (классов)</i>	K2:K(k+1)	Это можно производить вручную: считать количество значений до верхней границы каждого интервала. Можно автоматизировать процесс, используя функцию из категории «Статистические» ЧАСТОТА/FREQUENCY, или из категории «математические» СЧЕТЕСЛИ, или COUNTIF. Самостоятельно предложите механизм их использования. Формулу можно копировать на нижний диапазон
<i>Частоты классов - n_i (интервала)</i>	L2:L(k+1)	Это можно производить вручную: считать количество значений, заключенных в рамках каждого класса от его нижней до верхней границы. Можно автоматизировать процесс, используя функцию из категории «Статистические» ЧАСТОТА/FREQUENCY, или из категории «математические» СЧЕТЕСЛИ или COUNTIF, а также накопленные частоты интервалов из столбца К. Формулу можно копировать на нижний диапазон
Оформить таблицу интервалов классов и их частот: сделать «шапку», рамку, залить неярким голубым цветом		
Построение дискретного выборочного ряда происходит аналогичным образом с тем отличием, что вместо среднего значения класса берутся отдельные значения варианты выборки (которых должно быть не более 10) и подсчитываются их частоты		

Запишите в тетрадь названия всех использованных функций ЭТ.

Воспользуйтесь *Мастером диаграмм* ЭТ.

Для дискретного вариационного ряда постройте Полигон частот. Для этого поместите на диаграмму зависимость частоты варианты от ранжированных значений варианты (вариационный ряд постройте самостоятельно). Используйте *Точечную диаграмму (Excel)/диаграмму XY (Calc)*. Не забудьте дополнить ряды данных слева от нижнего значения варианты и справа от верхнего нулевыми значениями частот.

Для интервального ряда:

Поместите на диаграмму данные зависимости частоты класса (данные столбца L), от среднего значения класса (соответствующие данные столбца J). Используйте тип диаграммы *Гистограмма*.

Для построения кумуляты используйте данные столбцов J и K. Используйте *Точечную диаграмму (Excel)/диаграмму XY (Calc)*.

Для каждой диаграммы оформите заголовки, подпишите оси, подберите оптимальный масштаб, при необходимости поместите на диаграмму таблицу с данными.

Изучите полученные диаграммы:

- если гистограмма по своему виду близка к нормальному распределению, то группа однородна;
- если графики низкие и растянутые, то группа, возможно, однородна, но некомпактна;
- если графики имеют 2 и более вершины, то группа неоднородна по данному признаку и ее необходимо разбить на подгруппы, чтобы с каждой работать индивидуально.

Данный файл можно использовать как мини-программу для обработки данных любой статистической выборки объемом до 100.

Расчет неизвестных параметров распределения случайной величины.

Цель работы: исследование распределения случайной величины.

Теоретическая часть:

Над величиной X производятся n независимых опытов, давших результаты X_1, X_2, \dots, X_n . Требуется найти состоятельные и несмещенные оценки для математического ожидания m и среднеквадратического отклонения s . В качестве оценки мат. ожидания принимается *среднее арифметическое значение* величины X (средневзвешенное значение). Поскольку данные обычно записывают подряд, не разделяя на частоты, то это выражение проще записать в виде:

$$\boxed{\tilde{m} = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}} \quad (1)$$

В качестве оценки *среднеквадратического отклонения* выступает величина s которая без учета частот на практике используется в виде:

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \quad (2)$$

Доверительный интервал I_β . Доверительная вероятность β (надежность).

Если требуется построить доверительный интервал для математического ожидания величины X , необходимо найти такое число $t=t(\beta)$, чтобы интеграл вероятности

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2} dx$$

равнялся β . Этому требованию отвечает интервал

$$I_\beta = \left(\tilde{m} - t_\beta \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}; \tilde{m} + t_\beta \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}} \right),$$

который покрывает истинное значение математического ожидания X с вероятностью β .

Так как на опыте математическое ожидание часто неизвестно, то для доверительного интервала используется выражение:

$$\boxed{I_\beta = \left(\bar{X} - t_\beta \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_\beta \frac{s}{\sqrt{n}} \right)} \quad (3)$$

t_β находится с помощью таблицы значений для t -распределения Стьюдента (см. приложение 2), которую можно найти в любой книге по Математической статистике или рекомендациях к лабораторным работам, \bar{X} находится по формуле (1), а s – по формуле (2).

Практическая часть. Определение основных параметров распределения случайной величины – среднего значения (мат. ожидания) \bar{X} , среднеквадратического отклонения s и доверительного интервала - I_β при заданной надежности **0,95**.

Для расчетов использовать не менее 10 измерений (или иных эмпирических данных).

Рекомендуется придерживаться следующего плана:

- 1) Сформулировать конкретную цель работы (с описанием измеряемой величины) и обрисовать схему эксперимента.
- 2) Провести экспериментальные измерения или подсчеты и результаты поместить в таблицу (см. также пример):

№ опыта <i>i</i>	Значение измеряемой величины X_i	$\frac{(X_i - \bar{X})^2}{2}$
1	2,50	...
2	2,45	...
3	2,39	...
...

- 3) Найти среднее значение по формуле (1).
- 4) Найти среднеквадратичное отклонение по формуле (2).
- 5) По таблице из приложения находим значение t_β для $k=n-1$ и $\beta = 0,95$.
- 6) Находим доверительный интервал и результат записываем в виде:

$$X = \bar{X} \pm t_\beta \frac{s}{\sqrt{n}}$$

что является другой формой записи I_β , или в виде (3).

7) Посчитать вероятность попадания X в произвольный интервал $[x_1, x_2]$, который определить самостоятельно из условий эксперимента. Для этого предположим, что наша величина подчиняется нормальному закону распределения вероятностей; в качестве a может быть использовано значение \bar{X} , а в качестве среднеквадратического отклонения $\sigma - s$. Вероятность попадания случайной величины X в интервал $[x_1, x_2]$ равна

$$\Phi\left(\frac{x_2 - \bar{X}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \bar{X}}{s}\right) \quad (4)$$

где $t_1 = \frac{x_1 - \bar{X}}{s}$, $t_2 = \frac{x_2 - \bar{X}}{s}$ (5)

а $\Phi(t_1)$ и $\Phi(t_2)$ находятся по таблице для интегралов вероятности Приложения 1.

8) Записать вывод.

Пример. Спортсменом проведена серия из 10 прыжков в длину с разбега с результатами: 8.05м, 8м, 7.95м, 8.04м, 8.02м, 8, 8.01м, 7.98м, 7.96м, 7.99м.

11) Рассчитать неизвестные характеристики распределения величины X (длины прыжка) – *среднее значение и среднеквадратическое отклонение.*

12) Определить доверительный интервал с надежностью $\beta = 0,95$.

13) Оценить вероятность того, что прыгун в контрольном испытании продемонстрирует результат более 8,04 м.

Решение. Составим следующую таблицу:

№ опыта, <i>i</i>	Длина прыжка (м) X_i	$\frac{(X_i - \bar{X})^2}{2}$ m^2 $\cdot 10^{-4}$
1	8,05	25
2	8,00	0
3	7,95	25
4	8,04	16
5	8,02	4
6	8,00	0
7	8,01	1
8	7,98	4
9	7,96	16

10	7,99	1
10	80	92

По формулам (1), (2) получим следующие оценки для математического ожидания и среднеквадратического отклонения:

$$\bar{X} = 8,00$$

$$s^2 = \frac{1}{10-1} \left[\sum_{i=1}^{10} X_i^2 - 10 \cdot (8)^2 \right] = \frac{1}{9} (640,0092 - 640,0000) \approx 0,0010,$$

отсюда $s = 0,0320$.

Построим доверительный интервал, согласно (3) для значения доверительной вероятности 0,95, находя коэффициент Стьюдента по таблице для данной надежности и k равного $n-1 = 9$:

$$\begin{matrix} \beta = 0,95 \\ t_{\beta} = 2,26 \end{matrix} \quad I_{\beta} = \left(8 - 2,26 \frac{0,032}{3}; 8 + 2,26 \frac{0,032}{3} \right) = 8 \pm 0,026$$

Найдем вероятность того, что прыгун в очередном испытании «улетит» более чем на 8м 4см (то есть попадет в интервал $[8,04; \infty)$).

Для этого в качестве мат. ожидания и среднеквадратического отклонения возьмем их оценки - $\bar{X} = 8,00$ и $s = 0,0320$, затем пересчитаем границы интервала по формулам (4), (5). Получим:

$$t_1 = \frac{8,04 - 8}{0,032} = 1,25, \quad t_2 = \infty,$$

Искомая вероятность может быть оценена как

$$P(X > 8,04) = \frac{1}{2} [\Phi(\infty) - \Phi(1,25)] = \frac{1}{2} (1 - 0,7887) \approx 0,106, \text{ или } \approx \underline{11\%}.$$

Тест к Разделу 2.

Случайные события

1. Раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений.

- 1) математическая логика
- 2) математическая статистика
- 3) математическое моделирование
- 4) теория вероятностей.

2. Событие, которое обязательно происходит в результате данного испытания:

- 1) невозможное событие
- 2) противоположное событие
- 3) достоверное событие
- 4) несовместные события.

Событие, состоящее в том, что данное событие A не наступило:

- 1) невозможное событие
- 2) противоположное событие
- 3) достоверное событие
- 4) несовместные события.

4. События A и B , такие, что наступление одного из них исключает возможность наступления другого:

- 1) невозможное событие
- 2) противоположное событие
- 3) достоверное событие
- 4) несовместные события.

5. Событие, которое может либо произойти, либо не произойти в результате данного испытания.

- 1) противоположное событие
- 2) невозможное событие
- 3) достоверное событие
- 4) случайное событие.

6. Дополните выражение. События A_1, A_2, \dots, A_n называются равновозможными:

- 1) если какое-либо одно из них непременно должно наступить в результате испытания.
- 2) если нет основания считать, что появление одного из них в результате испытания является более возможным, чем остальных.
- 3) если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

7. Дополните выражение. События A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу

- 1) если какое-либо одно из них непременно должно наступить в результате испытания.

- 2) если нет основания считать, что появление одного из них в результате испытания является более возможным, чем остальных.
- 3) нет правильного ответа
- 4) если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

8. Дополните выражение. События A_1, A_2, \dots, A_n называются единственно возможными

- 1) если какое-либо одно из них непременно должно наступить в результате
- 2) все ответы верны
- 3) если нет основания считать, что появление одного из них в результате испытания является более возможным, чем остальных
- 4) нет правильного ответа
- 5) если в результате испытания появится хотя бы одно из них.
- 6) если в результате испытания исчезнет хотя бы одно из них.

Законы распределения СВ

1. Закон распределения случайных величин может быть задан в виде:

- 1) таблицы
- 2) формулы
- 3) графика
- 4) схемы.

2. Распределение случайной величины X , для которой распределение приведенной случайной величины есть $F(x)$ – это...

- 1) нормальное распределение
- 2) центральная предельная теорема
- 3) дискретное распределение
- 4) непрерывное распределение.

3. Понятие среднего значения случайной величины в теории вероятностей.

- 1) дисперсия
- 2) математическое ожидание
- 3) мода
- 4) медиана.

Величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка:

- 1) случайная величина
- 2) непрерывная случайная величина
- 3) дискретная случайная величина
- 4) переменная случайная величина.

5. Общий принцип, в силу которого совместное действие случайных факторов приводит, при некоторых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая.

- 1) теорема Бернулли

- 2) теорема Лапласа
- 3) закон больших чисел
- 4) закон распределения.

6. Мера разброса случайной величины, то есть её отклонения от математического ожидания.

- 1) дисперсия случайной величины
- 2) дискретная случайная величина
- 3) непрерывная случайная величина
- 4) математическое ожидание.

7. Показатель рассеивания значений случайной величины относительно её математического ожидания:

- 1) мода
- 2) дискретная случайная величина
- 3) стандартное отклонение
- 4) математическое ожидание.

Основные понятия математической статистики

1. Множество всех единиц совокупности, обладающих определенным признаком и подлежащих изучению, носит в статистике название

- 1) закон больших чисел
- 2) генеральная совокупность
- 3) выборочный метод
- 4) представительная выборка.

2. Наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов.

- 1) дискретная математика
- 2) математическая статистика
- 3) математическая логика
- 4) математическое моделирование.

3. Отбор, при котором объекты извлекаются по одному из всей генеральной совокупности.

- 1) типический отбор
- 2) механический отбор
- 3) простой случайный отбор
- 4) серийный отбор.

4. Отбор, при котором генеральная совокупность «механически» делится на несколько групп, сколько объектов должно войти в выборку, из каждой группы отбирается один объект.

- 1) типический отбор
- 2) механический отбор

- 3) простой случайный отбор
- 4) серийный отбор.

Отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее типической части.

- 1) типический отбор
- 2) механический отбор
- 3) простой случайный отбор
- 4) серийный отбор.

6. Разность между максимальным и минимальным значением выборки:

- 1) вариационный ряд
- 2) размах выборки
- 3) статистический ряд
- 4) полигон частот.

7. Значение во множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто:

- 1) мода
- 2) дискретная случайная величина
- 3) стандартное отклонение
- 4) математическое ожидание.

8. Показатель середины ряда:

- 1) медиана
- 2) мода
- 3) стандартное отклонение
- 4) размах вариации

9. Выбирается столько квантилей, сколько требуется оценить параметров; неизвестные теоретические квантили, выраженные через параметры распределения, приравниваются к эмпирическим квантилям

- 1) метод моментов
- 2) метод квантилей
- 3) метод максимального правдоподобия
- 4) точечное оценивание параметров.

10. Нахождение единственной числовой величины, которая и принимается за значение параметра:

- 1) квантиль:
- 2) максимальное правдоподобие
- 3) точечная оценка
- 4) момент

11. Величина, характеризующая асимметрию распределения данной случайной величины.

- 1) коэффициент асимметрии

- 2) момент случайной величины
- 3) коэффициент эксцесса
- 4) математическое ожидание.

12. Мера остроты пика распределения случайной величины.

- 1) коэффициент асимметрии
- 2) момент случайной величины
- 3) коэффициент эксцесса
- 4) математическое ожидание.

**Расчет коэффициента корреляции случайных величин.
Построение линейной зависимости случайных величин методом наименьших
квадратов с использованием электронных таблиц.**

Цель работы: исследование совместного распределения вероятностей рядов экспериментальных данных.

Во многих науках (физика, химия, биология и др.) часто приходится статистически анализировать влияние одного фактора на другой. Подобные задачи возникают тогда, когда такие факторы не являются независимыми, но их функциональная зависимость неизвестна (или ее невозможно найти аналитически). Примерами могут служить зависимость между осадками и урожаем или зависимость между концентрацией органических веществ в воде и количественным составом ихтиофауны.

Вероятностный подход к решению подобных задач исходит из предположения, что система рассматриваемых величин обладает определенным *совместным распределением вероятностей*.

Свойства коэффициента корреляции:

1) $0 \leq r(X, Y) \leq 1$;

2) если X, Y независимы, то $r(X, Y) = 0$;

3) если X, Y связаны между собой линейной зависимостью, т.е. $Y = aX + b$, то $r(X, Y) = 1$. При этом чем ближе он к 1, тем лучше линейная зависимость между X и Y .

Коэффициент корреляции Пирсона

Коэффициент корреляции Пирсона применяется в случае, если изучаемые случайные величины предположительно распределены по *Нормальному закону*. Он обозначается $\rho(X, Y)$ - для двух случайных величин X и Y , - и рассчитывается с помощью соотношения:



Здесь M и σ обозначают математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Если в результате n опытов получены данные:

X	X_1	X_2	X_3	...	X_n
Y	Y_1	Y_2	Y_3	...	Y_n

6

то коэффициент корреляции Пирсона рассчитывается по формуле

При выполнении работы рекомендуется придерживаться следующего плана:

1. Сформулировать конкретную цель работы (с описанием измеряемых величин и их предполагаемой взаимосвязи.)
2. Провести экспериментальные измерения или привлечь имеющиеся данные значений случайных величин X и Y .
3. Результаты оформить в виде таблицы :

Величина X_i	Величина Y_i
1	4,7
2	5,7
3	4,2
...	...

3.1.1.1. Ввести эти данные в электронные таблицы (можно без номера и заголовков). В файле «Корреляция» - в ячейки, начиная с A11 и B11.

3.1.1.2. Для нахождения коэффициента корреляции легко воспользоваться мастером функций:

В свободную ячейку, например, E11: *Вставка* → *функция* → КОРРЕЛ(CORREL) из категории «статистические».

В качестве исходных массивов выбираются 2 ряда данных из 1 и 2 столбцов таблицы с данными.

Ранговый коэффициент корреляции (по Спирмену).

Для признаков с любым видом распределения может быть использован *Ранговый*

$$r_{x,y}^s = 1 - \frac{6 \cdot \sum (d_x - d_y)^2}{n \cdot (n^2 - 1)}$$

коэффициент корреляции (коэффициент Спирмена):

где d_x и d_y - ранги статистических данных признаков X и Y соответственно.

Для удобства его вычисления можно заполнить бледно-зеленую таблицу файла «Корреляция»:

1. Для начала в ячейку H12 (**d_x**) ввести функцию **РАНГ (RANK)** из категории «статистические», где в «**значение**» указать адрес ячейки со значением, для которого определяется ранг (A11), в «**данные**» указать массив всех данных первого признака, закрепив его, как абсолютную ссылку для дальнейшего копирования на соседние ячейки (A\$11:A\$...), указать «тип» - 1 — в порядке возрастания.

2. Если данные признака Y содержатся в соседнем столбце, скопировать данную формулу на нижний диапазон и на диапазон справа (столбец $I - dy$). Полученные значения использовать для подсчета разности $(dx - dy)^2$.

3. В K11 ввести n (объем выборки).

4. Ввести в ячейку L12 формулу для расчета коэффициента ранговой корреляции, например: $=1-(6*\text{SUM}(J12:J...))/(K12*(K12*K12-1))$.

Если рассматриваемые признаки имеют нормальное распределение, то целесообразнее определять наличие корреляционной связи с помощью коэффициента Пирсона, т.к. в этом случае он будет иметь меньшую погрешность, чем ранговый.

Построение уравнения регрессии.

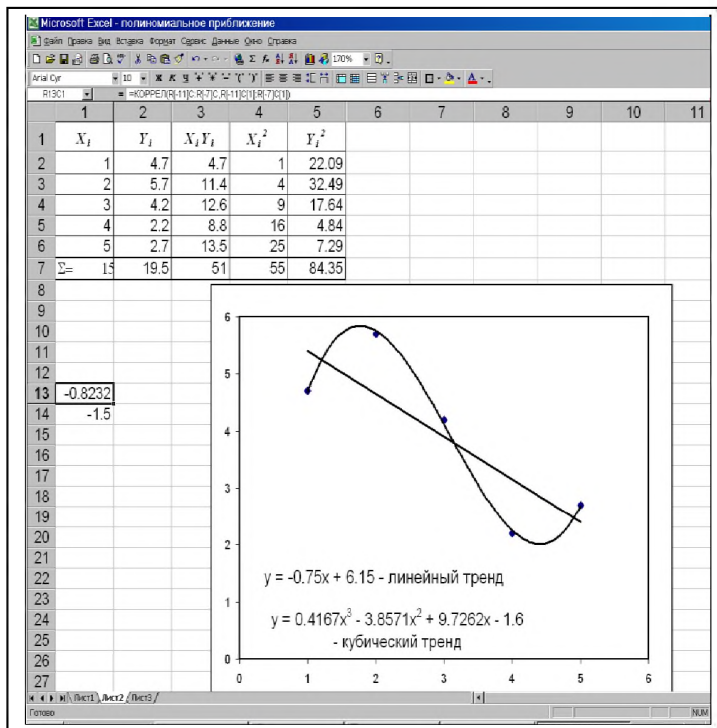
- Для построения регрессионной зависимости необходимо воспользоваться *мастером построения диаграмм* и построить зависимость Y от X (лучше выбрать *точечную или XY - диаграмму*). Чтобы добавить линейный тренд, из меню *Диаграмма* в Excel или *Вставка* в Calc выбрать команду «*добавить линию тренда...*». Выбрать «*линейную*» (если коэффициент корреляции достаточно велик). Установить необходимые параметры, не забыв установить флажок «*показывать уравнение на диаграмме*».

Данная прямая является прямой наилучшего среднеквадратического приближения к эмпирическим точкам, что составляет принцип **метода наименьших квадратов**: *сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от сглаживающей кривой должна быть минимальной.*

Примечание. Если Раздел коэффициента корреляции далек от 1 ($<0,8$), то следует поставить под сомнение наличие линейной зависимости между X и Y (и в целом совместное распределение вероятностей). В этом случае воспользуйтесь возможностями для построения полиномиального (логарифмического, экспоненциального или иного) приближения данной зависимости, установив при этом степень и необходимые параметры.

- *Попробуйте сделать прогноз зависимости Y от X за имеющуюся область определения.

Рисунок 1



Самостоятельная практическая работа

№ варианта	Задание
1)	<p>Самостоятельная практическая работа</p> <p>5) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), выполняющей умножение матриц. Приведите в качестве отчета:</p> <p>а) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>б) Скриншоты примера расчета умножения матриц в выбранном вами электронном ресурсе:</p> $A = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ <p>6) Где используется эта операция в вашей специальности?</p>
2)	<p>1) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), выполняющей вычисление определителя. Приведите в качестве отчета:</p> <p>с) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>д) Скриншоты примера расчета определителя матрицы B в выбранном вами электронном ресурсе:</p> $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ <p>2) Где используется эта операция в вашей специальности?</p>

3)	<p>11) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), решающей СЛАУ. Приведите в качестве отчета:</p> <p>е) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>ф) Скриншоты примера решения СЛАУ в выбранном вами электронном ресурсе:</p> $\begin{cases} 3x + 2y - 4z - 8 = 0 \\ 2x + 4y - 5z - 11 = 0 \\ 4x - 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ <p>12) Где используется эта процедура в вашей специальности?</p>
4)	<p>1) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), определяющих ранг матрицы. Приведите в качестве отчета:</p> <p>г) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>д) Скриншоты примера определения ранга данной матрицы в выбранном вами электронном ресурсе:</p> $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ <p>2) Где используется эта тема в вашей специальности?</p>
5)	<p>а) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), выполняющей вычисление неопределенных интегралов. Приведите в качестве отчета:</p> <p>и) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>к) Скриншоты примера расчета интеграла в выбранном вами электронном ресурсе:</p> $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ <p>б) Где используется эта операция в вашей специальности?</p>
6)	<p>а) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), выполняющей вычисление пределов функций. Приведите в качестве отчета:</p> <p>к) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>л) Скриншоты вычисления предела $\frac{x^2-4x+1}{2x+1}$ в выбранном вами электронном ресурсе.</p> <p>б) Где используется эта операция в вашей специальности?</p>

7)	<ul style="list-style-type: none"> • Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), выполняющей вычисление пределов функций. Приведите в качестве отчета: m) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции. n) Скриншоты вычисления предела $\frac{3n}{1-2n}$ в выбранном вами электронном ресурсе. • Где используется эта операция в вашей специальности?
8)	<ul style="list-style-type: none"> • Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), выполняющей нахождение производной. Приведите в качестве отчета: o) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции. p) Скриншоты примера расчета производной функции: $y = \ln(x^2-1)$ в выбранном Вами электронном ресурсе. • Где используется эта операция в вашей специальности?
9)	<p>1) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), выполняющей нахождение производной. Приведите в качестве отчета:</p> <p>q) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>Скриншоты примера расчета производной сложной функции: $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$ в выбранном Вами электронном ресурсе.</p> <p>2) Где используется эта операция в вашей специальности?</p>
10)	<p>1) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), выполняющей нахождение производной. Приведите в качестве отчета:</p> <p>г) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>s) Скриншоты примера расчета производной функции: $y = \frac{8-3\sqrt{x^3}+2x}{1+6x\sqrt{x}-3x^2}$ в выбранном Вами электронном ресурсе.</p> <p>2) Где используется эта операция в вашей специальности?</p>
11)	<p>57) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), выполняющей нахождение производной. Приведите в качестве отчета:</p> <p>t) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>u) Скриншоты примера расчета производной функции: $y = \left(\frac{x}{3-4x^2}\right)^2$ в выбранном Вами электронном ресурсе.</p> <p>58) Где используется эта операция в вашей специальности?</p>

12)	<p>1) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), выполняющей векторное умножение векторов. Приведите в качестве отчета:</p> <p>v) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>Скриншоты примера векторного умножения векторов в выбранном вами электронном ресурсе: $\mathbf{b}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$</p> <p>2) Где используется эта операция в вашей специальности?</p>
13)	<ul style="list-style-type: none"> • Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), с помощью которой можно найти общее решение дифференциального уравнения. • Приведите в качестве отчета: <p>w) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Скриншоты примера нахождения общего решения дифференциального уравнения $y' + 2x \cdot y = 2x e^{-x^2}$ в выбранном вами электронном ресурсе • Где используются дифференциальные уравнения в вашей специальности?
14)	<p>f) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), рассчитывающей число перестановок. Приведите в качестве отчета:</p> <p>x) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>y) Скриншоты примера расчета количества перестановок множества из 12 элементов в выбранном вами электронном ресурсе.</p> <p>g) Где используются перестановки в вашей специальности?</p>
15)	<p>1) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), рассчитывающей число сочетаний. Приведите в качестве отчета:</p> <p>z) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>aa) Скриншоты примера расчета количества сочетаний из 12 элементов по 8 в выбранном вами электронном ресурсе.</p> <p>2) Где используются сочетания в вашей специальности?</p>
16)	<p>a) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), рассчитывающей число размещений. Приведите в качестве отчета:</p> <p>bb) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>cc) Скриншоты примера расчета количества размещений из 20 элементов по 3 в выбранном вами электронном ресурсе.</p> <p>b) Где используются размещения в вашей специальности?</p>

17)	<p>1) Приведите пример компьютерной программы (сайта, пакета прикладных программ и т. д.), вычисляющей мат. ожидание и дисперсию по закону распределения вероятностей, заданному в виде таблицы. Приведите в качестве отчета:</p> <p>dd) ссылку на online-калькулятор или название программы, где возможно выполнение этой операции.</p> <p>ee) Скриншоты примера расчета мат. ожидания и дисперсии случайной величины, если её распределение вероятностей задано таблицей:</p> <table data-bbox="406 443 678 519"><tr><td>Y</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>P</td><td>0.3</td><td>0.5</td><td>0.2</td></tr></table> <p>2) Где используется мат ожидание и дисперсия в вашей специальности?</p>	Y	1	2	5	P	0.3	0.5	0.2
Y	1	2	5						
P	0.3	0.5	0.2						

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Определение матрицы, элемента матрицы, размера матрицы.
2. Обозначение матрицы, ее элементов, размера матрицы.
3. Виды матрицы.
4. Операции над матрицами.
5. Понятие определителя. Обозначения.
6. Понятие минора, алгебраического дополнения элемента матрицы.
7. Правило расчета определителя 2-го порядка.
8. Правила расчета определителя 3-го порядка (правило треугольников, правило разложения по элементам строки или столбца).
9. Свойства определителей.
10. Понятие невырожденной матрицы.
11. Определение обратной матрицы.
12. Свойства обратной матрицы.
13. Условие существования обратной матрицы.
14. Расчет обратной матрицы по формуле с помощью присоединенной матрицы.
15. Определение ранга матрицы.
16. Свойства ранга матрицы.
17. Расчет ранга матрицы приведением ее к ступенчатому (трапециoidalному) или треугольному виду с помощью элементарных преобразований.
18. Элементарные преобразования матрицы (не изменяющие ее ранг).
19. Теорема о ранге и линейной независимости строк (столбцов) матрицы.
20. Понятие линейного уравнения, коэффициентов при переменных, решения СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений). Общий вид системы m линейных уравнений с n переменными.
21. Совместные и несовместные системы. Определенные и неопределенные системы.
22. Равносильные системы.
23. Матричная форма записи СЛАУ. Понятие матрицы системы.
24. Методы решения СЛАУ.
25. Матричный метод решения СЛАУ (при $m=n$).
26. Метод Крамера решения СЛАУ (при $m=n$).
27. Метод Гаусса решения СЛАУ. Понятие расширенной матрицы. Эквивалентные преобразования расширенной матрицы. Прямой и обратный ход метода Гаусса.
28. Определения собственного вектора и собственного значения матрицы.
29. Алгоритм нахождения собственного значения и собственных векторов матрицы.
30. Понятие вектора, длины вектора, координат вектора, коллинеарных и компланарных векторов.
31. Действия над векторами: умножение вектора на число, сумма и разность векторов.
32. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами.
33. Условия коллинеарности и ортогональности векторов.
34. Понятие n -мерного вектора. Понятие векторного (линейного) пространства.
35. Понятие линейной комбинации векторов.

36. Определение линейно зависимых векторов. Определение линейно независимых векторов.
37. Понятие размерности пространства.
38. Определение базиса n -мерного пространства. Разложение вектора по базису.
39. Определение линий и поверхностей в аналитической геометрии.
40. Виды уравнений прямой на плоскости.
41. Нормальный вектор плоскости. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору, по трем точкам. Общее уравнение плоскости.
42. Общие, канонические, параметрические уравнения прямой в пространстве.
43. Определение и канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.
44. Определение предела последовательности.
45. Определение предела функции при $x \rightarrow a$ и при $x \rightarrow \infty$.
46. Понятие бесконечно малой и бесконечно большой. Примеры.
47. Основные теоремы о пределах.
48. Первый и второй замечательные пределы.
49. Определение непрерывности функции в точке и на отрезке. Точки разрыва. Непрерывность элементарных функций.
50. Определение производной. Её геометрический смысл, её механический смысл.
51. Ряд Тейлора. Разложение функции в ряд Тейлора.
52. Производная сложной функции.
53. Таблица производных основных элементарных функций.
54. Определения возрастающей и убывающей на отрезке функции. Достаточные признаки возрастания и убывания.
55. Определения точки максимума и точки минимума функции. Экстремум. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума.
56. Определение первообразной и неопределённого интеграла. Свойства неопределённого интеграла.
57. Таблица основных интегралов.
58. Замена переменной в неопределённом интеграле.
59. Метод интегрирования по частям.
60. Определение определённого интеграла. Его геометрический смысл и свойства.
61. Формула Ньютона-Лейбница.
62. Вычисление площадей, длин дуг, объёмов с помощью определённого интеграла.
63. Какие комбинации называются перестановками, размещениями, сочетаниями?
64. Какое событие называется случайным?
65. Приведите примеры событий, которые в опыте с игральной костью можно назвать достоверными; невозможными; совместными; противоположными.
66. Что называется суммой, произведением, разностью событий?
67. Чем отличаются классическое и статистическое определения вероятности?
68. Какие Вы знаете свойства вероятностей?
69. Что является следствием двух основных теорем — теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей?
70. Что определяет формула Байеса?

71. Какая величина называется случайной?
72. Приведите примеры дискретных и непрерывных случайных величин.
73. Что можно считать законом распределения случайной величины.
74. Пользуясь дополнительными источниками, опишите геометрическое распределение, биномиальное распределение, распределение Пуассона.
75. Подробно опишите расчет вероятностей в общем нормальном распределении.
76. В чем состоит «правило трех сигм»?
77. Какой закон распределения случайных величин является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях?
78. Какие параметры нормального закона распределения вероятностей соответствуют стандартному распределению?
79. Как изменяется график нормального распределения с уменьшением параметра α ?
80. Что определяет параметр σ ?
81. Всегда ли необходимо характеризовать случайную величину полностью?
82. Какие задачи относятся к основным задачам математической статистики?
83. Какие требования предъявляются к оценке случайной величины? Поясните, что означает каждое из них.
84. Что выбирается в качестве оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения случайной величины?
85. От чего зависит значение коэффициента t_{st} и как оно находится?
86. От чего зависит точность в оценке измеряемой величины?
87. Когда возникают задачи исследования совместного распределения вероятностей и расчета коэффициента корреляции?
88. Перечислите известные Вам свойства коэффициента корреляции. Какое свойство наиболее часто применяется для анализа линейной зависимости двух случайных величин?
89. Каков принцип построения метода наименьших квадратов?
90. Как оценивается достоверность выборочной разности?

Учебные ресурсы

КАРТА ЛИТЕРАТУРНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

(включая мультимедиа и электронные ресурсы)

«МАТЕМАТИКА»

Направление подготовки: 39.03.02 Психолого-педагогическое образование.

Профили/название программы: психология и социальная педагогика (общий профиль).

Квалификация (степень): бакалавр

№ п/п	Наименование	Наличие место/ (кол-во экз.)	Потребность	Примечания
Обязательная литература				
Модуль №1 «Линейная алгебра, аналитическая геометрия»				
3)	Баврин, И. И.. Высшая математика: учебник для студентов химико-биологических специальностей педагогических вузов/ И. И. Баврин. - 2-е изд., перераб.. - М.: Просвещение, 1993. - 319 с.: ил.. - ISBN 5-09-004621-2	ОБИМФИ(9), ЧЗ(1)		
4)	Баврин, И. И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей: учебник/ И. И. Баврин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 328 с. - ISBN 5-9221-0334-2	ЧЗ(1), АНЛ(2), АУЛ(198)		
5)	<u>Пушкарева, Т. П.</u> . Математика: учебно-методическое пособие/ Т. П. Пушкарева, Н. Ю. Романова. - Красноярск: КГПУ им. В. П. Астафьева, 2008. - 160 с. - ISBN 978-5-85981-311-7	ЧЗ(1), АНЛ(3), АУЛ(132)		
6)	Назаров, А. И. Курс математики для нематематических специальностей и направлений бакалавриата: учебное пособие/ А. И. Назаров, И. А. Назаров. - 3-е изд., испр. - СПб.; М.: Лань, 2011. - 576 с.: ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-1199-3: 799.92, 799.92, 890, р.	ЧЗ(1), АУЛ(19), ОБИМФИ(40), ОБИФ(15)		
7)	<u>Матросов, В. Л.</u> . Основы курса высшей математики: учебник/ В. Л. Матросов. - М.: ВЛАДОС, 2002. - 544 с. - ISBN 5-691-00989-3:	ОБИМФИ(56)		
8)	Баврин, И. И.. Высшая математика: учебник/ И. И. Баврин, В. Л. Матросов. - М.: ВЛАДОС, 2004. - 400 с.: ил. - (Учебник для вузов). - ISBN 5-691-01223-1.	ЧЗ(1), ОБИМФИ(5)		
Модуль №2 «Математический анализ»				
▪	Баврин, И. И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей: учебник/ И. И. Баврин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 328 с. - ISBN 5-9221-0334-2	ЧЗ(1), АНЛ(2), АУЛ(198)		
▪	Баврин, И. И.. Высшая математика: учебник для студентов химико-биологических специальностей педагогических вузов/ И. И. Баврин. - 2-е изд., перераб.. - М.: Просвещение, 1993. - 319 с.: ил.. - ISBN 5-09-004621-2	ОБИМФИ(9), ЧЗ(1)		

№ п/п	Наименование	Наличие место/ (кол-во экз.)	Потребность	Примечания
▪	Матросов, В. Л. Основы курса высшей математики: учебник/ В. Л. Матросов. - М.: ВЛАДОС, 2002. - 544 с. - ISBN 5-691-00989-3:	ОБИМФИ(56)		
▪	Баврин, И. И.. Высшая математика: учебник/ И. И. Баврин, В. Л. Матросов. - М.: ВЛАДОС, 2004. - 400 с.: ил. - (Учебник для вузов). - ISBN 5-691-01223-1.	ЧЗ(1), ОБИМФИ(5)		
▪	Курс математического анализа: Учебное пособие для пединститутов/ И. М. Уваренков, М. З. Маллер. - М.: Просвещение, 1966 - Т. 1. - 640 с.	ОБИМФИ(100)		
▪	Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для гос. ун-тов/ Л. С. Понтрягин. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. - 311 с. - 0.69 р.	ОБИМФИ(5)		
Модуль №3 «Теория вероятностей и математическая статистика»				
a)	Майер, Р.А. Сборник индивидуальных тестовых заданий по теории вероятности и математической статистике: рекомендовано методсоветом ВУЗа/ Р.А. Майер, М.В. Литвинцева, А.В. Ванюрин. - 2-е изд., доп. - Красноярск: РИО КГПУ, 2004. - 92 с.	ЧЗ(1), ОБИМФИ(103)		
b)	Баврин, И. И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей: учебник/ И. И. Баврин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 328 с. - ISBN 5-9221-0334-2	ЧЗ(1), АНЛ(2), АУЛ(198)		
c)	Вентцель, Е.С. Теория вероятностей: Учебник для студентов/ Е.С. Вентцель. - 10-е изд., стереотип.. - М.: Академия, 2005. - 576 с. - ISBN 5-7695-2311-5	ОБИМФИ(47)		
d)	Медведев, Л.Н. Биометрия: Практическое руководство по математическому статистическому анализу биомедицинских данных/ Л.Н. Медведев. - Красноярск: РИО КГПУ, 2004. - 326 с. - ISBN 5-85981-022-9: 185	ЧЗ(1), АНЛ(2), АУЛ(43)		
e)	Баврин, И. И.. Высшая математика: учебник для студентов химико-биологических специальностей педагогических вузов/ И. И. Баврин. - 2-е изд., перераб.. - М.: Просвещение, 1993. - 319 с.: ил.. - ISBN 5-09-004621-2	ОБИМФИ(9), ЧЗ(1)		
Дополнительная литература				
Модуль №1 «Линейная алгебра, аналитическая геометрия»				
1.	Математика: Методические рекомендации. Ч. 1.: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии/ Сост. Т.П. Пушкарева, Н.Ю. Романова, Н.В. Шепелевич. - Красноярск: РИО КГПУ, 2001. - 60 с.	ОБИМФИ(3), ЧЗ(1)		

№ п/п	Наименование	Наличие место/ (кол-во экз.)	Потребность	Примечания
2.	Т. П. Пушкарева, Н. Ю. Романова. Математика: учебно-методическое пособие/ - Красноярск: КГПУ им. В. П. Астафьева, 2008. - 160 с.	ЧЗ(1), АНЛ(3), АУЛ(132)		
Модуль №2 «Математический анализ»				
3.	Т. П. Пушкарева, Н. Ю. Романова. Математика: учебно-методическое пособие/ - Красноярск: КГПУ им. В. П. Астафьева, 2008. - 160 с.	ЧЗ(1), АНЛ(3), АУЛ(132)		
4.	Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа: учебник. Т. I/ Г.М. Фихтенгольц. - 7-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 416 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература)). - ISBN 5-9221-0196-X	ОБИМФИ(25)		
5.	Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебное пособие для универ. и пед. ин-тов/ Г. М. Фихтенгольц. - 7-е изд., стереотип. - М.: Наука, 1969 - Т. 1. - 608 с.: ил.	ОБИМФИ(41)		
Модуль №3 «Теория вероятностей и математическая статистика»				
6.	Математика, часть III. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Красноярск: РИО КГПУ, 2006, 78 с., Пушкарева Т.П, Романова Н.Ю., Шепелевич Н.В.	ЧЗ(1), ОБИМФИ(8), Каф. ИТОиМ, ауд 3-54, 15 экз.		
7.	Т. П. Пушкарева, Н. Ю. Романова. Математика: учебно-методическое пособие/ - Красноярск: КГПУ им. В. П. Астафьева, 2008. - 160 с.	ЧЗ(1), АНЛ(3), АУЛ(132)		

Карта материально-технической базы дисциплины

«Математика»

(наименование дисциплины)

Для обучающихся образовательной программы

(указать уровень, шифр и наименование направления подготовки.)

Направление подготовки: *39.03.02 Психолого-педагогическое образование.*

Профили/название программы: *психология и социальная педагогика (общий профиль).*

Квалификация (степень): *бакалавр*

очная форма обучения

(указать профиль/ название программы и форму обучения)

Аудитория	Оборудование (наглядные пособия, макеты, модели, лабораторное оборудование, компьютеры, интерактивные доски, проекторы, информационные технологии, программное обеспечение и др.)
Лекционные аудитории	
№ 2-30, 2-31, 2-32	<ul style="list-style-type: none">▪ Компьютер с базовым набором программного обеспечения▪ Мультимедийный видеопроектор
Аудитории для семинарских/ лабораторных занятий	
№ 2-30, 2-31, 2-32	<ul style="list-style-type: none">▪ Компьютерный класс (1 учительский + от 10 до 17 ученических компьютеров с базовым набором программного обеспечения)

