МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В.П. Астафьева

В.Р. Майер, Е.А. Семина

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ БАКАЛАВРОВ - БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Красноярск 2014

ББК
П

Печатается по решению редакционно-издательского совета Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева

Рецензенты:
В.М. Садовский
д.ф.-м.н., профессор, зам. директора ИВМ СОРАН
Н.И. Пак
д.п.н., профессор, зав. базовой кафедрой информатики и информационных технологий в образовании КГПУ им. В.П. Астафьева

Майер В.Р., Семина Е.А. Информационные технологии в обучении геометрии бакалавров – будущих учителей математики. Монография. – Красноярск: РИО КГПУ им. В.П. Астафьева, 2014. – 508 с.

ISBN 5-85984-1

В монографии на основе системного анализа разработана концепция использования информационных технологий в курсе геометрии педагогического вуза и на её базе построена методическая система геометрической подготовки бакалавра – будущего учителя математики на основе информационных технологий.

Для исследователей в области дидактики высшей школы, преподавателей вузов и всех, кто интересуется вопросами использования информационных технологий в предметной подготовке будущих специалистов.

ББК

ISBN 5-85984-060-1

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ко второму изданию

Книга представляет собой переработанное и дополненное издание монографии [142]. Одна из основных причин переиздания – необходимость адаптации разработанной в 2001 г. методической системы к реалиям современного российского высшего педагогического образования в части подготовки бакалавров – будущих учителей математики. Каковы основные отличия второго издания от первого? Что осталось без изменения и что изменилось?

В связи с переходом на двухуровневую систему «бакалавр-магистр» подготовки учителя математики модуль «Дифференциальная геометрия» перенесен на магистерский уровень.

По причине особой значимости проективных методов в геометрической подготовке будущего учителя математики раздел «Проективная геометрия» модуля «Геометрические преобразования» расширен и выделен в отдельный модуль.

Существенно большее внимание уделено системам динамической геометрии, которые ориентированы преимущественно на компьютерное сопровождение школьного курса геометрии.

Формы обучения пополнились лабораторно-практическими занятиями, что связано с необходимостью решения геометрических задач исследовательского типа в условиях виртуальной лаборатории.

Авторами были сохранены все основные принципы концепции компьютерной поддержки курса геометрии в вузах, готовящих учителей математики, так как верность их выбора подтвердило время. Остался практически без изменения и профессионально-педагогический подход А.Г. Мордковича к обучению геометрии будущих учителей математики.

Отметим, что та часть монографии, которая посвящена системам динамической геометрии, подготовлена В.Р. Майером и Е.А. Семиной, остальной текст написан В.Р. Майером.

Посвящается памяти профессора
Роберта Адольфовича Майера,
ученого, педагога и наставника

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных тенденций нашего общества стало осознание того, что устойчивость и стабильность его развития зависят от состояния образованности людей. Как никогда острой становится потребность в подготовке инициативной и деятельной личности, способной регулярно пополнять свои знания, используя для этой цели различные средства, в том числе информационные технологии. Подготовка таких специалистов не может осуществляться без эффективной информатизации образования.

Информатизация образования создаёт предпосылки для широкого внедрения в практику обучения различным предметам информационных технологий и рассматривается как необходимое условие прогрессивного развития общества. В этом направлении ведётся много исследований. Решение различных аспектов данной проблемы отражены в работах таких специалистов в области информатизации образования, как А.П. Ершов, Б.Н. Богатырь, Я.А. Ваграменко, Е.П. Велихов, В.А. Извозчиков, М.П. Лапчик, В.М. Монахов, Н.И. Пак, Ю.А. Первин, И.В. Роберт, и др. Однако за три десятилетия, прошедших с начала массовой информатизации школы, не удалось за счёт этого процесса существенно повысить эффективность обучения. В связи с этим Министерство образования и науки РФ ещё раз обратило внимание на необходимость использовать информатику как средство обучения на всех уроках естественно-математического цикла. Было принято решение организовать поэтапную подготовку учителей естественно-математического цикла по использованию компьютера в учебном процессе. Одним из требований к предметным результатам освоения базового курса математики в общеобразовательной школе, которые прописаны в Федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования (утвержден приказом Минобрнауки РФ от 17.05.2012, № 413), является «владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач».

Проблеме применения информационных технологий в преподавании математических дисциплин в средней и высшей школах посвящены публикации Ю.С. Брановского, В.И. Глизбург, Ю.Г. Гузуна, В.А. Далингера, С.В. Ларина, В.Р. Майера, М.Н. Марюкова, Т.П. Пушкаревой, Н.В. Рагулиной, И.В. Роберт, А.В. Якубова и других. Основное внимание в этих исследованиях уделяется не только вопросам создания программно-педагогических средств учебного назначения с методикой их применения, но и разработке соответствующих компьютерно-ориентированных методик обучения отдельным темам и разделам школьного и вузовского курсов математики.

Анализ исследований, связанных с информатизацией математического образования, позволяет сделать вывод о том, что использование компьютера в математических курсах имеет большие возможности. Наряду с этим нельзя не отметить, что практическая реализация этих возможностей ограничивается, как правило, рамками педагогических экспериментов, слабо внедряется в массовую практику обучения математике, в том числе школьного курса математики. Даже в вузах, готовящих учителей математики, информационные технологии при обучении основным математическим курсам применяются крайне редко. Опросы, проведённые среди учителей математики и выпускников математических факультетов педагогических вузов, говорят о том, что учителя, как практикующие, так и будущие, пока слабо подготовлены к этой деятельности. Это относится, в том числе и к тем из них, кто имеет дополнительную специализацию или специальность по информатике.

Целью настоящей работы является создание такой методической системы геометрической подготовки студента – будущего учителя математики, обучающегося в рамках направления «Педагогическое образование», профиль «Математика», квалификация (степень) «Бакалавр», которая позволила бы средствами информационных технологий повысить качество обучения геометрии в педагогическом вузе.

Теоретико-методологической основой работы являются фундаментальные исследования в области философии образования и психолого-педагогической науки (Ю.К. Бабанский, В.В. Давыдов, М.А. Данилов, В.В. Краевский, В.С. Леднёв, И.Я. Лернер, М.Н. Скаткин и др.), создания и использования средств обучения и учебно-материальной базы (Т.С. Назарова, Е.С. Полат, Л.П. Пресман и др.), теории методологии и практики информатизации обучения (А. Борк, Я.А. Ваграменко, А.П. Ершов, И.В. Роберт, Н.И. Пак и др.), теории и методики обучения математике (Г.Д. Глейзер, В.А. Гусев, Г.И. Саранцев и др.), концепции профессионально-педагогической направленности обучения математике будущих учителей (А.Г. Мордкович).

Авторы опирались также на учение о диалектическом единстве теории и практики, о роли человеческой деятельности в развитии материальных и духовных богатств общества, руководствовались методологией системного подхода.

В монографии разработана концепция компьютерной поддержки курса геометрии в вузах, готовящих бакалавров – будущих учителей математики. На базе этой концепции авторами построена методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе информационных технологий; разработана соответствующая программа курса геометрии, удовлетворяющая всем критериям отбора содержания обучения; описаны основные формы и методы организации деятельности студентов бакалавриата по изучению геометрического материала на основе применения компьютера как инструмента познания; приведена классификация компьютерных средств обучения, используемых в курсе геометрии; разработана система учебных проектов по всем модулям курса геометрии.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
Теоретические основы информатизации обучения геометрии будущих учителей математики

ГЛАВА I. Социальные и теоретические предпосылки исследования

Данная глава посвящена вопросам интеграции информатики с другими науками, влияния информатизации на образование вообще и вузовское образование в частности. Осуществлен обзор геометрической подготовки школьников и будущих учителей математики, а также основных направлений информатизации курса геометрии в вузах, готовящих учительские кадры.

1.1. Информатизация и геометрические науки

Информатизация общества. Информация является важнейшим общенаучным понятием. Её, как и вещество, и энергию, рассматривают в качестве важнейшей сущности мира, в котором мы живём. Информация несёт человеку новые знания о различных объектах, процессах и явлениях. Обработка информации представляет собой достаточно сложный процесс. Он зависит от множества факторов как объективного, так и субъективного характера. На протяжении всей своей жизни человек постоянно участвует во всевозможных информационных процессах, которые происходят не только в человеческом обществе, но и в растительном и животном мире.

В результате развития общества и участия его членов в информационных процессах появилась потребность в обобщённых знаниях и опыте, способствующих правильной переработке информации. Для этого были необходимы различные средства и методы обработки информации. Среди средств и методов, обусловивших гигантские качественные и количественные скачки в информатизации общества и развитии цивилизации, чаще всего выделяют четыре следующих изобретения: письменность, книгопечатание, электричество (и как следствие – появление телеграфа, телефона и радио) и микропроцессорная техника (появление персональных компьютеров). Последний этап информатизации общества, вызванный появлением компьютеров, привёл к тому, что человеческая цивилизация в конце 20-го столетия оказалась в состоянии перехода к информационной фазе своего развития, к информационному обществу.

В информационном обществе деятельность отдельных людей и коллективов всё в большей степени будет зависеть от их информированности и способности эффективно использовать имеющуюся информацию. В таком обществе как никогда будет высоким спрос на знания и интеллект, на умение человека заниматься творческой деятельностью.

В настоящее время в любой стране в той или иной мере происходит процесс информатизации. Одни страны уже стоят на пороге информационного общества, другим предстоит ещё долгий путь. Это зависит от многих объективных факторов, к числу которых можно отнести: экономическую и политическую стабильность, уровень развития индустрии страны и т. д. По мнению некоторых исследователей, например Т. Стоньера, в течение самого ближайшего времени девяносто процентов населения развитых стран мира будет занято в информационной индустрии.

Проникновение информатики в различные области знаний. Глобальная информатизация общества не могла не повлиять на изменение предмета и методов исследования большинства научных дисциплин, и в первую очередь математики, физики и их приложений. Во многих областях научных знаний появились новые приемы, сформировались новые объекты изучения, возникли новые проблемы и задачи. Все это в определённой мере трансформировало сами науки, изменило их облик.

Вот что сказал по этому поводу в докладе «Математическое образование: настоящее и будущее» на Всероссийской конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков» в г. Дубна [193] ректор МГУ академик В.А. Садовничий: «Ясно, что с появлением компьютеров мир математики, безусловно, стал меняться. Изменяются не только математическое мышление, математические методы, но и научное мировоззрение в целом».

При исследованиях в различных областях науки и техники компьютер можно использовать для наглядного представления результатов вычислений и обработки экспериментальных данных. Кроме того, компьютер можно привлекать к построению различных моделей, описывающих физические и химические процессы, структуры молекул, конфигурации электромагнитных полей. С помощью микропроцессорной техники астрономы воспроизводят полученные из космического пространства снимки планет солнечной системы, учёные-медики и врачи широко используют в своей профессиональной деятельности компьютерные томограммы. Компьютер, и в первую очередь машинная графика и геометрическое моделирование, применяются для имитации непредсказуемых ситуаций при подготовке на электронных тренажёрах водителей транспортных средств, лётчиков, космонавтов.

Важную роль может играть компьютер и в научных математических исследованиях. Так, например, в монографии американского исследователя Чоу [225] рассмотрен метод механического доказательства теорем элементарной геометрии, использующий возможности современных компьютеров. Автором этой монографии сформулировано и доказано 512 утверждений. Многие из этих утверждений ранее были не известны. Это направление исследований в последние десятилетия активно развивалось. Тому подтверждение – многочисленные статьи в ведущем журнале по символьным вычислениям Journal of Symbolic Computation и в трудах ежегодной конференции по символьным вычислениям Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC) [224, 226, 231, 237, 240]. В процессе развития указанного направления существенную роль сыграла теория базисов Грёбнера – современного алгоритмического подхода к конструктивной теории систем алгебраических уравнений [83]. Широко известно, что этот подход под силу лишь мощным компьютерам, да и то лишь в относительно простых ситуациях. А со многими конкретными приложениями теории базисов Грёбнера к робототехнике, системам автоматизированного проектирования и целому ряду других областей науки, в частности к механическому доказательству теорем, в обозримом будущем не справится компьютер любой мощности, если использовать для этой цели имеющиеся алгоритмы. Это привело к появлению активно развивающейся теории вычислительной сложности алгоритмов и альтернативных, более эффективных, алгоритмов алгебраической геометрии. По мнению специалистов, в настоящее время идёт синтез методов дифференциальной алгебры и алгебраической геометрии. Так, например, на основе работ по дифференциальным D-модулям удалось алгоритмически вычислить когомологии дополнения к алгебраическому многообразию, что было решением известной задачи алгебраической геометрии [243].

В последние годы в теоретических исследованиях всё шире применяются системы компьютерной алгебры, например система GAP, которая построена по открытому принципу – вплоть до исходных программ на языке C^{++}. Примером приложения системы GAP в теории групп явилось решение (Тимофеенко А.В., СМЖ деп. 2001 «О порождающих тройках инволюций в спорадических группах») проблемы В.Д. Мазурова 7.30 из «Коуровской тетради».

Ещё одним известным ярким примером является решение проблемы четырёх красок. В течение столетия эту проблему пытались решить многие математики, но решение удалось получить лишь после привлечения мощного компьютера. Менее известным фактом является компьютерное доказательство теоремы об отсутствии проективных плоскостей порядка 10.

Компьютерная геометрия как новая область научных знаний. В процессе развития информатики шла интеграция этой научной дисциплины с целым рядом других наук. Для нас особый интерес представляет геометрия. Результатом интеграции различных геометрических дисциплин с информатикой явилось, например, возникновение машинной графики, теории метода конечных элементов, компьютерной геометрии, теории конечных геометрических объектов, компьютерной начертательной геометрии и компьютерной аналитической геометрии. Последние две дисциплины представляют собой различные направления компьютерной геометрии, которую не без основания считают теоретическим фундаментом машинной графики. Остановимся более подробно на той области научных знаний, которая объединяется термином *компьютерная* (иногда – *машинная*) *геометрия*.

Компьютерная геометрия представляет собой комплекс научных идей и результатов, связанных с решением разнообразных геометрических задач с помощью ЭВМ. Большой вклад в её становление и развитие внесли С.А. Фролов, Е.А. Михайленко, В.С. Полозов, А.Г. Горелик, Ю.С. Завьялов, Л. Аммерал, М. Пратт, У. Ньюмен, Р. Спрулл, В. Гилой, Д. Роджерс, П. Безье, Ж. Энкарначио, Б. Хокс, И. Гардан и другие. Компьютерная геометрия, синтезируя различные геометрические объекты, тела и структуры, позволяет решать многие задачи геометрического характера [8, 9, 10, 11, 30, 48, 52, 89, 148, 183, 184, 212, 213, 215]. Современные пакеты компьютерной алгебры и геометрии дают возможность пользователю одновременно проводить преобразования алгебраических выражений, задающих ту или иную геометрическую фигуру, численно её описывать, визуализировать и, наконец, используя аналитические методы, решать поставленную задачу.

Компьютерная геометрия применяется во многих ситуациях, возникающих в процессе научно-исследовательской деятельности [96]. Приведём некоторые из них.

При изображении реально существующих физических объектов.

Информация о физических объектах может поступать, например, с помощью сканирующего устройства. Поступившая информация подвергается специальной обработке. Такая обработка изображений необходима для ряда исследований в области физико-химических свойств поверхностей, в вопросах расшифровки голограмм, классификации объектов в кристаллографии, обработке снимков треков частиц в физике высоких энергий, фотографий слабых источников в астрофизике и т.д.

При изображении воображаемых геометрических объектов.

Компьютерная геометрия может использоваться как эффективное средство выражения и передачи замысла. При этом изображаемый геометрический объект реально может и не существовать, а являться результатом фантазии пользователя. Воображаемый геометрический объект привязывается к некоторой системе координат, а его фрагменты описываются с помощью подходящих функций. Существует большое количество проектов, разрабатываемых специалистами авиа- и судостроения, радиоэлектроники, строительства и машиностроения, в которых средствами компьютерной геометрии описываются ещё не существующие объекты.

Для иллюстрации теоретических и экспериментальных данных.

Компьютерная геометрия используется также для получения наглядных графических иллюстраций различных теоретических и экспериментальных данных. Такое использование компьютерной геометрии называют иллюстративной машинной графикой. Иллюстративная компьютерная графика позволяет, например, создавать изображение n-мерного геометрического объекта. Такое использование возможностей компьютерной геометрии особенно полезно тем исследователям, которые в процессе научного поиска мыслят преимущественно геометрическими образами, полагаясь в большей степени на геометрическую наглядность.

Современная иллюстративная машинная графика позволяет визуализировать многопараметрические данные, различные химические и физические реакции, структуры кристаллов, сложные пространственные сцены и объекты абстрактной природы. В ряде случаев визуализация различных геометро-топологических характеристик представляет собой эффективный, а иногда и единственный путь к решению задачи.

При иллюстрации геометрического объекта, представляющего собой конечный компонент алгоритма решения задачи.

При решении некоторых задач изображение, полученное средствами компьютерной геометрии, является ключевым конечным компонентом алгоритма решения задачи. Другими словами, изображение геометрического объекта не только иллюстрирует геометрическую суть задачи, но и является полноправным рабочим инструментом её решения. При этом геометрический объект «существует» в пространстве параметров задачи и имеет, как правило, абстрактную природу.

К таким задачам относятся, например, задачи на нахождение огибающей параметрического семейства и особых решений дифференциальных уравнений, описание функции максимума и особых точек уравнений, вычисление оптико-геометрических коэффициентов радиационного энергообмена.

При иллюстрации геометрической фигуры, являющейся промежуточным компонентом алгоритма решения задачи.

При решении задач этого класса изображение, полученное средствами компьютерной геометрии, используется при получении промежуточных результатов дальнейших вычислений. По сути, это компьютерная реализация геометрического моделирования, под которой понимается процедура, основанная на совместном выполнении соответствующих геометрических построений и вычислений. Примером эффективного использования геометрического моделирования в научных исследованиях служит их применение в вычислительных экспериментах. При этом наряду с числовыми моделями используются и геометрические, в которые «заложены» и объекты негеометрического характера. Тогда в процессе проведения вычислительного эксперимента исходные данные, промежуточные и окончательные результаты могут быть представлены в графической форме.

Таким образом, компьютерная геометрия, являясь теоретической базой машинной графики – важнейшего раздела информатики, позволяет с большой эффективностью применять в различных научных исследованиях интегрированные методы геометрии и информатики. Такое направление применения компьютерной геометрии иногда (А.В. Могилёв, Н.И. Пак, Е.К. Хённер [158]) называют *научной графикой*. Универсальных систем компьютерной научной графики не существует по причине вполне понятной – из-за большого разнообразия научных задач. Однако в каждом конкретном случае исследователи поступают следующим образом: в программу, составленную на одном из языков высокого уровня и представляющую собой ту или иную компьютерную реализацию математической модели научного исследования, вставляют подпрограмму на этом же языке, наглядно визуализирующую решение этой задачи.

Сделать абстрактное и невидимое реальным и видимым. Так можно условно сформулировать основную цель научной графики. Отметим, что видимость понимается здесь достаточно условно. Можно ли увидеть распределение температуры внутри неоднородно нагретого тела сложной формы? Да, если есть соответствующая математическая модель и, что очень важно, договорённость о восприятии определённых условностей на чертеже. Можно ли увидеть изображение невозможной фигуры, если последняя не существует в евклидовом пространстве? Такой же вопрос можно задать по поводу визуализации тел, размерность которых больше трёх. На эти и множество аналогичных вопросов ответ – да, можно, с помощью научной графики и предшествующей ей математической обработки. Так, например, на экране компьютера можно построить многоцветное изображение молекулы. Для тех, кто понимает всю меру условности этого изображения, оно принесёт большую пользу, чем тысячи чисел, являющихся плодом квантово-химического расчёта.

Геометрическое моделирование. Компьютерная геометрия даёт возможность пользователю при работе с компьютером манипулировать непосредственно геометрическими категориями. Метод геометрического моделирования, основанный на применении средств компьютерной геометрии, предполагает, что пользователь осуществляет постановку геометрической задачи, разработку геометрического алгоритма её решения, кодировку алгоритма на одном из геометрических языков программирования, анализ и интерпретацию полученных результатов. Компьютер обрабатывает закодированный алгоритм и предъявляет пользователю результаты этой обработки. Для реализации этого метода можно использовать как языки программирования высокого уровня, так и специально созданные для этой цели инструментальные средства – так называемые интегрированные системы компьютерной геометрии и графики (например, Геомал, Симак, Смог, Саграф, Padl, Tips, AutoSolid и др.).

В настоящее время метод геометрического моделирования находит применение в кристаллографии, физике прочности и т.д. Примером может служить использование этого метода при решении задач анализа пространственных форм сложных физических объектов, относящихся к этим разделам физики.

Разработанные в нашей стране и за рубежом системы компьютерной геометрии и графики обеспечивают геометрическое моделирование не только в двумерном и трёхмерном евклидовых пространствах, но и в геометрических пространствах более высокой размерности. Примером могут служить современные теоретические исследования в области физики

Схема решения задач методом геометрического моделирования

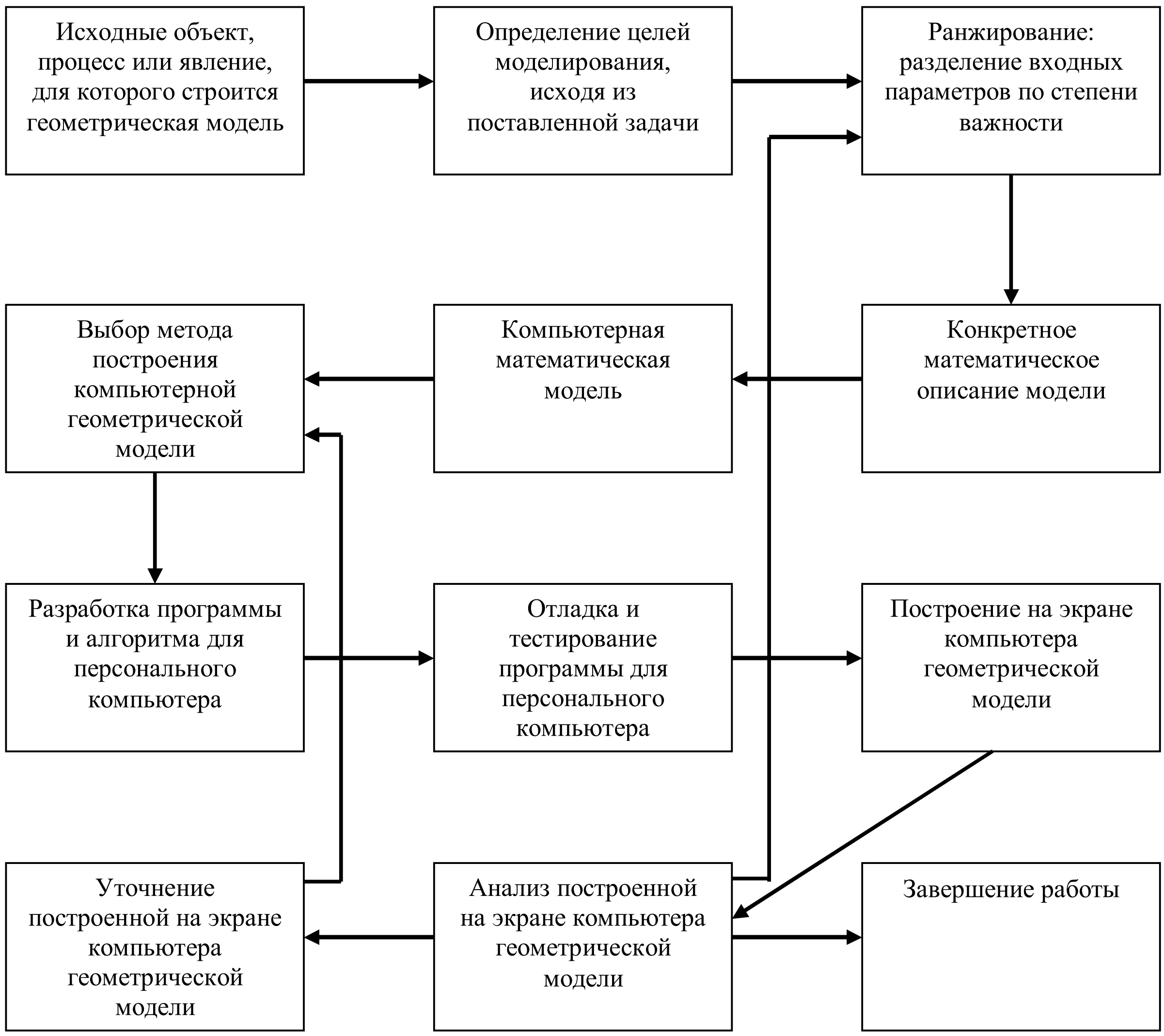


Рис. 1

элементарных частиц, ядерной физики и др.

Метод геометрического моделирования весьма широко использовался в докомпьютерный период. Появившаяся вычислительная техника предпочла численные методы, и геометрическое моделирование отошло на второй план. В настоящее время, когда компьютер «научился» обрабатывать не только числовую, но и графическую информацию, применение геометрического моделирования в научных исследованиях стало весьма актуальным.

На рисунке 1 представлена схема решения научно-исследовательских задач методом геометрического моделирования.

1.2. Информатизация образования, различные подходы

Информатизация образования. «Человечество вступает в новое столетие. XXI век будет веком знаний, веком информации, веком стремительного развития новых технологий. Со всей очевидностью это требует расширения масштабов и роста уровня образования, улучшения качества подготовки специалистов». С этих слов начинается обращение Совета Российского союза ректоров высших учебных заведений к государственным и политическим деятелям, представителям академических и деловых кругов (Москва, 2000 год).

Одним из основных и социально значимых направлений процесса информатизации современного общества является информатизация образования. Под информатизацией образования понимается процесс подготовки граждан к жизни в условиях современного информационного мирового сообщества и повышения качества общеобразовательной и профессиональной подготовки специалистов на основе широкого использования компьютерной техники и информационных технологий [39].

Проникновение информационных технологий в образование началось с середины пятидесятых годов, после появления достаточно мощных ЭВМ и создания первых языков программирования. Активное оснащение компьютерами учреждений образования в развитых странах Запада началось в конце 70-х годов. Предпосылкой для этого послужило появление персональных компьютеров. В Российской Федерации информатизация образования в широких масштабах началась в 1985 году. В школьную учебную программу был введён новый учебный предмет «Основы информатики и вычислительной техники», в течение короткого времени было создано учебно-методическое обеспечение этого курса, стали появляться первые педагогические программные средства и компьютерные программно-методические комплексы по общеобразовательным предметам.

В национальной доктрине образования в Российской Федерации определены цели воспитания и обучения, пути их достижения посредством государственной политики в области образования, ожидаемые результаты развития системы образования на период до 2025 года. Целый ряд положений этого документа относится к информатизации образования. Так, например, к основным целям и задачам, которые призвана обеспечить государственная система образования, отнесены следующие:

– организация учебного процесса с учётом современных достижений науки, систематическое обновление всех аспектов образования, отражающего изменения в сфере культуры, экономики, науки, техники и технологий;

– создание программ, реализующих информационные технологии в образовании и развитие открытого образования;

– подготовка высокообразованных людей и высококвалифицированных специалистов, способных к профессиональному росту и профессиональной мобильности в условиях информатизации общества и развития новых наукоёмких технологий.

В области подготовки педагогических кадров государство, признавая ведущую роль педагога в достижении целей образования, берёт на себя обязательство обеспечить привлечение в систему образования талантливых специалистов, способных на высоком уровне осуществлять учебный процесс, вести научные исследования, осваивать новые технологии и информационные системы, воспитывать у обучающихся духовность и нравственность, готовить специалистов высокой квалификации.

Таким образом, информатизация образования, внедрение в учебный процесс новых информационных технологий и подготовка соответствующих педагогических кадров относятся к приоритетным направлениям государственной политики в области образования.

Если же говорить о компьютеризации различных образовательных сфер и дисциплин неинформационного цикла, то наиболее существенные результаты здесь достигнуты в естественнонаучном и, прежде всего, в математическом образовании.

В докладе В.А. Садовничего отмечается: «…так уж сложилось историческое развитие математического образования в мире, что оно давно разделено на три как бы самостоятельных острова – профессиональное математическое образование, общее математическое образование и математическое просвещение. Всякие реформы, затеваемые в математическом образовании, – это в основном попытки навести какие-то мосты между названными островами. Но если раньше такие реформы предпринимались, как правило, в рамках отдельных стран и строились национальными математическими архитекторами, то теперь дело в корне меняется. Появился наднациональный реформатор математического образования. У него, как у Януса, – два лика. Один лик – это *компьютеризация образования*, второй – глобализация мира. Мосты, которые могут быть наведены между островами в математическом образовании в процессе компьютеризации и глобализации, несомненно, не обойдут стороной и Россию. Этого не понимать и с этим не считаться нельзя. Как, каким образом нам поступать и действовать, чтобы не остаться в стороне от происходящего с математическим образованием в мире и по максимуму использовать внешние и внутренние обстоятельства для дальнейшего улучшения нашей отечественной системы математического образования?» [193].

Чтобы ответить на поставленный в докладе вопрос в той его части, которая касается геометрического образования, относящегося к «островам» профессионального и общего математического образования и наведения между ними «мостов», нужно, на наш взгляд, уделить самое серьёзное внимание проблеме улучшения геометрической подготовки студентов математических факультетов педагогических вузов средствами информационных технологий. Для этого необходимо изучить не только все возможные направления решения этой частной проблемы (этому будут посвящены следующие главы монографии), но и обсудить различные подходы к самому процессу информатизации образования.

В процессе информатизации образования существуют два принципиально различных подхода. Первый из них ориентирован на применение в сфере образования обучающих систем, традиционно используемых в качестве средств передачи информации и обучения учащихся. Второй – на использование компьютера в качестве инструмента познания для анализа мира, получения доступа к информации, интерпретации и организации своих собственных знаний и представления этих знаний другим людям. Остановимся на каждом из них более подробно.

Проблемы информатизации образования, связанные с использованием обучающих систем. В настоящее время в образовательном процессе, поддерживаемом информационными технологиями, наиболее часто используются подготовленные специалистами (разработчиками) программные средства со встроенными элементами обучения. Применение таких учебных компьютерных программ в процессе реализации образовательных технологий схематично выглядит следующим образом: обучаемые получают от программного средства сообщение, обдумывают его, принимают решение и транслируют его программному средству, которое определённым образом реагирует на это решение.

На первом этапе этого процесса учащиеся, используя всё многообразие способов представления информации (текст, графика, звук, средства мультимедиа и пр.), постигают смысл сообщений, заложенных разработчиками в компьютер, принимают решение и соответствующим образом взаимодействуют с обучающей средой. Взаимодействие нередко выражается в том, что обучаемый, обработав очередную порцию информации, нажимает на клавишу для продолжения представления информации или для ответа на вопросы, задаваемые программой. При таких технологиях обучения компьютерное средство действует как наставник (или, как его ещё называют, «непроницаемый учитель») и направляет процесс обучения. Однако передача в ведение компьютера процесса управления обучением, особенно при подготовке специалистов с высшим образованием, не согласуется с идеей развивающего обучения. По мнению Д.Х. Джонассена, «вместо того, чтобы использовать компьютерные технологии для сведения процесса обучения к взаимодействиям учащегося с компьютером, запрограммированным разработчиком обучающей системы или преподавателем, необходимо передать эти взаимодействия учащегося с компьютером в ведение самих обучаемых, что позволит им самостоятельно представлять и выражать свои знания» [62].

Анализ использования информационных технологий в дисциплинах неинформационного цикла показывает, что большинство обучающих систем предназначено для автоматизации процессов генерирования заданий либо для контроля учебной деятельности, причём применяются они эпизодически и зачастую бессистемно. И.В. Роберт в монографии [183] отмечает, что «… фрагментарное использование программных обучающих средств с целью «латания прорех» традиционной методики не может иметь успех ни у обучаемых, ни у обучающих». Кроме того, большинство программных средств, ориентированных на осуществление контроля или деятельности, связанной с формированием определённых умений и навыков, реализует идеи программированного обучения. Как отмечается в этой же работе, «использование таких программ в учебном процессе как зарубежной, так и отечественной школы – это уже пройденный этап, принесший педагогической практике не столько удовлетворение, сколько разочарование».

Группа американских учёных провела мета-анализ 42 исследований, в которых компьютерное обучение сравнивалось с традиционным обучением в средних школах и колледжах [82]. Сравнение показало, что результаты применения в образовании компьютерных обучающих сред лишь на 0,4 % выше результата обучения традиционными методами. Это значительно ниже тех прогнозов, которые высказывались некоторыми учёными перед проведением эксперимента. В этих же исследованиях отмечается, что большинство программ нацелено на слабых учащихся, а их применение в учебном процессе оказывалось успешным только в рамках непродолжительных занятий, в начальной и средней школе, при постановке несложных когнитивных задач. Ряд исследователей – Н. Шнейдер, М. Меррилл, К. Флетчер и другие [82] – отмечают, что навыки полученные учащимися при работе со многими педагогическими программными средствами, не переносятся на решение практических задач, в первую очередь математических. Более того, на занятиях по математике, поддерживаемых некоторыми обучающими системами, у учащихся нередко появляется психологический эффект ожидания компьютерного представления, математического шоу, хоть и учебной, но всё же игры. Конечно, просмотр красочной демонстрационной программы со звуковым сопровождением и анимацией находит среди учащихся больше сторонников, чем решение даже не очень сложных математических задач занимательного характера. Возможно, с точки зрения гуманизации образования такая комфортность в обучении и нужна, но вызвать качественные изменения в преподавании математики, дополняя традиционные методы обучения лишь такими формами применения информационных технологий обучения, невозможно.

Для повышения педагогической и методической эффективности применения обучающих технологий предпочтение в последнее время отдаётся созданию интеллектуальных обучающих систем, основанных на компьютерном моделировании. Следует отметить, что «дидактический коридор» в процессе применения таких средств обучения становится значительно шире, а его границы – более гибкими. К сожалению, границы как таковые остаются и в этом случае, а, следовательно, обучающие системы, основанные на компьютерном моделировании, используются в образовании по-прежнему в роли хоть и более качественных, но всё же «непроницаемых учителей». В этом состоит их уязвимость, поскольку мышление учащегося по-прежнему ограничивается и контролируется обучающей системой.

Итак, ожидаемого педагогического эффекта от внедрения компьютерных обучающих систем получено не было. Причин этому много. Назовём некоторые из них:

– применение компьютерной обучающей среды помещает обучаемого в определённые «границы обучения», которые вольно или невольно устанавливаются её разработчиками и, следовательно, мало способствует развитию творческих способностей, нестандартного мышления, навыков исследовательской деятельности;

– недостаточная педагогическая проработанность многих обучающих систем;

– несоответствие педагогических идей, заложенных в обучающие системы, взглядам и воззрениям конкретного преподавателя;

– ориентация большинства обучающих систем на конкретные компьютеры, которых в распоряжении преподавателя часто не оказывается;

– трудности с организацией самоконтроля.

Компьютер как инструмент познания. В ряде зарубежных стран, например, Франции, США и Японии, а также в России, предпринимаются попытки пересмотреть традиционное направление в информатизации образования, связанное с использованием обучающих систем. Новое направление базируется на теории развивающего обучения и теории конструктивизма.

Так, например, группа исследователей (Д.Х. Джонассен, Б.Г. Вильсон, Т.М. Даффи и др.) в течение целого ряда лет успешно разрабатывает такие информационные технологии обучения, в которых существенно повышается роль учащегося, в том числе и контролирующая. В работах [62], [227], [230] и др. этими исследователями проектируются и всесторонне исследуются информационные технологии обучения, использующие программные средства, созданные для организации и облегчения процесса познания и не предназначенные специально для учебного процесса. Такие программные средства Д.Х. Джонассен и его коллеги (Kommers, Jonassen & Mayes [62]) называют *инструментами познания*.

Инструменты познания должны быть простыми и универсальными, чтобы с их помощью можно было достигать широко поставленные цели обучения. Сам инструмент не должен ограничивать пользователя в его действиях и намерениях. Манипуляции пользователя должны быть произвольны, минимально контролируемы системой, естественно ею воспроизводиться и интерпретироваться в конечные результаты обучения и труда. Таким образом, инструмент познания является активной средой, а не программой с жёсткой структурой следования по ней пользователя (обучающегося). Работая (обучаясь) в такой активной среде, пользователь сам наполняет эту среду специфическими объектами и их свойствами, соответствующими его предметной области. Технически это означает, что активная среда в каком-то смысле реорганизуется пользователем, то есть допускается построение в ней информационных и функциональных моделей, над которыми уже сама среда реализует функцию интерпретации посредством основных кибернетических операций [36]. Дополняя содержание этого понятия, Дэрри С.Д. отмечает, что инструменты познания – это различные компьютерные средства, которые «поддерживают, направляют и расширяют мыслительные процессы своих пользователей» [227]. Как считает Д.Х. Джонассен, «…учащиеся выступают в роли разработчиков, когда они используют компьютеры в качестве инструментов познания для анализа мира, получения доступа к информации, интерпретации и организации своих собственных знаний и представления этих знаний другим людям» [62].

Программные средства, которые являются инструментами познания по определению, одновременно являются инструментами для построения знаний и облегчения их приобретения по существу и вполне могут применяться при изучении практически любого предмета. В [62] аргументированно доказывается, что *базы данных, электронные таблицы, семантические сети, экспертные системы и средства мультимедиа/гипермедиа* относятся к таким инструментам.

В кандидатской диссертации [169] обосновывается эффективность применения в качестве инструментов познания средств *компьютерной графики и геометрического моделирования*.

Кроме указанных выше программных сред, в [62, стр. 130] сформулирована гипотеза о возможности использования программирования, проведение компьютерных конференций и микромиров в качестве инструментов познания.

Сторонниками нового подхода к применению компьютера в учебном процессе приводится целый ряд аргументов, в силу которых использование при обучении инструментов познания является эффективной альтернативой компьютерным обучающим системам. Приведём некоторые из этих аргументов.

Применение в процессе обучения инструментов познания:

– «позволяет расширить возможности студентов, обеспечив их широкими возможностями компьютера в плане предоставления информации» (Jonassen, Wilson, Wang and Grabinger [233]);

– «обеспечивает среду и средство, заставляющие обучаемых более интенсивно размышлять об изучаемом предмете и генерировать при этом идеи, что невозможно без этих инструментов» (Perkins [239]);

– «подразумевает обучение в процессе интеллектуального партнёрства компьютера с учеником, при этом учащиеся расширяют возможности компьютера, а компьютер одновременно развивает их мыслительные способности и знания; результатом такого сотрудничества является значительное повышение эффективности обучения» (Salomon, Perkins, Globerson [241]);

– «помогает учащимся расширить такие возможности своего мозга, как память, умственные способности, способность решать проблемы» (Pea [238]).

В области создания и использования компьютерных инструментов познания работают известные исследователи и практические разработчики S. Papert (Массачусетский институт технологий, США), J. Uhl (университет Иллинойса, США), J.M. Laborde (университет Ж. Фурье, Гренобль, Франция). Они являются авторами популярных книг и учебников по математике, в частности J.M. Laborde – по геометрии [235]. Методика преподавания, предложенная им, целиком опирается на «открытие геометрии» с помощью использования компьютера как инструмента творчества и познания. Такой метод преподавания и изучения различных дисциплин математического цикла успешно применяется в США и Европе на протяжении последних лет и даёт положительные результаты.

В России исследования в этом русле ведутся в Московском институте новых технологий образования, Российском научно-исследовательском институте системной интеграции, Санкт-Петербургском институте продуктивного обучения, Центре профессионального обновления

«Информатизация образования», Красноярском государственном педагогическом университете и других крупных учебно-научных центрах страны.

Педагогические теории, ориентированные на использование в обучении персонального компьютера. Новая концепция высшего образования направлена на коренное изменение существующих технологий обучения. Основным педагогическим стержнем большинства разрабатываемых в рамках этой концепции технологий обучения является развитие умения студента самостоятельно приобретать новые знания. На смену информационному подходу, суть которого можно определить как предметно-центрированное обучение, при котором главное – передача знаний, сведений, интеллектуальных конструктов, приходит информационно-деятельностный подход, при котором студент обучается способам получения знаний, профессиональных навыков и умений, погружается в реальную деятельность по овладению соответствующими способами и технологиями.

Отметим некоторые педагогические теории (технологии, методы, модели), разрабатываемые в рамках новой концепции высшего образования и ориентированные на использование в учебном процессе персонального компьютера.

- Группа исследователей (Jonassen, Duffi, Wilson, Wang и др. [62]) с 1991 года разрабатывает так называемую теорию *конструктивизма*. Разработчики конструктивистских моделей (технологий) обучения стремятся создать компьютерные среды, в которых учащиеся активно действуют и *сами* конструируют свои знания. Активность действий учащихся проявляется не в том, что они активно слушают, а затем реализуют один правильный взгляд на реальность, а в том, что они взаимодействуют с окружающей средой в целях создания *своего* собственного взгляда на предмет. Конструктивистские модели обучения развивают умения студентов самостоятельно приобретать знания, обучают студентов различным способам их приобретения.

Во многих университетах США большое распространение при обучении получил метод (технология) *лабораторных проектов* в сочетании с групповой формой обучения. Студенты работают в основном небольшими группами в компьютерной лаборатории, где пытаются *самостоятельно* воплотить в реальность идеи, предварительно обсуждаемые в аудитории. Компьютер играет неотъемлемую, но, как правило, вспомогательную роль, являясь не целью, а средством её достижения. Основные идеи этого метода были заложены ещё в 1919 году в городе Дальтон («Дальтон-план»). Реализуя метод лабораторных проектов, Е. Паркхарст заменил классно-урочную систему индивидуальной работой с каждым учащимся с последующей деятельностью каждого ученика по плану, выработанному совместно с педагогом. Сегодня педагогические учреждения вновь обращаются к некоторым идеям, лежащим в основе этого метода. Метод лабораторных проектов – это технология, которая позволяет индивидуализировать учебный процесс, даёт возможность учащемуся проявить самостоятельность в планировании, организации и контроле своей деятельности.

- Коллектив исследователей (О. Агапова, А. Кривошеев, А. Ушаков [1]) разрабатывает *проектно-созидательную* модель обучения. Базой этой модели является российская предметно-ориентированная модель фундаментального обучения с её отдельными учебными предметами и американская система проектов. Содержание, предназначенное для усвоения, разбивается на отдельные проекты, причём проектные работы осуществляются учащимися при поддержке преподавателей. Предметно-центрированное обучение в этой модели органично увязано с информационно-деятельностным подходом. Студенты, получая новые знания, одновременно обучаются способам их получения.

- Теория *программированного обучения* возникла в начале 50-х годов, когда американский психолог Б. Скиннер предложил повысить эффективность управления усвоением учебного материала, построив его как последовательную программу подачи порций информации и их контроля. В настоящее время под программированным обучением понимается управляемое усвоение программированного учебного материала с помощью обучающего устройства (ПК, программированного учебника и др.). Основные принципы программированного обучения: иерархия (ступенчатая соподчинённость частей) управляющих устройств, принцип обратной связи, осуществление шаговой учебной процедуры, принцип индивидуального темпа и управления в обучении, использование специальных технических средств. В настоящее время одним из вариантов программированного обучения в высшей школе является объединение идеи модульного обучения (такая организация процесса учения, при которой учащийся работает с учебной программой, составленной из модулей) с технологией проблемного обучения. Это объединение даёт гибкую технологию *проблемно-модульного обучения* (М.А. Чошанов [195]).

1.3. Информатизация вузовского образования

Процессом, объективно определяющим здоровое развитие общественного организма, является эффективное функционирование и развитие высшего образования. Одним из важнейших факторов развития высшей школы является её информатизация.

Рассмотрим в обзорном порядке некоторые направления информатизации высшего образования. Поскольку наши исследования связаны с внедрением компьютерных технологий в конкретную предметную область, то мы рассмотрим те направления, которые в той или иной степени затрагивают традиционные вузовские курсы. К таким направлениям мы отнесли следующие: *применение компьютера как средства вычисления; применение компьютера как объекта изучения; использование в обучении программирования; использование в обучении пакетов общего и специального назначения; использование при изучении различных дисциплин компьютерных обучающих программ.* Рассмотрим каждое из этих направлений отдельно.

Компьютер как средство вычислений. Первоначальное предназначение электронно-вычислительных машин было связано с удивительной возможностью этих устройств за короткий промежуток времени производить разнообразные вычисления практически любой сложности. Результаты этих вычислений были точными и безошибочными, причём машина, не утомляясь, могла выполнять их в течение достаточно длительного времени. Такое предназначение ЭВМ было отражено даже в её первоначальном названии.

Во второй половине 60-х годов (этот период времени ещё не относился к периоду информатизации образования) в нашей стране во многих учебных заведениях, в основном государственных университетах, региональных технических и педагогических институтах, появились дорогие и громоздкие сооружения, доступные лишь узкому кругу специалистов. Последние приглашались из вычислительных центров, предприятий космической и оборонной промышленности, отраслевых институтов. Студенты обучались использованию ЭВМ в основном при численной обработке результатов экспериментальных исследований, при решении задач вычислительной математики, других учебно-исследовательских работах, связанных с проведением большого объёма вычислений.

Компьютер как объект изучения. Практически одновременно с рассмотренным выше направлением информатизации высшего образования в некоторых ведущих технических вузах и университетах страны по ряду специальностей электронно-вычислительную машину (позже – персональный компьютер) стали рассматривать как объект изучения. Появились учебные курсы, отделения и целые факультеты, целью которых была подготовка специалистов, не только знающих устройство и архитектуру современных компьютеров, но и разбирающихся в физических основах его работы и способных создавать это замечательное достижение человеческого гения.

Это направление информатизации вузовского образования, безусловно, охватило лишь совсем незначительную часть студенческой молодёжи и оказало влияние на содержание и методы преподавания лишь отдельных учебных курсов, в основном физического цикла. Однако оно было крайне необходимо, так как в случае его отсутствия информатизация не только образования, но и всего общества вряд ли была возможной, причём не только в ближайшем, но и отдалённом будущем.

Программирование как вторая грамотность. Обучение программированию – одно из самых распространённых направлений информатизации высшего образования, а на первом этапе (примерно, с 1985 по 1995 годы) – и среднего образования. Поэтому не случайно главный отечественный идеолог школьной компьютеризации и информатизации образования академик А.П. Ершов считал программирование второй грамотностью.

Под программированием понимается деятельность, связанная с разработкой систем программного обеспечения. В начале 60-х годов все существующие языки программирования высокого уровня можно было пересчитать по пальцам, однако впоследствии их число достигло более трёх тысяч. Подавляющая их часть не получила сколько-нибудь широкого распространения. В практической деятельности используются не более двух десятков. Языки программирования служат разным целям, и их выбор определяется удобностью пользователя, пригодностью для данного компьютера и данной практической или учебной задачи. Если иметь в виду образовательные цели, то, например Бейсик, широко употребляется при написании простых программ, поэтому его используют при обучении школьников и будущих учителей информатики, которым этот язык будет необходим в их профессиональной деятельности. Программированием в учебных целях на этом языке занимаются не только учителя информатики, но и преподаватели других учебных дисциплин. Фортран является классическим языком программирования при решении на компьютере математических и инженерных задач, его используют в технических вузах и университетах. Язык Кобол, как основной язык обработки данных в сферах управления и бизнеса, используется на экономических факультетах. На факультетах педвузов, готовящих учителей начальных классов, и в младших классах некоторых школ учащихся обучают программированию на языке Лого. Язык Паскаль, развивающий идеи о структуризации разработки алгоритмов, первоначально тоже разрабатывался как учебный и сейчас является одним из основных языков обучения программированию в школах и вузах.

Все перечисленные языки относятся к процедурным. Принципиально иное направление в программировании связано с методологией непроцедурного программирования. Непроцедурное программирование разбивается на два класса – объектное и декларативное. Типичными представителями языков объектного программирования являются, например, Си$^{++}$, Delphi и Visual Basic, языков декларативного программирования – Пролог (логические языки) и Лисп (функциональные языки). Эти языки изучаются в обязательных (обзорно) и специальных (более основательно) курсах на факультетах вычислительной техники, математики, физики и информатики.

Программирование представляет собой один из важнейших разделов информатики как науки и учебного предмета. Общеизвестно, что программирование является мощным средством воспитания, развития мышления вообще и логического и алгоритмического мышления в частности. Однако следует признать, что большинство пользователей информационных технологий в обществе будут непрограммирующими. Поэтому в высших учебных заведениях по большинству специальностей, специфика которых не требует использования систем программирования, языки программирования не изучались и не изучаются. Тем не менее, при подготовке в вузах таких специалистов как, например, системный программист, инженер-оператор ПЭВМ, прикладной математик, учитель физики и учитель математики, знание нескольких языков программирования высокого уровня необходимо.

Впервые программирование для ЭВМ в системе высшего образования в качестве учебной дисциплины было введено на соответствующих факультетах университетов и ряде технических вузов в середине 50-х годов. По времени это совпало с созданием в 1954 году группой сотрудников Пенсильванского университета под руководством Грейс Муррей Хоппер системы, включающей язык программирования и компилятор, которая в дальнейшем получила название Math-matic. Неудобство этой системы состояло в том, что программирование выполнялось в машинных кодах. Чуть позже её группа приняла участие в разработке системы с языком более близким к обычному английскому языку (Flow-matic, Cobol).

В настоящее время направление в информатизации образования, связанное с использованием программирования, оказалось весьма перспективным в технических вузах, особенно для специальностей, относящихся к автоматизации технологических процессов. На соответствующих факультетах студенты подробно изучают один из алгоритмических языков и приобретают навыки программирования при решении сложных технологических задач. Такой подход позволяет им в рамках курсового и дипломного проектирования разрабатывать программное обеспечение, как для решения прикладных задач, так и для построения компьютерных тренажёров для обучения рабочих по тем или иным специальностям.

В педагогических вузах программирование для ЭВМ как учебная дисциплина была введена во второй половине 60-х годов, т.е. почти 50 лет назад. Электронно-вычислительные машины первоначально использовались кафедрами программирования и вычислительной техники (позже – кафедрами информатики) лишь для обеспечения своих учебных дисциплин. Однако через некоторое время к этому процессу подключились преподаватели математических и физических кафедр. Вычислительные машины использовались ими для обработки результатов научно-исследовательской (зачастую хоздоговорной) деятельности, в которой нередко принимали участие аспиранты и студенты. Постепенно взор предметников стал обращаться на учебный процесс. В конце семидесятых годов в рамках факультативных и специальных курсов преподавателями математических и физических кафедр читались циклы лекций, в которых предпринимались попытки «привязать» электронную технику к учебному процессу. Следует отметить, что программирование в этот период сыграло огромную роль в процессе компьютеризации вузовского и школьного образования.

Преподаватели совместно со студентами составляли программы для решения математических и физических задач, «прогоняли» и отлаживали их на ЭВМ. Диалоговые возможности появившейся позднее более совершенной компьютерной техники позволяли составлять программы для решения математических задач в режиме диалога, в частности, строить алгоритмы численного решения геометрических задач и реализовывать их на языках программирования высокого уровня (Бейсик, Паскаль, Си). Этот этап некоторыми специалистами назван этапом частичной («кусочной»), фрагментарной, «мелкосерийной» информатизации. В настоящее время происходит переход к этапу индустриальной, широкомасштабной информатизации. Другими словами, происходит переход от технологий, основанных на больших и средних ЭВМ и на устаревшем программистском стиле, когда «программирование для себя» было ведущим, к технологиям, ориентированным на персональные компьютеры, новое поколение интегрированного программного обеспечения и пользовательский стиль работы.

Компьютер как средство моделирования. Следующим важнейшим направлением информатизации вузовского образования является то, ради чего когда-то создали первую ЭВМ и ради чего сегодня создают суперкомпьютеры – решение прикладных научно-технических задач, среди которых задачи математического моделирования (имеется в виду его сугубо прикладной аспект) составляют видную долю. Изучение в вузе компьютерного математического моделирования открывает огромные возможности, как в познавательном плане, так и для осознания связи информатики с математикой, естествознанием и социальными науками. Компьютерное математическое моделирование в разных своих проявлениях использует практически весь аппарат современной математики (теорию дифференциальных уравнений, аппроксимацию функций, аналитическую, начертательную, дифференциальную и проективную геометрии, теорию геометрических преобразований и методы изображений, математическую статистику, численные методы и т.д.).

Прикладные математические модели, в реализации которых используются компьютеры, иногда делят на следующие три вида:

– вычислительные и аналитические модели, в основе которых лежат не только численные, но и аналитические методы решения математических задач;

– модели, визуализирующие явления и процессы (иногда некоторое множество чисел, уравнений или формул, являющихся результатом аналитических исследований и не создающих у обучаемых адекватного восприятия описываемых ими процессов или явлений, удобно представить графически, проиллюстрировать в динамике и даже озвучить, т.е. проделать то, что называется «визуализацией абстракций»);

– модели «высоких» технологий, понимаемых как специализированные прикладные технологии, использующие компьютер (как правило, в режиме реального времени) в сочетании с измерительной аппаратурой, датчиками, сенсорами и т.д. [159].

При построении всех видов моделей можно использовать специализированные пакеты программ решения математических задач и графической поддержки (Eureka, MathCad, MathLab, Derive, Maple, Mathematica, AutoCad и др.). Применение таких пакетов относится к одному из основных устоявшихся и эффективно работающих направлений для большинства специальностей в технических вузах и естественнонаучных специальностей классических и педагогических университетов.

Перспективность этого направления подготовки специалистов подтверждает также опыт работы преподавателей красноярских технических вузов со студентами технологических специальностей при изучении целого ряда курсов, например, таких, как «Моделирование и оптимизация технологических систем». При изучении этой и подобных ей учебных дисциплин студенты решают оптимизационные задачи с помощью имеющихся математических пакетов и пакетов прикладных программ, успешно применяют полученные знания при выполнении курсовых и дипломных работ. При большом дефиците учебных часов это направление резонно, когда требуется быстро и надёжно подготовить узкоспециализированного пользователя. «Минус такого обучения мы видим в развитии у пользователя «обезьяньего инстинкта», не прививающего ему компьютерную культуру, а значит, не позволяющего в дальнейшем адаптироваться в мире изменяющейся вычислительной техники» – отмечается в [43].

В последние годы при подготовке инженеров по ряду специальностей в технических вузах используется одна из самых сложных и специализированных разновидностей систем машинной графики –

инженерная графика, известная под именем САПР – системы автоматизированного проектирования. Это диалоговые системы, предназначенные для автоматизации процесса проектирования технических объектов, создания полных комплектов проектных документов с учётом существующих норм стандартов. К ним относятся следующие системы:

– двумерной графики для изготовления чертежей (Detail 2, Dragon, Radan, T200, Apakas, Редграф и др.);

– трёхмерной графики, обладающие возможностями для каркасного и поверхностного моделирования (Cadd, Ddm, Codem, Duct, Sigma-Arhi, Алграф и др.);

– трёхмерной графики, обладающие возможностями для объёмного моделирования (Catia, Compas, Romulus, Cadias, Autocad, Euclid, Смог-85, Симак и др.).

Во всех вузах страны студентов всех направлений подготовки и специальностей знакомят с инструментальными средствами общего назначения, которые могут использоваться для решения наиболее общих задач информационного характера в любой из сфер человеческой деятельности (текстовые редакторы и издательские системы, электронные таблицы и СУБД).

В зависимости же от специальности или профиля подготовки будущего специалиста его должны обучить работе с более специальными пакетами, которые могут понадобиться им как при изучении тех или иных вузовских курсов, так и в будущей профессиональной деятельности.

Так, в «классических» университетах и педагогических вузах студенты математических и естественных факультетов изучают специальные инструментальные программные средства, предназначенные, например, для проведения математических расчётов типа решения систем уравнений, интегрирования, статистической обработки информации и т.п. (MathCad, Reduce, Maple, Derive и т.д.). Таких пакетов огромное количество. Одно их перечисление заняло бы многие страницы и всё равно осталось бы не полным, так как новые «полуприкладные» системы появляются очень часто.

Многие специалисты считают, что информационную подготовку большинства будущих специалистов нельзя сводить лишь к пользовательскому компоненту. По их мнению, студентов ряда специальностей и направлений подготовки необходимо обучать основам программирования на одном (и даже более) из алгоритмических языков высокого уровня и приобретению навыков написания программ для решения научных и прикладных технических задач. Самостоятельно запрограммированное осознанное решение системы дифференциальных уравнений методом Эйлера и сопровождающая его простенькая самостоятельно созданная на Basic или Pascal иллюстрация в виде графика или движущегося по экрану предмета дают тому, кто это сделал, куда больше, чем обращение к пакету Mathematica с его могучими программами. От того, что задача будет решена, скажем, программой из этого пакета по методу Рунге-Кутта-Мерсона с автоматическим выбором шага интегрирования, реальных знаний практически не прибавится. Овладение студентами математиками возможностями одного из пакетов математической поддержки вполне желательно и может принести определённую пользу. Однако оно не заменит самостоятельно проделанной работы.

Обучающие программные средства. Первая автоматизированная обучающая система Plato была создана в начале 60-х годов в университете штата Иллинойс. С тех пор было разработано огромное количество обучающих программных средств для всех уровней системы образования.

Основные усилия специалистов в нашей стране и за рубежом были направлены на создание компьютерных средств обучения для средней школы. Однако и в высших учебных заведениях, лидируют здесь в основном ведущие технические вузы, при изучении некоторых дисциплин также применяются обучающие программные средства. Диапазон функций, выполняемых обучающими программами в сфере высшего образования не так широк, как в средней школе. По своему назначению эти программы можно разделить на контролирующие, справочно-информационные, моделирующие и электронные учебники.

К контролирующим программам относят преимущественно разного рода тесты, опросники, имеющие основной целью облегчение преподавателю контроля знаний студентов.

Справочно-информационные системы предназначены для обеспечения студента и преподавателя необходимой в процессе обучения информацией. Это могут быть компьютерные справочники по разным направлениям, различные базы данных, словари.

Моделирующие программы реализуют возможность работы с различными объектами, устанавливают взаимосвязь между объектами. Такие программы позволяют, например, моделировать на экране эксперименты, протекающие реально в течение очень малых или очень больших временных промежутков, представляющих разного рода опасность при их проведении.

Одним из наиболее популярных и интенсивно разрабатываемых в последнее время типов компьютерных обучающих средств в высших учебных заведениях являются электронные учебники. Они представляют собой программно-методические комплексы, позволяющие самостоятельно освоить учебный курс или его большой раздел. Как правило, электронный учебник реализуется в виде книги и комплекса программных средств. Он соединяет в себе свойства обычного учебника, справочника, задачника и лабораторного практикума.

В качестве примера приведём электронный учебник Ю.Г. Древса и Ю.В. Дубровского по курсу «Прикладная математическая статистика» для студентов третьего курса Московского инженерно-физического института по специальности «Управляющие интеллектуальные системы» [65].

Учебник включает в себя четыре раздела, каждый из которых содержит теоретический материал, контрольные вопросы, самостоятельную работу и контрольные задачи. Выбор задач в качестве основной формы контроля обусловлен тем, что передача вычислений компьютеру имеет тот недостаток, что не требует от студента полного понимания используемых вычислительных алгоритмов. Только самостоятельное, «вручную», решение контрольной задачи может продемонстрировать усвоение материала. При возникновении трудностей студент может отказаться от решения и вернуться к изучению теоретического материала. При рассматриваемом методе контроля важными являются ограничения по времени и по числу повторных попыток решения.

Несмотря на наличие большого количества программных средств и компьютерно-ориентированных методик обучения студентов, лишь только в крупнейших вузах России (МГУ, МГТУ, МИФИ, МИСиС, НГУ, ТомПИ, ПермПИ, СПбГЭТУ и др.) наблюдается устойчивая тенденция ускорения информатизации процесса обучения. Перечислим приведённые в [36] причины, затрудняющие внедрение информационных технологий в высшее образование.

Во-первых, неподготовленность значительной части преподавательского состава к освоению информационных технологий и введению их в практику преподавания.

Во-вторых, уход в последние годы из высших учебных заведений части лучших кадров, чаще всего тех преподавателей, которые имели опыт использования компьютерных технологий.

В-третьих, инерционность в преподавании ряда традиционных общеобразовательных учебных курсов (например, математический анализ и т.п.), имеющих многовековые традиции, методики и преемственность.

В-четвёртых, частичное снижение в последнее время престижа высшего образования среди молодёжи России.

В-пятых, финансовые проблемы, связанные с тем, что «малая» информатизация оказывается неэффективной, а «большая» – чрезмерно дорогой и не дающей сиюминутной отдачи.

В-шестых, необходимость решения одновременно с другими вопросами и задач освоения новых информационных технологий и проблем, связанных со старыми традиционными учебными технологиями (обеспечение вузов достаточным количеством новых учебников, обновление старых и т.д.). При этом необходимо учитывать, что не все учебные программы целесообразно обеспечивать электронными учебниками из-за их специфики и по соображениям их доступности и эффективности использования.

1.4. Геометрическая подготовка бакалавра – будущего учителя математики и её содержание в условиях профессионально-педагогической направленности обучения

В первых трёх параграфах были рассмотрены социальные предпосылки настоящего исследования, которые связаны с информатизацией образования. Не менее важны для нашего исследования и социальные предпосылки, относящиеся к «геометрической» линии. Если с общих позиций сравнивать эти две линии, то приоритетной, безусловно, будет последняя, и начинать первую главу следовало бы с неё. Однако мы поступили иначе по следующим причинам. Во-первых, информационным технологиям, как новому средству геометрической подготовки студентов – будущих учителей математики, в разрабатываемой нами методической системе отводится центральная роль, которая по значимости сопоставима с целями и содержанием системы. Во-вторых, в основе реализуемой нами концепции лежат шесть принципов, также тесно связанных с информационными технологиями.

Обсуждение «геометрической» линии социальных предпосылок исследования мы начнём со средней школы, предварив его небольшим обзором по истории школьного геометрического образования в России.

Анализ школьного геометрического образования. Геометрические знания на Руси были распространены в раннее средневековье, однако лишь только к середине XVIII века геометрия начала оформляться как самостоятельный учебный предмет. До этого отдельные геометрические факты, преимущественно связанные с землемерием, рассматривались в различных курсах, в том числе в курсе арифметики. При обучении использовались рукописи «Устав ратных дел», «Книга Сошного письма» и другие. Одним из первых массовых учебников, содержащих геометрические знания, была «Арифметика», написанная Л.Ф.Магницким в 1703 г. Во второй половине XVIII века на смену этому учебнику пришли «Генеральная геометрия» Н. Курганова (1765) и «Теоретическая и практическая геометрия» Д.С. Аничкова (1780). В конце XVIII века во многих городах России стали открываться народные училища, а с 1804 года – гимназии, уездные и приходские училища, что способствовало более активному распространению геометрических знаний.

Несмотря на это, в дореволюционной России большинство детей, проживающих за пределами городов и крупных сел, практически не получали никакого геометрического образования. По инициативе педагогической и научной общественности страны в конце девятнадцатого и начале двадцатого веков прошли всевозможные обсуждения проблемы математического образования в различных государственных комиссиях, на съездах преподавателей математики, других форумах. В результате этой деятельности на государственном уровне был принят ряд постановлений, направленных на улучшение математической и, в частности, геометрической подготовки учащихся.

В 1920 г. была подготовлена первая примерная программа по геометрии, в которой изложение предлагалось строить с широким привлечением движения, подчёркивалась важность геометрического, технического и проекционного черчения. В курс рекомендовалось включить основы аналитической геометрии. Например, в программе по геометрии для восьмых-девятых классов планировалось изучение планиметрии на основе фузионизма, вычисление объёмов на основе принципа Кавальери. Однако школа того времени по ряду объективных причин (нехватка учебников, отсутствие методических пособий, необязательность выполнения программ, несовершенство методов преподавания, отсутствие оценок и экзаменов) не могла обеспечить необходимых геометрических знаний. Буквально через два года эта программа прекратила своё существование, и в школе началось многолетнее проведение различных педагогических экспериментов, которое отрицательно сказалось на математической подготовке учащихся.

В 1933 году школа опять вернулась к предметной системе обучения, перешла на новые учебные планы и программы. Однако программа по геометрии, как и её предшественница в 1920 году, особенно для старших классов, была достаточно сложной. Как следствие этого на следующий год в десятом классе вместо элементов аналитической геометрии был введён так называемый повторительный курс математики. Проработав по «модернизированной» программе лишь два года, школа вернулась к традиционному, проверенному временем и опытом, учебному геометрическому материалу. По этой программе, которая лишь незначительно уточнялась и совершенствовалась, школа проработала более двадцати лет.

В конце пятидесятых годов, в связи с принятием закона об укреплении связи школы с жизнью, опять произошёл переход на новые программы. В школьный курс алгебры были включены элементы анализа. Центральное место в программе по планиметрии заняли геометрические преобразования. Но и эта попытка поднять на современный уровень геометрическую подготовку школьников с помощью идеи геометрических преобразований не дала положительных результатов. Школьники в основной своей массе не понимали эти и некоторые другие непростые математические понятия. Вскоре геометрические преобразования, как и элементы математического анализа, были исключены из программы.

Очередная попытка обновить содержание школьного математического образования была предпринята в конце шестидесятых годов. Толчком к этому послужили рекомендации Международной комиссии по математическому образованию. Эта комиссия предлагала ввести в школьный курс математики элементарную теорию множеств, элементы математической логики, понятия современной алгебры (группы, кольца, поля), начал теории вероятностей и статистики, геометрические преобразования и сократить время на изучение некоторых традиционных вопросов (синтетическая геометрия, решение треугольников и др.). Была создана аналогичная комиссия и в нашей стране, её математическую секцию возглавил А.Н. Колмогоров. Результатом работы секции явился переход школы на новые программы по математике. Геометрические преобразования в очередной раз вводились в программу курса геометрии. Подход к включению этого понятия в содержание курса теперь был более продуманным и методически обоснованным. Преобразования плоскости и пространства не просто появлялись в курсе как некоторые новые понятия геометрии, они помещались авторами в центр курса, и большинство понятий геометрии увязывалось с ними.

Однако и такой подход не принёс успеха. Учащиеся упорно не воспринимали преимущества построения геометрии на основе геометрических преобразований. Через некоторое время, в который уже раз, школа была вынуждена перейти к программам, базирующимся на традиционном, проверенном временем содержании школьного курса геометрии.

К началу семидесятых годов научная и педагогическая общественность многих стран стала высказывать в печати неудовлетворённость состоянием преподавания школьной математики, в первую очередь геометрии.

В Российской федерации к этому времени завершился переход к всеобщему среднему образованию. В школах состоялось несколько выпусков, и можно было уже подвести некоторые итоги. А они оказались для предметов естественно-математического цикла не очень утешительными. Если до введения всеобщего среднего образования учащиеся, которые были интеллектуально не готовы освоить программы курсов 9-го и 10-го класса, в первую очередь алгебры и геометрии, уходили в систему профессионально-технического образования, то теперь они были вынуждены продолжать обучение. Учителям математики ещё как-то удавалось обучить эту категорию учащихся основным алгоритмам алгебры. Однако в отношении менее алгоритмизируемой геометрии результаты оказались хуже. Чтобы эта категория учеников могла получить среднее образование, школа была вынуждена снизить уровень требований по геометрии ко всем выпускникам, что автоматически повлекло снижение уровня их геометрической подготовки.

Это замечание авторов отнюдь не следует расценивать как призыв отказаться от всеобщего среднего образования, которое гарантировано нашему обществу конституцией. Мы его приводим лишь с той целью, чтобы подчеркнуть возникшую в то время потребность в изменении содержания школьного курса геометрии. Однако вместо того, чтобы программы и школьные учебники по геометрии адаптировать под новые реалии, сделать их более доступными и понятными, комиссия по математическому образованию при Министерстве просвещения поступила с точностью до наоборот. Появился учебник, созданный под руководством А.Н. Колмогорова, в котором в качестве концептуальной основы была взята идея геометрического преобразования. Эта идея, заимствованная у Ф. Клейна из его Эрлангенской программы, конечно, соответствовала духу времени и современным достижениям науки, но её реализация оказалась не совсем удачной. Через некоторое время на смену этому учебнику пришли другие. Сначала – учебник А.В. Погорелова, который опять вернулся к схеме А.П. Киселёва, но уже с современных позиций. К сожалению, он был написан сжато и походил скорее на книгу для учителя, чем ученика. Чуть позже, в качестве альтернативного, появился учебник авторского коллектива, возглавляемого Л.С. Атанасяном. Этой книгой уже могли пользоваться и ученики. В последнее время наряду с этими учебниками в школах можно увидеть большое число книг других авторов. Вместе с тем ситуация с преподаванием геометрии по-прежнему обстоит неблагополучно.

Причины снижения геометрической подготовки выпускников школ обсуждались специалистами в статьях журналов «Математика в школе», «Математическое просвещение» и другой специальной литературы. Остановимся на некоторых из них.

Одной из основных причин снижения интереса к геометрии и, как следствие, снижения геометрической подготовки учащихся авторы этих статей считают увлечение основами геометрии. Большинство упомянутых выше учебников, включая некоторые из появившихся в последние годы, построены на аксиоматической основе. Но для нормального усвоения этих основ нужен высокий уровень логической подготовки, который у учеников отсутствует.

Ещё одна причина снижения интереса к геометрии – это переход к единому государственному экзамену. Результатом такой акции, не имеющей, на первый взгляд, никакого отношения непосредственно к самому процессу преподавания геометрии, явилось то, что учителя математики стали меньше уделять внимания этому предмету. Участились случаи, когда вместо уроков геометрии стали проводиться уроки алгебры. Руководство некоторых школ стало заменять уроки геометрии модными в то время предметами гуманитарного цикла. Уменьшилось число промежуточных контрольных срезов по геометрии, снизился объём домашних заданий и уровень их сложности. Учащиеся стали меньше решать геометрических задач.

Творческий потенциал геометрии был снижен за счёт подхода к школьной геометрии, связанного с ориентацией на векторный и координатный методы. В связи с этим «в тени осталось большинство «рукодельных» приёмов, благодаря которым геометрия и превращается в своего рода искусство» – отмечает И.Ф. Шарыгин [216].

По мнению ряда исследователей, причиной снижения интереса к геометрии явилась усиленная пропаганда тезиса о том, что целью обучения геометрии является развитие логического мышления. И. Ф. Шарыгин считает, что целью обучения геометрии является развитие «скорее не логического мышления, а логической интуиции, которая, объединившись с интуицией геометрической, является мощнейшим инструментом исследования» [216].

Причиной снижения геометрической подготовки учащихся послужила также недостаточно продуманная методика применения в школьном курсе геометрии информационных технологий обучения. Об этом мы говорили с общих позиций информатизации образования в предыдущих параграфах и будем ещё говорить с позиции компьютеризации курсов геометрии в следующем параграфе.

О традиционной системе геометрической подготовки учителя математики. В нашей стране система геометрической подготовки учителя математики имеет давнюю историю и глубокие корни. В течение всего времени своего развития она складывалась стихийно, постепенно отшлифовывались её компоненты: цели, содержание, формы, методы и средства. Естественно, что в первую очередь, в связи с изменяющимися запросами общества, корректировались цели системы. Отметим, что происходило это не всегда осознанно, зачастую подсознательно, на интуитивном уровне. В основе традиционно складывавшейся методической системы всегда лежали достижения геометрических и психолого-педагогических наук.

Как известно, первоначально в педагогических институтах в разное время либо читался единый курс геометрии (иногда его называли высшей геометрией), либо велись отдельные геометрические дисциплины. Геометрический компонент математической подготовки будущего учителя математики в шестидесятых годах реализовывался в процессе преподавания таких курсов, как «Аналитическая геометрия», «Проективная геометрия», «Основания геометрии» и «Элементарная математика и практикум по решению школьных задач». Отметим, что в учебных планах тех лет на их изучение отводилось около 400 аудиторных часов. Много внимания в то время уделялось элементарной математике.

Во второй половине семидесятых годов разрозненные геометрические курсы были объединены в единый курс геометрии. В этот курс в качестве дополнительного раздела была включена дисциплина «Элементы топологии, линии и поверхности в евклидовом пространстве», которая читалась в основном в классических университетах, а в усечённом виде присутствовала в курсе математического анализа педвузов. Курс «Элементарная геометрия и практикум по решению школьных задач» стал сугубо практическим курсом, изменилось и его наименование. Он стал называться «Практикум по решению задач». Несмотря на добавление целого раздела, общее количество часов, отводимое на курс геометрии вместе с геометрической частью практикума по математике, уменьшилось до 320 часов.

В объяснительной записке к программе этого курса говорится, что постановка единого курса геометрии должна обеспечить развитие у будущего преподавателя достаточно широкого взгляда на геометрию и вооружить его конкретными знаниями, дающими ему возможность преподавать геометрию в средней школе и квалифицированно вести факультативные курсы по геометрии.

В программах 1977 года отмечается, что «в курсах алгебры и теории чисел, геометрии, математического анализа и других математических дисциплин многие темы непосредственно связаны с преподаванием математики в школе». Однако, не смотря на это, в рабочих учебных программах большинства математических кафедр вопросы школьной математики встречаются не так часто. Высшая педагогическая школа, имеющая самое непосредственное отношение к происходящей в средней школе реформе математического преобразования, подняла вслед за школой на более высокий уровень строгость и абстрактность изложения всех математических дисциплин. Это направление образовательной политики легко усмотреть, если познакомиться с содержанием программы курса геометрии и государственного экзамена по математике. Например, в плане геометрической подготовки от экзаменующихся на государственном экзамене требуется: знание аксиоматического метода построения геометрии; ясное представление о различных группах преобразований плоскости; владение векторным и координатным методами; знание основ теории изображений; знание определений и примеров топологических многообразий; основных свойств линий и поверхностей в евклидовом пространстве. Как видно из приведённых требований, они сориентированы в основном на разделы, слабо связанные со школой. Если добавить к этому формальное заучивание и зазубривание экзаменуемыми теории при подготовке к государственным экзаменам, слабые ответы на самих экзаменах, то станет понятным уровень геометрической подготовки большинства будущих учителей математики в восьмидесятых годах.

Авторы учебников по геометрии для педвузов [27, 28, 33], изданных практически одновременно с этими учебными программами и написанных в строгом соответствии с ними, как бы соревнуются между собой по степени абстрактности изложения материала. Самостоятельно изучать геометрию по некоторым из этих учебников студентам стало практически невозможно. В условиях перехода на новые учебные планы, программы и учебники многое, если не всё, стало зависеть от преподавателей геометрии, обеспечивающих чтение этого курса. Кафедры геометрии большинства педагогических вузов приступили к изданию собственных учебно-методических пособий, методических разработок и рекомендаций по основным разделам курса геометрии, стали больше уделять внимания вопросам методики преподавания читаемых ими математических дисциплин.

Программа 1977 года курса геометрии в педвузах, как и в классических университетах и технических институтах, по сложившейся традиции начинается с аналитической геометрии. Затем, опираясь на векторный и координатный методы, изучаются остальные геометрические разделы. Отметим, что как первый, так и все последующие разделы не имеют прямого выхода на школу. Студенты быстро приходят к выводу о том, что вузовская геометрия, как по содержанию, так и по методам существенно отличается от школьной. Далеко не всем из них удаётся осознать тот факт, что основные идеи элементарной геометрии буквально пронизывают все математические курсы. Если в классических университетах и технических институтах такая последовательность изучения геометрических дисциплин представлялась и представляется приемлемой, то в педвузах стало ясно, что при такой структуре курса не удастся подготовить студентов к осознанному и разумному взгляду на школьную геометрию. Составителями программы предполагалось, что все необходимые сведения по элементарной геометрии будущие учителя получают, обучаясь в школе. Опыт показал, что выпускники педвузов, прослушавшие такой курс «высшей геометрии», оказывались плохо подготовленными к преподаванию геометрии в школе. То чему и как их учили в таком курсе, было, как правило, мало похоже на, то чему и как им приходилось обучать детей в школе. Одновременно выяснилось, что и курсы высшей алгебры, и математического анализа не обеспечивают необходимых знаний по школьному курсу алгебры и начал анализа.

Содержание геометрической подготовки учителя математики в условиях ППНО. В 1988 году после защиты А.Г. Мордковичем докторской диссертации был организован и начал активно работать под его руководством Всероссийский семинар преподавателей математики педагогических институтов, посвящённый *профессионально-педагогической направленности обучения* (ППНО) студентов в педвузе. Основу концепции ППНО составили четыре принципа: фундаментальности (фундаментальность как средство подготовки учителя), бинарности (объединение общенаучной и методической линий), ведущей идеи (связь вузовского и школьного курсов) и непрерывности (в постижении педагогической деятельности).

В ряде пединститутов, и в частности в Красноярском, в основные математические курсы стали внедрять принципы бинарности и ведущей идеи методической системы А.Г. Мордковича. Особенно кардинальные изменения были внесены в курс геометрии. При этом разработанная А.Г. Мордковичем система целей потребовала лишь незначительной корректировки, вытекающей из особенностей преподаваемого предмета. Более существенные изменения пришлось внести в само содержание этого курса. Прежде всего это коснулось вопросов элементарной геометрии. Как известно, введённый в своё время курс так называемой элементарной математики должен был не только восполнить пробелы в знаниях, умениях и навыках по школьному курсу математики, но и значительно расширить знания студентов в области элементарной математики. Считалось, что такому курсу будет придана необходимая педагогическая направленность и сам он будет приближен к курсу методики преподавания математики, что в конечном счете улучшит профессиональную подготовку выпускников.

С первых шагов разработки программы такого курса начались бесконечные споры о его назначении, а главное, о содержании понятия «Элементарная математика». Программы неоднократно менялись, менялось место курса в учебном плане и даже его название. В самом курсе элементарной математики рассматривались вопросы зачастую далекие от тех, которые изучаются в школе, а основное время тратилось на решение именно таких задач повышенной сложности.

Впервые отчетливо и ясно концепция курса была сформулирована в объяснительной записке к программам 1988 года (ответственные редакторы – В.И. Ефимов, А.Г. Мордкович).

В соответствии с этой концепцией в «Практикум по решению математических задач», так в те годы назывался этот курс, должны были входить задачи из тех разделов школьного курса математики, которые недостаточно представлены в основных математических курсах. Затем в него включались типы школьных задач, достаточно представленные в основных математических курсах, но допускающие в своём решении смещение смысловых, содержательных и психологических акцентов. Наконец, в него рекомендовалось включить школьные задачи, которые также широко представлены в основных математических курсах, но, как показывает опыт, требуют постоянного к ним обращения для формирования у будущего учителя прочных навыков и умений в их решении. К сожалению, уже в первых государственных образовательных стандартах эти рекомендации были проигнорированы.

Процесс систематических изменений не только отдельных программных вопросов, но даже самой концепции курса «Элементарной математики» свидетельствует о недостаточной продуманности и эффективности принятого в свое время решения о выделении вопросов так называемой элементарной математики из основных математических курсов. Действительно, это решение чревато рядом недостатков:

– при таком выделении нарушается цельность и логическая стройность основных математических курсов;

– само выделение основывается на весьма сомнительном делении математики на элементарную и высшую;

– отсутствие в основном курсе вопросов элементарной математики затрудняет переход от школьного курса математики к вузовским курсам;

– отсутствие в основном курсе вопросов, близких к школе, уменьшает возможности использования в обучении профессионально-педагогической мотивации;

– при исключении из основных математических курсов вопросов элементарной математики существенно уменьшаются возможности реализации основных принципов ППНО, прежде всего принципа ведущей идеи и бинарности.

С самого начала дискуссий о месте и назначении курса «Элементарной математики» предлагалось включить входящие в него вопросы в основные вузовские математические курсы. Однако это предложение было отвергнуто. Считалось, что преподаватели, читающие основные курсы, как правило, являющиеся математиками, а не методистами, не смогут, а главное, не захотят вникать в проблемы школьной математики, и прочтут все эти вопросы излишне академично, без связи со школьными курсами. Был и еще один мотив: вопросы элементарной математики неизбежно попадут в самое начало основного курса, и его придется читать первокурсникам, еще не готовым к восприятию методических идей.

В условиях реализации концепции ППНО в основных базовых курсах высшей математики необходимость такого разделения курсов элементарной и высшей геометрии отпала. Появилась возможность восстановить цельность геометрического курса, включив в него вопросы элементарной (школьной) геометрии.

Включение в основные курсы математики вопросов так называемой элементарной, в том числе и школьной, математики, позволило:

– восстановить целостность и логическую стройность основных курсов;

– снять необходимость деления математики на элементарную высшую;

– смягчить переход от школьного курса математики к вузовским курсам;

– более полно реализовать профессионально-педагогическую направленность обучения;

– усилить профессионально-педагогическую мотивацию;

– более эффективно осуществлять пропедевтическую линию;

– активно реализовать деятельностный подход в обучении математике, расширить базу развития творческих способностей студентов.

Включение в основной курс геометрии вопросов элементарной математики усилило мотивировку обучения и обеспечило плавность перехода от школьной математики к вузовской. А это в свою очередь отвечает критерию *интегративности.* Отвечает оно и критерию *дидактической изоморфности,* ибо такой интегрированный курс геометрии в большей степени, чем традиционный, соответствует структуре геометрической науки, ходу её исторического развития. Большой объем решаемых при этом задач, близких по содержанию и методам решения к школьным, создает хорошие условия для реализации принципов *бинарности* и *ведущей идеи*.

При включении в основной курс вопросов элементарной (близкой к школьному курсу) математики, нам пришлось учитывать несколько важных моментов. Во-первых надо было решить, какие из изучаемых в школе вопросов целесообразно включать в такой интегрированный вузовский курс, во-вторых – как эти вопросы распределить по разделам курса и, наконец, выяснить – какие еще вопросы элементарной математики, не входящие в школьный курс, следует включить в интегрированный курс геометрии.

Рассмотрим эти вопросы последовательно.

1. При включении вопросов школьной математики в основной геометрический курс учитывалось, что некоторые разделы школьной геометрии хорошо представлены в вузовском курсе и не требуют существенной переработки соответствующих его разделов. К таким вопросам можно отнести, например, векторы, метод координат, аксиоматический метод, параллельное проектирование, изображение фигур.

Ко второй группе относятся вопросы, изучение которых хотя и предусмотрено государственными образовательными стандартами первого и второго поколений (по основному курсу геометрии), всё же требует иных, чем обычно, подходов, иного распределения по разделам курса, концентрического изучения материала, использования пропедевтических приемов. К ним, например, можно отнести вопросы измерения величин, а также вопросы геометрических преобразований. В частности изучение вопросов измерения величин нами распределено между первым и вторым семестрами. В первом семестре – общая теория измерения длин, площадей и объемов рассматривается на аксиоматической основе, а во втором, после введения системы координат, доказываются теоремы существования. Вопрос о геометрических преобразованиях рассматривается в двух разделах курса: в первом семестре – движения и подобия плоскости с решением более сложных, чем в школе задач, и в четвертом, который весь посвящен вопросам геометрических преобразований.

К третьей группе относятся вопросы школьной математики, изучение которых в курсе геометрии не предусмотрено государственными образовательными стандартами первых двух поколений. К ним можно отнести основные свойства геометрических фигур, равенство треугольников, сумму углов, основные линии треугольника; параллелограмм и его свойства; окружность, круг и их части; вопросы метрической геометрии; теорему Пифагора; тригонометрию острого угла; вопросы, связанные с решением задач на построение циркулем и линейкой (в стандартах второго поколения некоторые из этих вопросов рассматриваются в курсе «Элементарная математика»).

2. Отобранный для рассмотрения в вузовском курсе материал не концентрируется в первом семестре, а рассредоточен по материалу практически всех модулей.

В первом модуле (геометрия на плоскости) рассматриваются следующие вопросы школьного курса: *идея логического построения геометрии. Геометрические фигуры, прямая и окружность как множества точек; аксиомы циркуля и линейки с решением основных задач на построение, метод пересечения фигур, алгебраический метод. Построение правильных n-угольников. Движения и подобия (в порядке пропедевтики геометрических преобразований), равные и подобные фигуры. Метрические соотношения. Классические теоремы о треугольниках и окружностях. Площади многоугольников. Формула Герона. Теорема Пифагора, различные способы доказательства. Площадь круга и его частей.*

Во втором модуле (метод координат), посвященном координатному и векторному методам на плоскости и отчасти в пространстве (рассмотрение аналитической геометрии в пространстве завершается в третьем модуле «Геометрия в пространстве»), рассматриваются следующие вопросы школьного курса: *прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве, расстояние между точками. Векторы на плоскости и в пространстве, их координаты, скалярное произведение векторов. Уравнения прямой на плоскости. Уравнения окружности.*

В третьем модуле (геометрия в пространстве) рассматриваются следующие вопросы школьного курса*: аксиомы стереометрии, прямые и плоскости в пространстве, геометрические построения в пространстве; понятия геометрического тела и поверхности, анализ школьных определений. Изображение пространственных фигур с помощью параллельного проектирования, построение сечений. Правильные* *многогранники. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера. Понятие объёма. Способы вычисления объёма, принцип Кавальери. Объём прямой призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара.*

В четвертом модуле (геометрические преобразования), посвященном преобразованиям плоскости и пространства, рассматриваются следующие вопросы школьного курса: *движения плоскости и пространства. Симметрии фигур. Подобия плоскости и пространства, гомотетии. Использование геометрических преобразований при решении задач.*

В пятом модуле (проективная геометрия) рассматриваются вопросы *построения изображений фигур при центральном проектировании, геометрические построения одной линейкой*.

В шестом модуле (основания геометрии) рассматриваются следующие вопросы школьного курса: *аксиоматический метод построения геометрии. Системы аксиом, используемые в школьном курсе геометрии*.

3. При включении в основной курс вопросов элементарной геометрии нельзя было ограничиваться механическим повторением школьного учебника. Это было бы не интересно ни студентам, ни преподавателям. К тому же это противоречило бы основному правилу повторения учебного материала, требующему чтобы повторяемый материал рассматривался в новом ракурсе, в новых связях, обеспечивая обучаемому развитие. Поэтому отобранный школьный материал не переносится механически в вузовский курс, а подвергается существенной переработке. В большинстве случаев этот материал расширяется, в него включаются новые элементы, например:

– при решении задач на построение не только увеличивается, по сравнению со школой, их число и сложность, но и рассматривается вопрос о разрешимости задач на построение циркулем и линейкой, а также построения другими инструментами и с помощью специальных линий;

– при построении изучаемых в школе правильных многоугольников, рассматривается построение золотого сечения и правильного пятиугольника, а также теорема Гаусса (без доказательства);

– при рассмотрении теорем метрической геометрии предусматривается доказательство теоремы С.А. Анищенко о двух синусах, а также теорем Птолемея, Чевы, Менелая, задач Эйлера и их использование при решении задач;

– при рассмотрении вопроса об измерении величин вводятся понятия равновеликости и равносоставленности фигур и доказывается теорема Бояи-Гервина;

– помимо выводимых в школе площадей многоугольников, доказывается теорема Брахмагупты о площади четырёхугольника, вписанного в окружность;

– расширяется круг вопросов, связанных с системой координат, которые естественным образом перерастают в элементы аналитической геометрии; рассматривается решение школьных задач с использованием координатного метода.

Заметим, что это наиболее подвижная, открытая для изменений часть программы. Какие именно вопросы «элементарной математики» она будет содержать не так уже важно, важно другое – нужно чтобы эти вопросы и по содержанию, и по используемым методам были ближе к школьной тематике, чем к высшей, чтобы они позволяли будущим учителям математики на их основе организовать творческую научно-исследовательскую работу учащихся.

Приведем примерное содержание такого интегрированного курса геометрии, в котором вопросы школьной математики выделены курсивом (вариант программы опубликован в [21]-[23]).

*Первый модуль***.** «Краткий исторический обзор возникновения геометрических понятий. *Идея логического построения геометрии. Геометрические фигуры, прямая и окружность как множества точек;*

задачи на построение циркулем и линейкой, основные построения, метод пересечения фигур, алгебраический метод. Задачи, не разрешимые циркулем и линейкой. Золотое сечение. *Построение правильных n-угольников*. Решение конструктивных задач другими инструментами. *Движения и подобия (в порядке пропедевтики геометрических преобразований), равные и подобные фигуры*. *Метрические соотношения. Классические теоремы о треугольниках и окружностях.* Теоремы Птолемея, Чевы, Менелая, задачи Эйлера. *Площади многоугольников*. Теорема Брахмагупты о площади четырёхугольника, вписанного в окружность, *формула Герона.* Равновеликость и равносоставленность. Теорема Бояи-Гервина. *Теорема Пифагора, различные способы доказательства. Площадь круга и его частей»*.

Второй модуль **.** *«Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве, расстояние между точками,* замена системы координат. *Векторы на плоскости и в пространстве, их координаты, скалярное произведение векторов*. Прямая на плоскости и окружность, *уравнения прямой и окружности*. Конические сечения, их уравнения. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Циклоида, эпициклоида и гипоциклоида. Критерий разрешимости конструктивных задач. Специальные кривые, используемые при решении задач, не разрешимых циркулем и линейкой». Векторное и смешанное произведения векторов. Уравнения плоскости и прямой в пространстве, сферы и винтовой линии. Задачи метрического и позиционного характера по теме плоскость и прямая в пространстве».

Третий модуль. *«Аксиомы стереометрии, прямые и плоскости в пространстве, геометрические построения в пространстве. Понятия геометрического тела и его поверхности, анализ школьных определений. Изображение пространственных фигур с помощью параллельного проектирования, построение сечений.* Аксонометрия. *Правильные многогранники*, теорема Эйлера для многогранников. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения, уравнения этих поверхностей, тор. Поверхности второго порядка, эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие поверхности второго порядка. *Понятие объёма. Способы вычисления объёма, принцип Кавальери. Объём прямой призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара.* Вопросы измерения величин. Теоремы существования и единственности измерения площадей и объёмов».

Четвертый модуль. «*Понятие геометрического преобразования, примеры*. Композиция преобразований, группа преобразований. *Движения плоскости и пространства*. Классификация движений плоскости. *Симметрии фигур*. *Подобия плоскости и пространства, гомотетии*. Аффинные преобразования. Родство. *Использование геометрических преобразований при решении задач*».

Пятый модуль. «Центральное проектирование, его инварианты. Проективная плоскость, однородные координаты, теорема Дезарга, *ее применение при решении задач элементарной геометрии*, линии второго порядка, полюс и поляра. Проективные преобразования. Гомология. Линейная перспектива, *изображение фигур в линейной перспективе*. Инверсия. *Решение задач на построение одной линейкой*. Инварианты преобразований, теоретико-групповой подход к классификации геометрий. Эрлангенская программа Ф. Клейна».

Шестой модуль. «Начала» Евклида. Проблема пятого постулата. *Аксиоматический метод построения геометрии*, требования к системе аксиом. Система аксиом Гильберта. Система аксиом Вейля. *Системы аксиом, используемые в школьном курсе геометрии*. Неевклидовы пространства. Геометрия Лобачевского. Модели плоскости Лобачевского. Аффинное n-мерное пространство. Евклидово n-мерное пространство».

Отметим некоторые особенности изучения вопросов школьной геометрии в интегрированном курсе геометрии педагогического вуза.

Включение в основной курс геометрии вопросов элементарной (школьной) геометрии имеет свои особенности.

1. Как и в школьном курсе геометрии, в поле зрения интегрированного курса геометрии постоянно находится его ядро – геометрическая фигура – и связанные с ней факты. Класс фигур пополняется и расширяется от курса к курсу. Кроме прямой линии и линий второго порядка, а также элементарных поверхностей, рассматриваются более сложные кривые и поверхности. Новые методы и идеи появляются как естественная потребность более глубокого исследования геометрических объектов. Это составляет основную интригу курса, поддерживает интерес к предмету, обеспечивает его единство и профессионально-педагогическую направленность.

2. Предпочтение в программе, особенно в его начальной части, отдается вопросам изображения фигур и синтетическим методам их исследования, что должно содействовать формированию геометрического мышления и развитию пространственных представлений студентов. Аналитические методы, хотя и присутствуют в первой, элементарной части, однако отодвигаются на второй план.

3. В первых разделах курса не предполагается строгое аксиоматическое изложение материала. Преподавание геометрии в жестких рамках дедуктивной теории неизбежно делает её в глазах первокурсников сухой и малопривлекательной. Сила и красота дедуктивного метода осознается студентами лишь на заключительном этапе изучения геометрии, после приобретения опыта работы с геометрическим материалом. Его мы демонстрируем на примере изложения некоторых тем оснований геометрии. Такой подход к курсу вполне соответствует одному из ведущих принципов образования – принципу гуманизации.

Выясним теперь, в какой степени разработанная нами программа соответствует принципам и целям ППНО. Анализ программы курса геометрии для педвузов показывает, что она удовлетворяет принципу *фундаментальности*. Действительно, круг охватываемых ею вопросов обеспечивает будущему учителю действенные знания в пределах, далеко выходящих за рамки школьного курса математики, и вполне соответствует профессиональным потребностям учителя математики.

Программа в полной мере обеспечивает реализацию принципа *ведущей идеи*. Её содержание обеспечивает тесную связь основного (базового) курса геометрии со школьным курсом, обеспечивает целеустремленность курса, понимание студентами перспектив его изучения, способствует сознательности усвоения курса.

Программа создает благоприятные условия для реализации принципа *бинарности*, который требует объединения общенаучной и методической линий. Этому способствует большое число содержащихся в программе вопросов элементарной математики.

Для обеспечения принципа *непрерывности* вопросы, связанные со школьным курсом геометрии, рассредоточены по всем разделам учебного курса. Его реализация оказывает положительное воздействие на перестройку системы мотивов, лежащих в основе ориентации личности на профессию учителя математики, а значит, и на профессиональную направленность личности студента.

Содержание предлагаемой программы отвечает и системе целей обучения соответствующей концепции ППНО в том виде, в каком её сформулировал А.Г. Мордкович. Действительно, оно (содержание), при надлежащей организации учебного процесса, позволяет:

а) воспитать научное (у Мордковича – диалектико-материалистическое) мировоззрение, так как вскрывает закономерности научного познания пространственных и пространственно-подобных форм и отношений окружающего мира;

б) сформировать уровень математических знаний, умений и навыков, который, при надлежащем его использовании, гарантирует владение научным фундаментом школьного курса математики, полное и глубокое понимание его фактов, идей, методов и структуры, глобальных целей преподавания и тонкостей изложения отдельных вопросов;

в) сформировать у студентов достаточно высокий уровень математического мышления;

г) обеспечить достаточный опыт математической деятельности, включающей в себя, кроме традиционных компонентов, специфический для педагогического вуза компонент: умение преобразовывать научный материал в учебный, понять некоторый фрагмент научной теории и дидактически препарировать его во фрагмент учебной дисциплины;

д) воспитать устойчивый интерес к математике, развить математические способности, математическую интуицию, оказать воспитывающее влияние на формирование характера и интеллектуальную деятельность;

е) сформировать достаточно высокий уровень математической культуры.

1.5. Анализ состояния информатизации курса геометрии в вузах, готовящих учителей математики

Проведём анализ основных направлений информатизации курса геометрии в высших учебных заведениях, готовящих учителей математики и краткий обзор соответствующей научной литературы.

Анализ социальных предпосылок исследования, проведённый в первых четырёх параграфах, позволяет сделать вывод о том, что информатизация образования в нашем обществе не только имеет место, но и идёт достаточно высокими темпами. Вопросам использования информационных технологий в области образования посвящено много работ ведущих учёных, как в нашей стране, так и за рубежом. В большинстве из них акцент делается на школьное образование. И такая ситуация вполне объяснима, так как ориентация на школу соответствует социальному заказу общества. Ведь только через систему среднего образования государство имеет реальную возможность повысить информационную компетентность большинства своих граждан.

Высшая школа, как мы уже отмечали в параграфе 1.3, также достаточно активно занимается вопросами информатизации образования, причём не только высшего, но и среднего, где лидирующие позиции занимает компьютеризация курсов математического цикла. Однако лишь в немногих исследованиях, посвящённых проблеме использования компьютера в дисциплинах предметной подготовки учителя математики, делаются попытки провести всесторонний её анализ. В большинстве работ описывается и обобщается опыт применения информационных технологий при изучении некоторых разделов или тем математических курсов, приводятся рекомендации по применению компьютера в системе дисциплин по выбору, специализаций, курсовых и дипломных работ. Труды региональных, всероссийских и международных конференций содержат большое количество тезисов, представляющих собой результаты деятельности отдельных исследователей и небольших коллективов в этом направлении. Не вызывает возражений необходимость и важность такой работы, однако она высвечивает лишь отдельные стороны исследуемой проблемы, рассматривает её в одной плоскости. Подход к решению проблемы, когда предметом изучения является только некоторая сторона действительности, иногда называют аспектным.

Одна из характерных черт современной науки – переход от аспектного подхода в изучении проблемы к комплексному. Такое методологическое направление называется системным подходом. Значительный вклад в реализацию системного подхода в педагогических исследованиях внесли М.А Данилов, Т.А. Ильина, Н.В. Кузьмина, В.П. Беспалько и др. Нам неизвестно ни одного системного исследования проблемы геометрической подготовки учителя математики на основе информационных технологий. Вместе с тем в некоторых работах исследователями получены достаточно глубокие результаты, не без помощи которых в следующей главе будет сформулирована концепция компьютерной поддержки курса геометрии педагогического вуза. Остановимся более подробно на этих работах.

География исследований. Отметим, что исследуемая в монографии проблема имеет специфику, связанную с необходимостью интеграции усилий специалистов не только в области методики обучения математике, но и математики, информатики, педагогики и психологии. Поэтому чаще всего наиболее значимые результаты удаётся достичь в тех случаях, когда над проблемой работает целый коллектив исследователей, как правило, представляющий высшее учебное заведение, готовящее учителей математики.

Наиболее полные и интересные результаты в области компьютеризации курса геометрии педвуза в нашей стране получены коллективом исследователей из Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д Ушинского, в состав которого входят преподаватели математики, информатики и методики обучения математике (в дальнейшем – ярославская группа). Одно из приоритетных направлений деятельности группы – это ориентация на использование в учебном процессе информационных технологий. В этой связи выделим следующие два аспекта деятельности коллектива:

– создание учебно-методических пособий по разделам курса геометрии, методических указаний к практикуму по геометрии с программным обеспечением для ЭВМ и лабораторных практикумов по аналитической геометрии с применением компьютера ([2], [3], [50], [147]-[151]);

– применение персонального компьютера в преподавании курса геометрии в педагогическом вузе.

Много внимания вопросам использования информационных технологий в геометрической подготовке будущих учителей математики уделяют в Брянском государственном университете им. академика И.Г. Петровского (до 2001 года – педагогический университет). Научно-методические основы этого направления создавала группа ученых и преподавателей вуза, учителей школ под руководством М.Н. Марюкова (в дальнейшем – брянская группа). Несмотря на то, что основные результаты докторской диссертации [157] руководителя этой группы посвящены проблеме использования компьютерных технологий при изучении геометрии в школе, в этой работе автор уделяет много внимания и вопросам информатизации процесса геометрической подготовки учителя математики.

Проблемой использования компьютера в качестве инструмента построения знаний в геометрии в процессе научной и педагогической деятельности длительное время занимается коллектив исследователей Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. В состав этой группы (в дальнейшем – красноярская группа) входят преподаватели и аспиранты кафедры алгебры, геометрии и методики их преподавания. Направления деятельности группы ориентированы на технологии компьютерного геометрического моделирования, используемые в учебном процессе, и специальные пакеты, в частности математические пакеты, системы символьных вычислений и системы динамической геометрии, используемые в научных и учебных исследованиях ([12]-[23], [104]-[146]).

Большое внимание применению в учебном процессе пакетов общего и специального назначения как приоритетному направлению компьютеризации математических курсов при подготовке учителей математики уделяет коллектив исследователей Смоленского государственного университета (до 2005 года – педагогический университет) (в дальнейшем – смоленская группа). Знакомят студентов с возможностями математических пакетов, как правило, преподаватели кафедр, ведущих предметы информационного цикла, в частности профессор В.П. Дьяконов – автор известной серии книг по компьютерным математическим системам ([68]-[71]) и языку программирования Бейсик [67]. Учат студентов использовать эти пакеты в учебном процессе чаще всего они же, в отдельных случаях, в основном связанных с чтением курсов по выбору или подготовкой курсовых и дипломных работ, – преподаватели математических кафедр.

Большую методическую и организационную работу по использованию компьютера в геометрической подготовке учителя математики проводит группа исследователей Нижневартовского государственного университета (до 2005 года – педагогический институт) (в дальнейшем – нижневартовская группа). Подготовка студентов математического факультета этого вуза к использованию в своей учебной и исследовательской деятельности информационных технологий обучения осуществляется через дисциплины специализации по элементарной математике в рамках методологии молодёжного творчества, разработанной П.И. Совертковом ([63], [198]-[204]).

Интересные результаты по использованию информационных технологий в цикле дисциплин предметной подготовки учителя математики получены в лаборатории «Развитие математического образования» Псковского областного института повышения квалификации работников образования коллективом исследователей под руководством Н.И. Зильберберга (в дальнейшем – псковская группа [75]).

Много внимания проблеме использования системы динамической геометрии GeoGebra при обучении математике школьников и студентов уделяет группа исследователей из Северного (Арктического) федерального университета им. М.В.Ломоносова (далее – архангельская группа [215]).

За рубежом наибольшей популярностью в процессе геометрической подготовки студентов пользуются программные продукты динамической геометрии Cabri Geometre (Франция, 1986 г.), Geometer’s Sketchpad (США, 1989), GeoNext (Германия, 1999), GeoGebra (Австрия, 2002) и др. ([234], [235], [242]). Коллективы разработчиков, исследователей и практикующих преподавателей университетов и учителей школ, работающие над этими программными продуктами (в дальнейшем – зарубежные группы) и использующие их в учебном процессе, постоянно совершенствуют как сами пакеты, так и методики их использования.

Основные результаты исследований. Основные результаты научной деятельности коллективов по использованию компьютера в курсе геометрии педвуза имеют наряду с особенностями и много общего. Отметим, прежде всего, *ориентацию большинства исследований на использование компьютера в качестве инструмента познания в основном курсе геометрии педвуза* (термин «инструмент познания» в работах большинства групп, за исключением некоторых публикаций представителей красноярской группы и их коллег за рубежом, практически не используется).

Такую направленность в исследованиях имеет, в первую очередь, ярославская группа. Этим коллективом разработана *система геометрической подготовки студентов* (основные положения системы изложены в статье [147]). В эту систему входят сборники задач [50], [2], [3], [147], [148], методические рекомендации и указания [149-150], а также практикум по решению геометрических задач с применением персонального компьютера [88], [89].

Использование сборников непосредственно в учебном процессе показало, что многие интересные и важные геометрические задачи большинством студентов не решаются из-за очень трудоёмких, хотя и элементарных, вычислений. В связи с этим появилась потребность в применении на практических занятиях компьютерной техники, особенно при решении геометрических задач с большим объёмом вычислений. Начавшийся примерно в это время процесс комплектования педагогических вузов персональными компьютерами создал материальную основу для реализации этой потребности.

Первоначально была поставлена лишь задача облегчения процесса вычислений с помощью компьютера. Для её реализации коллективом были разработаны пакеты программ для решения основных задач аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, изданные в качестве методических рекомендаций к практикуму по геометрии. Одновременно с этим создавались или приобретались иллюстративно-демонстрационные программы геометрического характера. В большинстве случаев на занятиях по геометрии компьютер использовался либо как средство наглядности (подготовленные заранее чертежи плоских фигур, графики линий и т.д.), либо для написания программы вычислительного характера для каждой отдельно взятой задачи. Со временем группа пришла к выводу, что компьютер может быть применён не только для облегчения вычислений или демонстрации иллюстративного материала, но и для создания новой информационной технологии обучения геометрии.

Использование компьютера на занятиях по геометрии позволил группе по-новому подойти к решению геометрических задач. Было проанализировано содержание курса аналитической геометрии с точки зрения информатики и разработаны содержание и методика проведения лабораторного практикума по геометрии с использованием компьютера. Подготовлен цикл из десяти лабораторных работ по аналитической геометрии на плоскости. Для его выполнения от студентов требуется знание языка программирования Pascal, который в большинстве педвузов изучается в течение первого семестра.

Основная идея, лежащая в основе создания практикума, состоит в следующем: для каждой конкретной темы определяется оптимальный набор элементарных процедур, которые являются составной частью решения задач данной темы. Алгоритм решения строится через обращение к тем процедурам, которые отобраны в процессе анализа условия и методов решения задачи. Иными словами, алгоритм конструируется из готовых блоков, вызов которых происходит с разными данными.

Для практикума построена многоуровневая по сложности система задач. Каждый последующий уровень строится как обобщение задач предыдущего. Лабораторная работа содержит от 10 до 30 задач различных уровней, наиболее сложные из них вынесены на зачётное занятие. Наличие большого количества задач в каждом уровне позволяет осуществить дифференцированный подход к обучению студентов. Для каждой темы подготовлены индивидуальные карточки заданий, содержащие по одной задаче каждого из пяти уровней. Особо следует отметить открытость данной системы: студенты имеют возможность заранее подготовиться как к самой лабораторной работе, так и к контролирующей его части.

Таким образом, разработанная ярославской группой технология изучения геометрии предполагает применение компьютера (более точно – вычислительных возможностей языка программирования) как инструмента познания. Кроме того, она позволяет постоянно контролировать как усвоение текущего материала, так и степень закрепления пройденного ранее. С этой целью авторами разработана система контрольных заданий по каждой теме аналитической геометрии на плоскости, включающая в себя не только проверку знаний по теме, но и овладение навыками решения простейших задач. Большая вариантность контролирующего материала допускает использование этой системы в индивидуальной работе студентов.

По мнению авторов методики, высказанному ими в [151], «предлагаемая компьютерно-ориентированная методика изучения курса геометрии в педвузе позволяет эффективно управлять познавательной деятельностью будущего учителя, развивать его творческие способности, возможности нетрадиционных подходов к решению геометрических задач».

Подход, который предложен руководителем брянской группы М.Н. Марюковым, ориентирован также на использование компьютера в качестве инструмента познания. Суть его заключается в следующем: оставаясь в рамках традиционной программы по геометрии, организуется изложение теоретического материала, проведение лабораторных и практических занятий с учётом возможностей его реализации на персональном компьютере. Компьютерный подход реализован в учебном процессе университета. Сформулируем его основные положения.

В основе предложенного М.Н. Марюковым подхода [151]-[157], [236] лежат три важные функции компьютера, используемые в геометрических исследованиях:

- компьютер как мощное средство решения вычислительных геометрических задач;
- компьютер как средство хранения и обработки геометрической информации;
- компьютер как средство моделирования геометрических образов и изучения их свойств.

Главным принципом компьютерного подхода к изучению традиционного курса геометрии является следующий: компьютерный подход успешно реализуется в тех разделах курса геометрии, где аналитический метод является главным. В первую очередь – «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве». Автор относит последний к самым важным разделам основного курса и считает, что при его изучении можно эффективно использовать новые информационные технологии. Связано это прежде всего со спецификой аналитической геометрии, в основе которой лежит метод координат, позволяющий разрабатывать эффективные алгоритмы решения геометрических задач. Построенные алгоритмы после их описания на одном из языков программирования высокого уровня вполне естественно и органично реализуются с помощью персонального компьютера.

Потребность такой формы применения в разделе «Аналитическая геометрия» информационных технологий вытекает как из логики самого предмета, так и из особенностей преподавания этого раздела в педвузе. Как известно, традиционное изложение теоретического материала в этом разделе ориентировано на изучение различных форм аналитического представления прямых, плоскостей, линий второго порядка и т. д., а также на изучение взаимного расположения двух прямых, прямой и плоскости, определение вида линии и поверхности второго порядка по их уравнениям. На практических занятиях, как правило, всё учебное время уходит на составление уравнений прямых и плоскостей, линий и поверхностей второго порядка. Таким образом, на приложения аналитической геометрии к решению содержательных геометрических задач остаётся очень мало времени. Устранению этого недостатка и одновременно выделению большего внимания поиску и построению алгоритмов решения различных геометрических задач и может способствовать, по мнению М.Н. Марюкова, предлагаемый им компьютерный подход к построению курса аналитической геометрии. С его точки зрения, такой подход соответствует как сути аналитической геометрии, так и современным тенденциям в развитии геометрии и геометрического образования. Компьютерный подход к построению курса аналитической геометрии предлагается рассмотреть через систему задач по следующим его темам:

1. Элементы векторной алгебры.
2. Метод координат на плоскости и в пространстве.
3. Прямая линия на плоскости.
4. Плоскости и прямые в пространстве.
5. Линии второго порядка.
6. Поверхности второго порядка.
7. Преобразования плоскости.

Для реализации компьютерного подхода к курсу аналитической геометрии автор считает целесообразным строить изложение теоретического материала в рамках лекционного курса таким образом, чтобы явно были выделены алгоритмы решения наиболее важных задач. Он считает необходимым предварительно записывать эти алгоритмы на одном из алгоритмических языков, например псевдоалголе. Псевдоалгол достаточно строг в своих управляющих структурах, но весьма волен в формате других своих операторов, где употребление общепринятых математических выражений свободно чередуется с использованием выражений естественного языка.

К наиболее важным массовым алгоритмам автор относит алгоритмы решения следующих задач: определение координат вектора в базисе; вычисление коэффициентов общего уравнения прямой и плоскости; исследование взаимного расположения прямых и плоскостей; определение вида линии и поверхности второго порядка по их общему уравнению. Таким образом, разработанный брянской группой компьютерный подход к изучению геометрии предполагает применение вычислительных возможностей языка программирования в качестве инструмента познания.

Некоторые аспекты компьютерно-ориентированной методики геометрической подготовки учителя математики разрабатываются и внедряются в учебный процесс красноярской группой. Один из основных стратегических принципов этой методики базируется на особой роли технологий компьютерной графики и геометрического моделирования в обучении геометрии. Связано это с широким внедрением развитых методов визуализации образов и абстракций в современную математику и естествознание. В программных пакетах математического моделирования, системах автоматизированного проектирования и электронных учебниках обязательной частью стала визуализация моделей объектов, геометрических абстракций и состояний (научная, анимационная, мультипликационная компьютерная графика). Использование средств компьютерной графики как инструмента познания для конструирования студентом собственной модели знаний о мире, геометрических пространствах и методах их изучения, для вооружения его современными технологиями преподавания геометрии в школе представляется сегодня наиболее актуальной задачей геометрической подготовки учителя математики.

Например, суть предложенной О.П. Одинцовой в [169] методики использования технологий компьютерной графики в курсе геометрии заключается в её многоуровневости. Использование технологий компьютерной графики в курсе геометрии базируется на следующих методических уровнях:

1. Программирование на языках высокого уровня.

2. Моделирование в инструментальных графических средах.

3. Программирование в среде (использование внутренних ресурсов) какой-либо графической системы.

Автором рассмотрены некоторые вопросы использования графических средств языков программирования (первый методический уровень) на примере изучения отдельных тем (сфера, линии в полярных координатах) курса геометрии педвуза. В рамках проектного метода представлено несколько разработок учебных проектов, демонстрирующих использование программирования как инструмента познания.

Методика работы в инструментальной среде (второй и третий методический уровни) подробно описана на примере работы с системой автоматизированного проектирования AutoCAD. Даны методические рекомендации по использованию этой системы при изучении симметрии, сплайнов, моделировании поверхностей и конструировании многогранников в курсе геометрии.

Согласно методике, разрабатываемой смоленской группой, студентов математического факультета, начиная с первого курса, обучают использовать в учебном процессе, и в частности в геометрии, современные системы символьных вычислений, математические пакеты, то есть использовать компьютер как инструмент построения знаний. На первом этапе студентами приобретаются навыки работы с простыми системами типа Derive for Windows, не требующими специальных навыков программирования. Эти системы помогают учащимся не только проводить несложные символьные преобразования, но и визуализировать геометрические объекты.

На следующем этапе студенты осваивают уже более сложные математические пакеты, например, универсальную математическую систему MathCAD или систему символьных вычислений Maple. Эти системы обладают великолепными графическими возможностями, однако для их использования необходимо иметь специальные навыки программирования на внутренних языках систем, уметь работать с подключаемыми внешними библиотеками и т.д.

По инициативе руководителя нижневартовской группы П.И. Соверткова на математическом факультете сформировано новое направление творческой деятельности студентов, в основе которого лежит разработка информационной среды обучения на базе геометрического моделирования. Коллектив учащихся школ, студентов факультета математики и информатики занимается созданием математических моделей и разработкой программ для построения на дисплее различных планиметрических фигур. Результаты некоторых исследований опубликованы в центральной и местной печати [197] – [204]. В основу работы коллектива положены принципы развивающего обучения и методологии молодёжного творчества.

Методика П.И. Соверткова имеет ярко выраженную направленность, связанную с использованием графических средств языков программирования высокого уровня в качестве инструментов познания. Согласно этой методике студенты, выполняющие задания исследовательского характера, нередко вынуждены выводить необходимые формулы для создания компьютерных моделей, требуемых геометрических абстракций. Таким образом, предлагаемая методика ориентирована на улучшение не только геометрической, но и информационной подготовки студентов.

Методика псковской группы также ориентирована на использование компьютера как инструмента познания. В качестве такого инструмента взяты пакеты общего и специального назначения. Весь период обучения студентов – будущих учителей математики условно разбит на три этапа.

При изучении математических дисциплин на первых двух курсах (первый этап) студентам рекомендуется использовать специальные экспертные системы. Им даются задания по работе с различными базами данных, предлагается принять участие в подготовке всевозможных тестов по математике.

На втором этапе (третий и четвёртый курсы) информационные технологии применяются при подготовке студентов по элементарной математике. Использование компьютера на этом этапе направлено на: реализацию различных педагогических технологий; методическую разработку общих методов решения задач; проведение научных исследований учебного характера и прочее.

На завершающем этапе (пятый курс) студентам предлагается выполнить специальные задания, ориентированные на использование информационных технологий.

Для обеспечения применения информационных технологий на всех этапах профессиональной подготовки будущего учителя математики создан пакет программных средств, предназначенный для работы со студентами. Этот пакет может быть использован не только на занятиях со студентами, но и на уроках со школьниками.

Программные продукты динамической геометрии, которые разрабатываются зарубежными группами, можно использовать одновременно и как инструменты познания, и как обучающие средства. Французская группа исследователей под руководством Жанна-Мари Лаборде и Франка Беллемейна развивает Cabri Geometry II [235] в институте информатики и прикладной математики Гренобля в лаборатории Джозефа Фурье при сотрудничестве с Национальным научно-исследовательским центром. Коллектив исследователей из США разрабатывает программный продукт динамической геометрии Geometer`s Sketchpad [234], [242]. Ее русскоязычная версия известна в России как «Живая геометрия».

В университете им. Иоганна Кеплера (г. Линц, Австрия) в 2002 году Маркусом Хохенвартером была создана система динамической геометрии GeoGebra, приверженцами этой системы учреждена и активно функционирует во многих странах мира общественная некоммерческая организация «Международный GeoGebra-институт», которая занимается совершенствованием, распространением и пропагандой этого программного продукта в школах и университетах.

Системы динамической геометрии (СДГ) построены на идеологии «открытия» геометрии и создают предпосылки для использования при обучении математике компьютерного эксперимента. Главной особенностью компьютерных чертежей, получаемых с помощью этих пакетов, является их динамичность. Чертёж как компьютерный файл существует вместе со всеми своими возможными деформациями. Элементы чертежей можно двигать, изучая свойства объекта, при этом сохраняется конфигурация, заданная построением.

Системы динамической геометрии позволяют конструировать и исследовать геометрические объекты в режиме диалога, при этом достигаются следующие возможности:

– исследование задач аналитической геометрии и геометрических преобразований в режиме диалога;

– построение на экране компьютера линий второго порядка;

– исследование на компьютере уравнений геометрических объектов;

– построение и исследование геометрических мест точек;

– исследование постулатов евклидовой геометрии и следствий из них;

– исследование основных понятий проективной и гиперболической геометрий; компьютерной мультипликации.

В России, как и во многих других странах мира, нашлось немало сторонников внедрения систем динамической геометрии в школьное математическое образование. Так, например, в 2005 году СДГ Geometer`s Sketchpad была закуплена Россией, и к ее русскоязычной версии «Живая геометрия» получили доступ все школы страны. Практически все перечисленные выше российские исследовательские группы в той или иной степени изучают возможности применения систем динамической геометрии при обучении математике, причем не только школьников, но и будущих учителей математики. Интересные результаты в этом направлении получены красноярской и архангельской группами ([144], [215]).

Отметим теперь те *исследования, которые ориентированы на использование компьютера в качестве инструмента познания в системе специальной геометрической подготовки студентов.*

Руководствуясь современным состоянием научных исследований в области геометрии и новыми тенденциями в геометрическом образовании, руководитель брянской группы М.Н. Марюков считает необходимым включить в систему специальной геометрической подготовки студентов педвуза курсы по выбору, связанные с вычислительной геометрией. Им разработан спецкурс «Элементы компьютерной геометрии», который рассчитан на студентов физико-математических специальностей педагогических вузов. Читать его можно, начиная с третьего семестра, так как для овладения материалом спецкурса студентам достаточно знать лишь аналитическую геометрию, элементы теории алгоритмов и язык программирования. Курс рассчитан на 52 часа. *Вводная часть* (22 часа): понятие о вычислительной геометрии, элементы теории графов, метрики в евклидовом пространстве, двоичные деревья, списки, стеки, очереди и алгоритмы быстрой сортировки. *Основная часть* (30 часов): задачи локализации точек на плоскости, выпуклая оболочка конечного множества точек, понятие близости, диаграммы Вороного, моделирование вероятностных процессов, математические методы в системах реального времени, теории катастроф и биологии, методы вычислительной геометрии в экономике.

Представителями красноярской группы разработаны два спецкурса (один из них – с соавторами), ориентированных на применение компьютерных технологий. Приведём краткое содержание этих курсов.

Курс «Система автоматизированного проектирования AutoCAD» [169]. В рамках этого спецкурса предлагается рассмотреть следующие вопросы: трёхмерная графика в среде AutoCAD; программирование на встроенном языке AutoLISP; создание библиотек слайдов и киносценариев; решение занимательных проекционных задач.

Курс по выбору «Компьютерная графика и геометрическое моделирование» ([107]). В рамках этого спецкурса, рассчитанного на 72 часа, предполагается рассмотреть следующие темы: аппаратные и программные поддержки компьютерной графики (6 часов); математический аппарат компьютерной графики (12 часов); элементы художественной (12 часов), иллюстративной (20 часов) и демонстрационной (22 часа) графики.

Методика Н.И. Зильберберга также даёт возможность большинству студентов принять участие в работе спецсеминара и спецкурса «Проблемы использования информационных технологий при обучении математике».

Комментарии к исследованиям. Приведём теперь краткие комментарии к перечисленным выше исследованиям.

1. Прежде всего, отметим, что большинство исследователей в предлагаемых ими системах, технологиях и методиках рекомендует использовать некоторые программные средства по сути дела как инструмент познания в основном курсе геометрии педвуза. В качестве

таких средств предлагается использовать различные программные продукты.

Так, ярославская и брянская группы предлагают использовать компьютер как мощное средство решения вычислительных геометрических задач. В качестве инструмента познания по методике представителей этих групп выступает один из языков программирования высокого уровня. Рабочим «полем деятельности» этого инструмента является в основном *символьный* экран компьютера. Кроме того, студенты по этой методике работают преимущественно не с готовыми программными средствами учебного характера, а самостоятельно разрабатывают алгоритмы, составляют программы, обращаясь при необходимости к тем или иным готовым (составленным ими же ранее) подпрограммам, отлаживают и реализуют их на персональном компьютере. Таким образом, предлагаемая методика рассчитана на высокую активность и самостоятельность студентов.

Нижневартовская группа ориентирована на применение компьютера как инструмента познания, позволяющего визуализировать геометрические образы, в основном планиметрические. В качестве такого инструмента используются графические средства языков программирования высокого уровня. Рабочим «полем деятельности» этого инструмента является *графический* экран компьютера.

Смоленская, псковская, архангельская и зарубежные группы используют в своих компьютерно-ориентированных методиках в качестве инструментов познания пакеты общего и специального назначения, причём геометрические курсы поддерживаются системами, имеющими хорошие графические возможности. Отметим, что если сравнивать геометрические задачи, решаемые с помощью этих пакетов, то доля тех из них, где применяются математические и другие специальные пакеты, существенно больше тех, где используются пакеты общего назначения. Кстати, применение в задачах специальных пакетов предполагает умение программировать, хотя и не в таком объёме как при использовании языков высокого уровня. Заслуживает внимания опыт подготовки студентов из Смоленска и Пскова к использованию информационных технологий в будущей профессиональной деятельности в течение всего срока их обучения. Особо следует отметить исследования представителей зарубежных групп. Пакеты, разрабатываемые ими, могут использоваться в двух режимах, обучающем и как инструмент познания, однако чаще всего в процессе педагогической деятельности они применяются как обучающие средства.

Направление исследований красноярской группы связано с использованием в учебном процессе всех перечисленных выше программных продуктов (языки программирования высокого уровня, пакеты общего и специального назначения, базы данных, тестовые оболочки и т. д.), в первую очередь тех из них, которые связаны с визуализацией геометрических объектов, процессов и абстракций, например: графические средства языков программирования высокого уровня (Pascal, Qbasic, LogoWriter), графические средства пакетов символьных преобразований и математических пакетов (Derive, MathCAD, Maple, Cabri Geometry), системы автоматизированного проектирования (AutoCAD, TurboCAD), графические средства внутренних языков программирования упомянутых выше пакетов и систем (AutoLISP, Maple-язык), системы динамической геометрии (Geometer`s Sketchpad, GeoGebra и др.). Кроме того, методика красноярской группы предполагает самостоятельную разработку студентами алгоритмов реализации различных учебных проектов и составление соответствующих программ на языке высокого уровня. Основным рабочим «полем деятельности» инструментов познания, используемых красноярской группой в курсе геометрии педвуза, является *графический* экран компьютера.

2. Отметим теперь те стороны предлагаемых компьютерно-ориентированных методик, которые, на наш взгляд, выглядят

недостаточно обоснованными. Не совсем понятны, например, причины, по которым:

– некоторые группы (ярославская и брянская) рекомендуют использовать компьютерно-ориентированную методику только при изучении аналитической геометрии, представляющей собой лишь один из разделов курса геометрии педвуза, либо только в рамках курсов по выбору или специализаций (нижневартовская группа). Такой подход может способствовать тому, что у студентов сложится мнение об аналитической геометрии как о единственном разделе основного курса, где можно использовать компьютер;

– авторы некоторых методик совсем не используют графические средства языков программирования, в частности, не предполагают выполнение студентами на лабораторных занятиях заданий, связанных с визуализацией геометрических объектов и абстракций (ярославская и брянская группы), что, в свою очередь, затрудняет реализацию общедидактического принципа наглядности;

– среди компьютерных средств обучения по методике некоторых групп отсутствуют пакеты как общего, так и специального назначения (нижневартовская, брянская и ярославская группы). Знакомят студентов с ними, по-видимому, преподаватели кафедры информатики. Однако совершенно очевидно, что научить студентов применять в основном курсе геометрии математические пакеты лучше всего может специалист по геометрии, который эту дисциплину преподаёт. И оптимально делать это не в курсе информатики, а на занятиях по геометрии;

– по рекомендациям некоторых авторов, следует ограничиваться применением компьютерных технологий только на лабораторных занятиях в дисплейных классах, не внося никаких корректив в содержание основного курса (псковская и ярославская группы). Нам кажется, что на лекционных и практических занятиях также необходимо обсуждать вопросы, связанные с использованием в курсе геометрии компьютерных технологий;

– тематика большинства предлагаемых для лабораторных работ заданий ориентирована лишь на те разделы вузовского курса геометрии, которые слабо представлены в школьном курсе. Это усложняет будущим учителям математики использование предлагаемой технологии обучения геометрии в школе;

– в работах всех групп недостаточно разработаны общая концепция и конкретные принципы применения компьютера в курсе геометрии вуза (перед авторами стояли другие задачи), не проработаны все компоненты предлагаемой технологии обучения геометрии, не всегда методики доведены до уровня технологий;

– компьютерная методика изучения геометрии в педвузе руководителя брянской группы слабо ориентирована на школу: в вузе студенты не учатся графическому программированию, хотя в школе, согласно методике этого же автора, предлагается к использованию обучающая система, предполагающая умение учителя программировать графические образы на внутреннем языке этой системы. Несмотря на то, что в вузовском курсе геометрии компьютер используется как инструмент познания, методика того же автора в школьной геометрии ориентирована лишь на авторскую обучающую систему. Компьютерный подход к преподаванию педвузовской геометрии практически не ориентирован на то, чтобы подготовить студентов к использованию компьютерно-ориентированной методики этого же автора в школьном курсе геометрии;

– содержание спецкурса «Элементы компьютерной геометрии», предложенного М.Н. Марюковым, не вполне соответствует своему названию (более подходящее название – «Элементы вычислительной геометрии»), поскольку во всех его разделах рассматриваются лишь вычислительные методы и совершенно не представлены темы курса компьютерной графики и геометрического моделирования, связанные с визуализацией объектов и абстракций;

– некоторые авторы совершают механический (не адаптированный к курсу геометрии педвуза) перенос отдельных математических методов компьютерной графики в геометрию. В частности, вызывает возражение использование, например в работе [205], матричного представления аффинных преобразований (матричный способ) при компьютерно-ориентированной методике изучения темы «Геометрические преобразования». Если сравнивать два способа вычисления координат образа точки – формульный (способ, когда подпрограмма, вычисляющая координаты образа точки, представляет собой записанные в явном виде на языке программирования формулы преобразований) и матричный, то при использовании их в курсе компьютерной графики либо в курсах по выбору предпочтение необходимо отдать последнему. Однако если речь идёт о составлении студентами программы на лабораторном занятии по геометрии, то более эффективен, как по связи с основным курсом, так и с точки зрения экономии учебного времени, формульный способ;

– руководитель нижневартовской группы практически не использует свою методику в основных курсах. Для придания методике более завершённого вида её желательно адаптировать на решение более широкого круга задач, в частности по стереометрии и геометрическим преобразованиям, попытаться её использовать и в основных математических курсах;

– предлагаемая зарубежными исследователями методика не предполагает применение языков программирования, не достаточно поддерживает геометрию, размерность которой превышает два.

В нашей работе неоднократно использовалось и будет использоваться в дальнейшем понятие *информационные (или компьютерные) технологии*. Это понятие фигурирует в названии *методической системы*, которая будет нами построена в третьей главе. Определимся с этими понятиями.

Следуя А.М. Пышкало, под *методической системой* будем понимать педагогическую структуру, компонентами которой являются цели, содержание, методы, формы и средства обучения.

Не вдаваясь в дискуссию о содержании понятий «технология», «компьютерная технология» и «компьютерная технология обучения», объясним, что мы имеем в виду, когда пишем: «методическая система строится *на основе информационных технологий*». Это значит, что среди средств методической системы одно из центральных мест занимают компьютерные средства (КС), или, как их иногда называют в практической информатике, средства новых информационных технологий. К ним относятся персональные компьютеры, системы искусственного интеллекта, языки программирования, операционные системы, пакеты общего и специального назначения и другие. Достаточно подробный перечень средств новых информационных технологий приводится в монографии [183].

ВЫВОДЫ

Поскольку в геометрии как научной дисциплине происходят изменения, связанные с внедрением информационных и суперкомпьютерных технологий, то и в учебном курсе геометрии, хотим мы этого или нет, происходят и будут происходить аналогичные процессы. Это подтверждают опыт работы учителей математики и информатики отдельных школ, преподавателей кафедр геометрии в некоторых вузах, готовящих учителей математики, и исследования в передовых странах запада, которые мы рассмотрели выше. Использование информационных технологий в процессе геометрической подготовки учащихся школ и будущих учителей математики в педвузах идеологически, морально и психологически ориентирует их на применение компьютерной техники в своей деятельности, причём не только учебной, связанной с изучением геометрии, но и будущей профессиональной. Качественно же подготовить учащихся к этой деятельности – скорее задача учителей информатики и кафедр информационного цикла. Преподаватели геометрии, в зависимости от уровня их компетентности в этом вопросе, могут лишь принять в этом участие.

В условиях перехода российского образования на двухуровневую систему подготовки учителя математики в большинстве учебных заведений нашей страны процесс информатизации курса геометрии проходит пока не достаточно эффективно, предлагаемые компьютерные средства обучения и новые информационные технологии не всегда органично вписываются в традиционные методические системы. Методическая система [142], разработанная и реализованная нами в условиях подготовки специалистов, требует соответствующей адаптации к направлению подготовки 050100 Педагогическое образование (квалификация (степень) «бакалавр»).

Отметим три основные причины, препятствующие эффективному использованию информационных технологий в преподавании курса геометрии:

1. Недостаточная обеспеченность персональными компьютерами дисциплин математического цикла в школах и высших учебных заведениях. Преподаватели геометрии имеют ограниченную возможность проведения лабораторных и лабораторно-практических занятий по своему предмету в компьютерных кабинетах.

2. Отсутствие достаточного числа учителей математики в школах и преподавателей геометрии в вузах, владеющих компьютером и информационными технологиями на должном уровне.

3. Отсутствие методической системы геометрической подготовки учащихся школ и студентов-бакалавров, будущих учителей математики, на основе информационных технологий, а также недостаточно продуманное применение компьютера в школьном и вузовском курсах геометрии.

Первая из них является экономической проблемой и должна решаться на государственном уровне, две другие входят в сферу наших интересов. Для устранения последних двух причин необходимы усилия специалистов в области математики, информатики, методики обучения математике, педагогике и психологии. Чтобы сделать упомянутые выше процессы менее болезненными и максимально эффективными необходимо разработать концепцию геометрической подготовки бакалавров – будущих учителей математики средствами информационных технологий и на базе этой концепции создать соответствующую методическую систему. Для этой цели мы адаптируем к условиям бакалавриата, разработанную в [142] методическую систему.

ГЛАВА II. Основные положения концепции компьютерной поддержки курса геометрии

Основываясь на выводах, сделанных в первой главе, разработаем концепцию компьютерной поддержки курса геометрии в вузе, готовящем учителя математики, направление подготовки 050100.62 Педагогическое образование, (уровень (степень) «бакалавр»), профиль «Математика». Перечислим дидактические принципы, лежащие в основе этой концепции. Рассмотрим условия, в которых может быть реализована данная концепция.

2.1. Необходимость создания концепции

Как уже отмечалось в первой главе, информационные технологии в последние годы всё активнее внедряются в систему образования. Далеко не все, что сделано в этой области, заслуживает внимания. Однако в целом положительные элементы преобладают. Наша задача не противодействовать этому объективному процессу, а придать ему научно обоснованные формы и обучать в соответствии с этой новой реальностью.

В силу ряда обстоятельств, которые были рассмотрены в предыдущей главе, особое значение информационные технологии приобретают в процессе геометрической подготовки учителя математики.

Существуют три основных мотива использования информационных технологий в курсе геометрии педагогического вуза:

– первый связан с тем, что компьютерные и суперкомпьютерные технологии в последнее время все шире используются в геометрической науке;

– второй – с тем, что применение информационных технологий в курсе геометрии при подготовке учителей математики может существенно повысить качество усвоения учебного материала;

– третий – с тем, что использование информационных технологий в курсе геометрии при подготовке учителей математики будет содействовать использованию компьютера и в школьном курсе геометрии.

Остановимся на некоторых проблемах и трудностях в геометрической подготовке учителя математики, которые можно устранить за счет использования информационных технологий.

1. Студенты плохо представляют себе роль компьютерных средств в современных научных исследованиях в области геометрии. В силу сложившихся традиций преподавания вузовского курса геометрии у большинства студентов складывается неверное представление об учёном-геометре как человеке, ловко оперирующем циркулем и линейкой и умеющем в нужный момент использовать необходимые формулы. Систематическое применение в основном курсе геометрии информационных технологий, основанных на использовании различных пакетов и языков программирования высокого уровня, может исправить это положение. Если студенты будут не только понимать, что в настоящее время в геометрии как науке широко используются методы и средства информатики, но и иметь некоторое представление о том, каким образом они применяются, то это усилит мотивацию изучения геометрии как учебного предмета и, следовательно, повысит уровень геометрической подготовки студентов.

2. Традиционная методическая система геометрической подготовки учителя математики недостаточно ориентирована на развитие у студентов пространственного воображения. Теоретический материал по геометрии изобилует большим числом различных аналитических выражений, формул и формально-логических выкладок. Некоторые студенты с трудом оперируют пространственными образами, затрудняясь объяснить те или

иные их особенности. При сдаче курсовых и государственных экзаменов часть обучаемых затрудняется ответить на простые вопросы, связанные с изображением плоских и пространственных фигур. Особенно много трудностей у них возникает при необходимости установить связь между аналитическим выражением и его геометрическим образом. Это видно на практических занятиях по математическому анализу, когда преподаватель просит студентов схематично изобразить ту или иную геометрическую область, по которой берётся тройной интеграл. То, что возникает на доске в учебной аудитории, зачастую не имеет никакого отношения к реальному геометрическому объекту.

В последние годы положение осложнилось наметившейся тенденцией на сокращение количества аудиторных часов, выделяемых на изучение в педагогическом вузе геометрического материала, и сведение курса геометрии к сугубо аналитическим процедурам. Конечно, с логической точки зрения устранение из геометрии наглядности не может изменить её аксиоматическую сущность, однако в плане общекультурного и психолого-педагогического развития будущих учителей потери от такого действия могут оказаться невосполнимыми. Компьютер в этом отношении предоставляет педагогу, да и самому учащемуся, большие возможности противостоять этому процессу. Процедура создания на экране компьютера того или иного графического образа в информатике называется процессом визуализации. Возможности компьютера, связанные с процессом визуализации объектов и абстракций, подчёркивают огромную роль информационных технологий в таких важных компонентах культурного и психологического развития человека, как пространственные представления и пространственное воображение.

3. Отличительной чертой курса геометрии является естественная потребность наглядно иллюстрировать изучаемые теоретический и практический материалы. Использование готовых чертежей на плакатах, в учебниках, учебных и учебно-методических пособиях неудобно тем, что

по ним не всегда ясно, каким образом и в какой последовательности в процессе рассуждений появлялись те или иные элементы изображаемой фигуры, выполнялись те или иные дополнительные построения. Сказанное относится и к чертежам в конспектах лекций, которыми чаще всего пользуются студенты в процессе самостоятельной работы.

Возможность наблюдать в динамике процесс создания чертежа студент имеет на учебных занятиях, когда преподаватель, объясняя геометрическую теорию или решение задачи, одновременно строит изображение фигуры, постепенно добавляя необходимые элементы. Однако возможность такого сопровождения теории зависит от ряда факторов, например таких, как чертёжное искусство лектора (субъективный фактор) и количество часов учебного времени, выделяемого на дисциплину (объективный фактор). Каким бы виртуозом в области черчения не был преподаватель геометрии, ему сложно на одном занятии изобразить на доске все необходимые проекции изучаемой фигуры, проиллюстрировать возможные частные случаи рассматриваемой задачи и влияние параметров на вид геометрической фигуры.

Уменьшить зависимость иллюстративного сопровождения от перечисленных выше факторов позволяют специальные компьютерные программы, визуализирующие процесс создания чертежа. Такими программами можно с успехом поддерживать теоретический материал большинства разделов основного курса, а также использовать их при решении задач, особенно связанных с геометрическими построениями на плоскости и в пространстве. Большой обучающий эффект имеют и программы, демонстрирующие создание новых объектов из ранее известных фигур с помощью различных геометрических преобразований.

Разумеется, такими программами не следует злоупотреблять. У статических чертежей, сопровождающих учебный и научный тексты, есть и свои достоинства. Работая с ними, студенты вынуждены внимательно читать теоретический материал, вычленять этапы рассуждений, находить соответствующие каждому этапу элементы чертежа. Таким образом, преподаватель должен отчётливо понимать, когда и в каких дозах следует использовать динамические демонстрационные программы.

4. Как показывает опыт, многие студенты слишком формально представляют себе связь между аналитическими конструкциями и их наглядно-образным выражением. В сознании некоторых из них формула и соответствующий ей образ разделены и существуют независимо друг от друга. Им трудно понять механизм влияния параметров на соответствующий геометрический объект. Этот недостаток удается хотя бы частично преодолеть за счет задач, в которых полученное решение доводится до изображения на экране дисплея и выясняется влияние на соответствующий образ значений параметров задачи. Так, например, при выполнении целого ряда учебных информационно-ориентированных проектов по геометрии студенты вынуждены устанавливать связь между аналитическим заданием объекта и самим объектом, между схематическим изображением фигуры или геометрической абстракцией, и их компьютерной реализацией, между тем или иным геометрическим преобразованием, его аналитическим заданием и соответствующей виртуальной моделью.

5. В ряде случаев трудности, возникающие при усвоении теории или решении задач, связаны с недостаточно развитым представлением об объеме того или иного понятия. Характерно в этом отношении мнение многих выпускников школ, что прямая линия, не содержащая стороны четырехугольника, может его пересекать не более чем в двух точках. Отсутствие в их представлениях образа невыпуклого четырехугольника легко устранить вручную. Труднее это сделать при изучении пространственных фигур или линий. Помочь в этом опять-таки может компьютер, на экране которого легко деформировать образы, вплоть до предельных ситуаций. Сделать это вручную значительно труднее.

6. При организации самостоятельной работы студентов, прежде всего при решении задач, большое значение имеет правильная мотивация этой деятельности. Обычно, в курсе геометрии эта мотивация сводится к требованиям: построить фигуру, написать уравнение, найти координаты, описать множество точек, определить тип фигуры и т. д. Всё это в основном внутриматематические требования. Новые информационные технологии позволяют несколько изменить эту мотивацию, придать ей своеобразную эстетическую направленность, что, как показывает опыт, позволяет активизировать самостоятельную работу студентов. Для этого можно использовать задачи, в которых требуется изобразить на дисплее тот или иной геометрический объект или математическую абстракцию. Для их выполнения студентам потребуется выводить уравнения, искать координаты, описывать множество точек, определять форму и т.д. Подобного рода требования рассматриваются и изучаются в «компьютерной (вычислительной) геометрии», которая уже упоминалась нами в первой главе. Такое изменение конечной цели задания, ясность перспективы, как известно, повышает интерес к заданию.

Вместе с тем, как мы уже отмечали выше, использование подобных заданий будет способствовать осознанию связей, существующих между аналитическими формами и их внешним выражением в виде визуального объекта, позволит адекватно воспринимать образы с учётом их геометрических свойств, что, в конечном счёте, содействует развитию пространственного мышления.

7. Как отмечалось в первой главе, изучение геометрических преобразований, как в школе, так и в вузе, вызывает серьёзные трудности. В вузе ситуация усугубляется ещё и тем, что выводимые в основном курсе многочисленные формулы, аналитически задающие эти преобразования, остаются практически не востребованными. Применение алгоритмов, позволяющих визуализировать на экране компьютера преобразования плоскости и пространства, создавать с их помощью анимационные

эффекты, формирует предпосылки для более глубокого усвоения студентами этой темы.

В педагогических вузах большое значение придаётся умению решать задачи элементарной математики методом преобразований. Для этого нужна хорошо развитая геометрическая интуиция, которая, к сожалению, у некоторых студентов отсутствует. В первую очередь это выражается в неумении увидеть в задаче, не имеющей на первый взгляд никакой связи с преобразованием, таковую. Частично снять возникающие здесь трудности позволяют специальные компьютерно-ориентированные методики.

8. В вузовском курсе геометрии, как и в любых других математических курсах, большое значение имеют задачи проблемного типа. Их использование можно существенно оживить, предваряя решение компьютерным экспериментом, который поможет студенту выработать план решения, например, при определении линии, которую вычертит ортоцентр треугольника при перемещении его вершины по прямой, параллельной противолежащей стороне. Компьютер, в отличие от вычислений вручную и бумажного варианта построения изображения, позволяет студенту достаточно быстро и безошибочно визуализировать такую линию и «увидеть» на экране кривую, похожую на параболу. Наличие правдоподобной гипотезы в свою очередь существенно упрощает доказательный этап решения задачи. Особенно полезен такой эксперимент при решении конструктивных задач с помощью преобразований.

9. Известно, какую большую роль играют в геометрии задачи вычислительного характера, не требующие визуализации. К ним можно отнести все метрические задачи, задачи на вычисление площадей поверхностей, объёмов тел, на нахождение основных характеристик линий и поверхностей (кривизны, кручения); на проверку условий (коллинеарность, компланарность и т. д.).

В учебных задачах такого типа значения параметров специально подбираются, что нарушает естественность условий. Попытки варьировать эти значения приводят к громоздким вычислениям, уменьшающим при ручном счёте число решаемых задач. Использование компьютера позволяет снять это ограничение.

Кроме того, использование компьютера как мощного средства решения вычислительных геометрических задач позволяет основное внимание студентов сконцентрировать на нахождении необходимых вычислительных алгоритмов и соответствующих им подпрограмм.

10. Как известно, одной из важнейших задач курса геометрии является развитие логического мышления учащихся, важным компонентом которого является формальная логика. К сожалению, у преподавателя не всегда имеется возможность уделять достаточное внимание этой стороне. Методы механического доказательства утверждений с помощью персонального компьютера позволяют частично восполнить этот пробел.

11. Большую роль в организации учебного процесса играют систематизация и структуризация полученных студентами знаний. Они важны не только при изучении теоретических вопросов, но и в процессе решения геометрических задач. В обычных условиях хранилищем информации у студента является конспект, книга и память. Обработка (систематизация и структуризация знаний) этой информации в лучшем случае сводится к работе над конспектом. В этом смысле у компьютера неограниченные возможности. Простейшими формами такого использования компьютера является создание банка справочных материалов.

12. В соответствии с новой тенденцией в информатизации российского школьного образования все усилия по компьютеризации школы должны быть направлены на использование информационных технологий в конкретных предметах (математике, физике, истории и т. д.). Если вести речь о курсе геометрии, то традиционная методическая система геометрической подготовки учителя математики слабо ориентирована на то, чтобы подготовить (или хотя бы содействовать подготовке) студентов к

использованию в школьном курсе геометрии информационных технологий. Такая задача, в первую очередь, должна стоять перед курсом методики обучения математике. Однако соответствующие кафедры пока не располагают ни квалифицированными кадрами, способными читать соответствующим образом перестроенные курсы, ни необходимой учебно-методической литературой, ни продуманными методиками и методическими системами, ни специальным образом оснащёнными кабинетами компьютерной техники.

Более естественной, в силу ряда обстоятельств, представляется идея решения этой задачи в основном курсе геометрии. Тем более, если в программу последнего органично вплетены вопросы школьного курса геометрии, а большинство тем базового курса поддерживаются средствами информационных технологий. Студенты, изучая основной курс геометрии, будут не только видеть, каким образом и в каких его разделах применяются информационные технологии, но и готовиться психологически и идеологически к применению в школьном курсе геометрии компьютерных технологий. Реализация последних двух факторов (психологического и идеологического) как раз и является той частью общей задачи, которая может быть выполнена средствами основного курса геометрии. Полностью задача подготовки будущего учителя к применению в школьном курсе геометрии компьютерных средств обучения может быть решена лишь совместными усилиями кафедр геометрии, информатики и методики обучения математике.

13. У студентов нет привычки, умений и даже потребности использовать в конкретных предметах компьютерные среды в качестве инструмента познания. Традиционная методическая система не позволяет студентам педвузов приобрести достаточный опыт использования компьютеров в качестве инструмента познания в курсе геометрии. Как уже отмечалось выше, ни одна из кафедр информационного цикла не ставит перед собой задачу подготовить студентов к тому, чтобы последние

использовали в вузовском курсе геометрии компьютерные средства обучения. Исключение составляет курс «Использование НИТ в образовании», в нём студенты знакомятся с некоторыми обучающими программными средствами. Абсолютное большинство разработанных компьютерных обучающих средств по геометрии ориентировано на поддержку лишь тех её разделов, которые относятся к школьному курсу, причём связанных в основном с изучением геометрических фигур или построениями на плоскости циркулем и линейкой. Применение таких программных средств в вузовском курсе может быть оправдано лишь частично, если иметь в виду, что будущие учителя должны уметь пользоваться ими в школе.

Большинство обучающих программных средств формируют «пространственное видение» стереометрического объекта, представленного двумерным (статическим или динамическим) изображением, которое у студентов педвузов уже, как правило, сформировано. Будущим учителям математики (особенно имеющим дополнительную специальность «Информатика») полезно знать математические основы и алгоритмические методы построения виртуальных моделей стереометрических объектов, причём ещё и уметь применять эти знания на практике. Другими словами, будущим учителям математики при изучении курса геометрии и для повышения своей геометрической подготовки необходимо уметь применять персональный компьютер в качестве инструмента познания. Только в этом случае студент может рассчитывать на более глубокое понимание геометрической теории и на возможность в дальнейшем использовать компьютерные технологии в своей профессиональной педагогической деятельности.

14. Традиционная система геометрической подготовки учителя математики мало содействует формированию достаточно высокого уровня информационной культуры студентов. Задача формирования информационной культуры является одной из основных для курсов

информационного цикла. Однако, учитывая новое направление информатизации школьного образования, овладение компьютерными технологиями должно происходить и через отдельные предметы. В связи с этим на уроках геометрии в средней школе, а, следовательно, и на занятиях по этому предмету в педвузах, персональный компьютер должен использоваться не только для повышения эффективности усвоения предмета, но и для формирования информационной культуры учащихся.

Будущие учителя математики и информатики должны осознавать, что информатику они изучают не только ради того, что бы преподавать её в школе, но и для того, чтобы использовать компьютерные средства при изучении других дисциплин, что без этого трудно говорить об информационной культуре.

Таким образом, нами обоснована потребность в разработке теоретической концепции, которая не только освежила бы курс новыми идеями, пропитала «компьютерным духом», но и содействовала бы более глубокому пониманию его традиционных разделов, дала возможность с помощью персонального компьютера эффективно усваивать изучаемую геометрическую теорию. Она позволила бы:

– повысить наглядность в обучении;

– полнее раскрыть связь, существующую между аналитическими конструкциями и их наглядно-образным выражением;

– существенно расширить представления об объёме изучаемого геометрического понятия;

– «оживить» геометрический чертеж, показать его в процессе построения;

– вскрыть все нюансы геометрических преобразований, научить с их помощью решать конструктивные задачи на построение.

Назовём эту концепцию – концепция *компьютерной поддержки курса геометрии в вузе, готовящем учителя математики, направление подготовки 050100.62 Педагогическое образование, (уровень (степень)* *«бакалавр»), профиль «Математика»*. Ради краткости мы будем её называть концепцией *компьютерной поддержки курса геометрии* и обозначать аббревиатурой *КПГ*.

Предлагаемая концепция имеет большое методологическое значение, поскольку позволяет преподавателю последовательно реализовать в учебном процессе, а студенту глубже осознать роль и значение компьютерных средств в системе образования.

Концепция КПГ реализуется в условиях профессионально-педагогической направленности обучения. Она опирается на три фундаментальные концепции: методологическую концепцию единства теории и практики, педагогическую концепцию воспитывающего и развивающего обучения и психолого-педагогическую концепцию обучения деятельности.

Концепция единства теории и практики предполагает, что теория, изучаемая студентами в курсах геометрии и информатики, соединится в практике использования компьютера в качестве инструмента познания геометрического материала.

Концепция воспитывающего и развивающего обучения предполагает, что использование информационных технологий при обучении геометрии будет содействовать общекультурному развитию будущих учителей, приобщению их к технологиям и мировоззрению XXI века.

Деятельностный подход к геометрической подготовке студента педвуза предполагает рассмотрение координирующей деятельности педагога и деятельности студента, который, с одной стороны, должен изучить программный геометрический материал с использованием информационных технологий, а с другой – овладеть профессиональными компетенциями учителя математики, способного использовать компьютер в школе. Такой подход обеспечивает единство процесса профессионального воспитания будущего учителя, ибо проектируемые свойства личности непосредственно зависят от характера деятельности, в процессе которой она формируется.

2.2. Принципы концепции

Предлагаемая нами концепция компьютерной поддержки курса геометрии в вузе, готовящем учителей математики, раскрывается с помощью шести педагогических положений – принципов КПГ.

Первое положение заключается в том, что использование информационных технологий в процессе геометрической подготовки учителя математики должно адекватно отражать изменения в методах геометрической науки. Студенты должны понимать и на своем личном опыте прочувствовать, какую роль в современной математической деятельности играют компьютерные технологии.

Отсюда первый принцип – *принцип адекватности*: *использование информационных технологий в процессе геометрической подготовки учителя математики должно быть в определенном смысле адекватным их использованию в геометрической науке*.

Второе положение связано с тем, что при переходе от школьной геометрии к вузовской, в которой преобладают аналитические средства исследования, возникает проблема визуализации геометрических объектов и их свойств.

Для того чтобы противодействовать средствами информационных технологий процессу формализации геометрии и устранению из неё наглядности достаточно несколько изменить характер использования компьютера: не ограничиваться его огромными вычислительными возможностями, а стараться связывать их с процессом визуализации геометрических объектов и абстракций на экране дисплея. Например, вычисление определителя системы двух линейных уравнений для выяснения взаимного расположения на плоскости соответствующих прямых сопровождать изображением последних на экране. Вместо требования привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, сформулировать задание, связанное с построением изображения этой линии. В процессе выполнения такого задания естественно будет предварительно привести данное уравнение к каноническому виду и воспользоваться средствами визуализации.

Отсюда второй принцип – *принцип визуализации*: *использование информационных технологий в курсе геометрии вуза, готовящего учителя математики, должно быть максимально ориентировано на визуальные возможности компьютера.*

Третье положение связано с двумя возможными подходами к использованию информационных технологий в образовании. Как отмечалось в первой главе, применение в образовании обучающих программных сред не оправдало возлагавшихся на них надежд, особенно в условиях вузовского обучения. В дальнейшем в нашей концепции мы будем отдавать приоритет использованию компьютерных средств как инструменту познания (в смысле Д. Джонассена, см. параграф 1.2), что в большей степени содействует развитию творческого потенциала студента.

Это положение находится в полном соответствии с педагогическим принципом активности обучения, а также с теорией развивающего обучения, поскольку использование компьютерных средств в качестве инструментов познания активизирует творческую деятельность обучаемого. Оно оправдано и дидактически, поскольку предполагает активное использование знаний, умений и сформированных компетенций в области геометрии, без чего невозможно конструирование на экране дисплея соответствующих геометрических объектов. Наконец, рассматриваемое положение оправдано и психологически, ибо его реализация обеспечивает совпадение в познавательной деятельности студента мотива и цели (построение образа), насыщает его деятельность творческими и эмоциональными элементами.

Отсюда третий принцип – *принцип использования информационных технологий в качестве инструмента познания*: *при изучении курса геометрии в вузе, готовящем учителя математики, средствами информационных технологий необходимо отдавать приоритет тем из них, которые могут быть использованы в качестве инструментов познания.*

Четвёртое положение связано с особенностями математической деятельности специалистов в области преподавания точных дисциплин вообще и учителей математики в частности. Получение ими новых знаний не ориентировано на применение готовых рецептов типа: «в этой ситуации поступай так-то», «в этом случае применяй такую-то формулу». Изучаемый объект связывается ими с уже изученным материалом рассуждениями, вычислениями, геометрическими построениями и т.п. Поэтому при использовании информационных технологий в курсе геометрии недостаточно, а быть может даже вредно, демонстрировать лишь готовые компьютерные модели геометрических фигур или ограничиваться заданиями, в которых требуется изобразить объект на экране компьютера по готовым уравнениям с помощью той или иной обучающей системы. Большинство студентов – будущих учителей математики – должно быть ориентировано на самостоятельную разработку компьютерных программ, как с помощью языков высокого уровня и внутренних языков соответствующих пакетов, так и конструктивных и анимационных возможностей систем динамической геометрии. Такая работа требует знания математической теории вообще и геометрической в частности. Успех в этой деятельности приносит студентам большое удовлетворение, поскольку свидетельствует об их профессиональном росте. Таким образом, особое внимание в геометрической подготовке учителя математики должно уделяться активным методам, связанным с применением графических возможностей языков программирования и систем динамической геометрии.

Отсюда четвёртый принцип – *принцип самостоятельности в использовании компьютерных средств*: *при использовании информационных технологий в курсе геометрии педагогического вуза особое внимание должно уделяться самостоятельной разработке студентами необходимых программных средств.*

Пятое положение связано с новой концепцией информационной подготовки школьников, которая предполагает, что основные знания, умения и навыки работы с компьютером учащиеся школ должны получать в процессе изучения специальных предметов (математики, физики, химии, биологии, истории, русского языка и т.д.). Не вдаваясь в обсуждение вопроса о готовности нашей школы к такому повороту событий, заметим, что роль всех перечисленных выше специальных предметов в формировании правильного взгляда на роль компьютера в человеческой деятельности очень велика. Поэтому в вузовском курсе геометрии необходимо уделить особое внимание вопросам применения информационных технологий в процессе геометрической подготовки школьников. Другими словами, в вузовском курсе необходимо моделировать ситуации, которые могут возникнуть в школе при обучении геометрии с использованием информационных технологий. Это достигается вполне естественно, если в вузовском курсе реализуется профессионально-педагогическая направленность обучения (ППНО).

Отсюда пятый принцип – *принцип ориентации на школу*: *в процессе применения информационных технологий в курсе геометрии педагогического вуза необходимо рассматривать вопросы использования компьютера в школьном курсе геометрии.*

Шестое положение связано с тем, что эпизодическое применение информационных технологий, их использование лишь в некоторых разделах основного курса, в основном связанных с методом координат и векторным методом, не позволяет в должной мере подготовить учителя математики к использованию компьютера в школьном курсе геометрии, где эти разделы представлены весьма слабо. Для достижения поставленной цели важно показать студентам, что информационные технологии можно эффективно использовать во всех разделах основного курса геометрии: геометрии на плоскости, геометрии в пространстве, теории геометрических преобразований, методах изображений, проективной геометрии, дифференциальной геометрии, основаниях геометрии, практикуме по решению школьных геометрических задач.

Отсюда шестой принцип – *принцип систематичности использования информационных технологий*: *использование информационных технологий в курсе геометрии педагогического вуза должно носить непрерывный, систематический характер, т.е. использоваться во всех его темах.*

Связь принципов КПГ с принципами ППНО и компонентами методической системы. Рассмотрим сначала связь между принципами вводимой нами концепции КПГ и принципами концепции ППНО. В сводном виде она отражена в приведенной ниже таблице 1.

Таблица 1

Связь между принципами концепции КПГ и принципами концепции ППНО

		Принципы концепции ППНО			
	Принципы концепции КПГ	Фундаментальности	Ведущей идеи	Бинарности	Непрерывности
1	Адекватности	* * *			
2	Визуализации	*		* *	
3	Использования ИТ как инструментов познания	* * *		*	
4	Самостоятельности в использовании ИТ	* *		* *	
5	Ориентации на школу		* *	* * *	
6	Систематичности использования ИТ				* * *

Принцип *использования информационных технологий в качестве инструментов познания* концепции КПГ имеет самое непосредственное отношение к принципу *фундаментальности* ППНО. В самом деле, систематическое использование в преподавании геометрии компьютерных средств, специально предназначенных для профессиональной деятельности специалистов в области математики и других точных наук, обеспечивает студентам действенные математические знания в пределах, далеко выходящих за рамки школьного курса математики, и универсальность во владении различными математическими учебными предметами в школе. Это обстоятельство в таблице отражено тремя звездочками.

Принцип *использования информационных технологий в качестве инструментов познания* связан и с принципом *бинарности*, хотя эта связь и несколько слабее, чем в предыдущем случае. Действительно, использование информационных технологий, в первую очередь пакетов поддержки школьной геометрии, как инструментов познания при изучении вузовского курса геометрии будет влиять на подготовку будущего учителя к использованию компьютера в школьном курсе не только геометрии, но и других предметов. Факт этой связи в таблице отмечен одной звездочкой.

То же самое можно сказать и о трех других принципах КПГ: принципе *приоритета средств визуализации*, принципе *самостоятельности использования компьютерных средств* и принципе *ориентации на школу*. Однако на этот раз связь с принципом *бинарности* выражена более отчетливо, особенно для последнего принципа. Действительно, особенности применения информационных технологий, связанные с этими принципами, особенно важны в школьном курсе геометрии.

Принцип *ориентации на школу* концепции КПГ естественным образом связан с принципом *ведущей идеи* ППНО. Связь с принципом *ведущей идеи* выражается прежде всего в тех изменениях, которые должны быть внесены в содержание образования и учебные программы вузовского курса геометрии для оптимальной подготовки студентов к использованию информационных технологий в школе. Связь с принципом *бинарности* очевидна. Действительно, если признать неизбежность применения в школе информационных технологий, то, в соответствии с принципом *бинарности*, вопросы такого применения с достаточной полнотой и основательностью должны рассматриваться в вузовском курсе геометрии.

Связь принципов *систематичности использования компьютерных средств* концепции КПГ и *непрерывности* ППНО очевидна. Различие только в областях, к которым они применяются. Принцип *систематичности* КПГ – к использованию компьютеров, а принцип *непрерывности* ППНО – к реализации профессионально педагогической направленности обучения. Если предположить, что обязательным элементом педагогической деятельности учителя математики является использование информационных технологий, то принцип *систематичности* КПГ превращается в принцип *непрерывности* ППНО. Но пока это не произошло, каждый из этих принципов сохраняет свою индивидуальность.

Большую роль в формировании концепции КПГ играют изменения, происходящие в «средствах» традиционной методической системы, прежде всего, более широкое использование информационных технологий. Включение компьютеров в «средства» традиционной методической системы деформирует, хотя и в разной степени, все остальные её компоненты: систему целей, содержание, методы и формы обучения. Сильнее всего меняются методы и формы обучения, менее значительны изменения в содержании и целях обучения.

В сводном виде воздействие принципов КПГ на компоненты традиционной методической системы приведены в таблице 2, в которой слабое влияние отмечено одной звездочкой, среднее – двумя, сильное – тремя.

Таблица 2

Влияние принципов КПГ на компоненты традиционной методической системы обучения геометрии

		Компоненты традиционной методической системы обучения геометрии				
	Принципы КПГ	Цели	Содержание	Методы	Формы	Средства

1	Адекватности	*	*	* *	*	* *
2	Визуализации	*	—	* *	–	* *
3	Использования ИТ как инструментов познания	*	—	* * *	*	* *
4	Самостоятельности в использовании ИТ	*	* *	* * *	* *	*
5	Ориентации на школу	* *	*	* * *	*	*
6	Систематичности использования ИТ	*	—	—	—	*

Таким образом, все принципы КПГ влияют, хотя и незначительно, на цели обучения. В следующей главе (параграф 3.1) традиционная система целей геометрической подготовки учителя математики будет пополнена и частично скорректирована с учетом этих принципов. Незначительно влияние принципов концепции компьютерной поддержки геометрии и на содержание образования, хотя некоторые новые вопросы и будут внесены в программу геометрического курса. Во втором параграфе третьей главы будет выполнена коррекция содержания геометрической подготовки с учетом концепции КПГ. Более заметно влияние концепции на формы и особенно на методы обучения. Естественно, что велика связь между принципами концепции компьютерной поддержки и средствами образования. Ведь именно изменения, происшедшие в средствах обучения, появление компьютеров и информационных технологий, в конечном счете, привели к концепции КПГ.

При отборе содержания доминирующим является принцип *самостоятельности в использовании компьютерных средств*, при выборе методов обучения – принцип *использования компьютерных средств в качестве инструмента познания* и, наконец, при выборе форм и средств обучения – все принципы концепции компьютерной поддержки.

2.3. Условия реализации концепции

Как уже упоминалось выше, методическую систему мы будем строить не на чистом месте. В ее основу будет положена традиционная методическая система геометрической подготовки учителя математики, складывавшаяся под влиянием многообразных факторов, среди которых решающее значение имело состояние геометрической и психолого-педагогических наук.

В настоящее время контуры этой системы очерчены государственными стандартами. К сожалению, в этих стандартах не учтены существенные изменения, происходящие в работе ряда вузов, занятых подготовкой учителей математики. Покажем как, оставаясь в рамках государственных образовательных стандартов, можно создать условия, которые позволят реализовать сформулированную выше концепцию компьютерной поддержки курса геометрии в вузах, готовящих учителей математики (КПГ).

Фактор времени в планировании содержания. Возможность реализации рассмотренной системы принципов в значительной степени зависит от количества часов, выделяемых на изучение соответствующего учебного курса. Если часов недостаточно, то некоторые из принципов начинают конкурировать с другими по уровню значимости, ибо реализация большинства из них требует дополнительных затрат времени. Взять хотя бы принцип сознательности. Самый «дешевый» в этом смысле способ обучения – догматический. Меры, предпринимаемые для уяснения сути явления, механизмов им управляющих, требуют дополнительного времени. Касается это, разумеется, и принципов связанных с реализацией концепций ППНО и КПГ.

Например, принцип фундаментальности ППНО, предполагает рассмотрение в вузовском курсе материала, далеко выходящего за рамки школьных программ. Но насколько далеко, это никем не анализировалось. Этому принципу противостоит принцип минимальности, но и он не ограничен снизу. Соотношение этих принципов определяется количеством часов, выделяемых на рассматриваемый курс. Чем меньше часов, тем меньше возможностей реализовать принцип фундаментальности и тем большую роль начинает играть принцип минимизации, и наоборот.

Аналогично, если процесс преподавания строить с учетом принципа бинарности, демонстрируя приемы и методы, которые будущему учителю будут полезны в школе, то, как показывает опыт, на это приходится тратить времени больше, чем обычно. Совершенно очевидно, что и реализация концепции КПГ требует, особенно на начальном этапе, больших затрат времени.

На первый взгляд положение кажется безвыходным. Сначала, действительно приходится тратить много сил и дополнительного времени на реализацию рассмотренных выше принципов, но вскоре начинает действовать фактор развития. У студентов появляется дополнительная и очень мощная мотивация, растет интерес к изучаемому материалу, углубляется его понимание. Они лучше понимают смысл и назначение изучаемого материала в свете их будущей профессиональной деятельности, повышается уровень владения компьютером как средством познания, более развитыми становятся их пространственные представления и воображение. В новом качестве, на новом, более высоком уровне развития, обучаемые приступают к изучению следующей порции материала. В результате процесс изучения ускоряется, учебное время экономится.

Однако в целом вряд ли можно рассчитывать на то, что, раскрывая внутренние механизмы и отвечая на многочисленные «почему» и «зачем», мы за счет лучшего понимания, лучшей мотивации, повышения интереса к предмету сможем полностью компенсировать дополнительные затраты времени. К этому следует добавить, что время можно дополнительно сэкономить за счет:

– обзорного рассмотрения некоторых разделов геометрии, не имеющих прямого отношения к школьному курсу;

– использования информационных технологий, позволяющих более экономно и компактно рассмотреть некоторые разделы вузовского курса геометрии;

– увеличивающихся возможностей по организации самостоятельной работы студентов.

Проблема часов курса геометрии. Министерство образования и науки РФ приказом от 22.12.2009 №788 утвердило Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100.62 Педагогическое образование (квалификация (степень) «бакалавр») с нормативным сроком обучения 4 года. Этим документом жёстко регламентировано количество зачетных единиц на базовую и вариативную части первых трех циклов дисциплин. По каждому реализуемому профилю вузу дано право устанавливать перечень дисциплин вариативной части и дисциплин по выбору этих циклов.

В КГПУ им. В.П. Астафьева на дисциплины геометрической направленности профиля «Математика», включая дисциплины по выбору и элементарную геометрию, выделено 22 зачетных единицы или 792 часа (из них аудиторных – 468 ч.). Эти часы достаточно равномерно распределены по шести семестрам первых трех лет обучения.

Для реализации концепции профессионально-педагогической направленности обучения студентов бакалавриата – будущих учителей математики часы, выделяемые на элементарную математику (планиметрия) в 3 и 4 семестре, органично включены в дисциплину «Геометрия». Отдельную строку в учебном плане занимает лишь элементарная математика (стереометрия) в 6 семестре.

Часы дисциплин по выбору «Дополнительные главы геометрии» и «Избранные разделы геометрии» на третьем курсе предназначены для чтения важнейших разделов геометрии «Проективная геометрия» (5 семестр) и «Основания геометрии» (6 семестр).

В таблице 3 представлен фрагмент учебного плана подготовки бакалавров педагогического образования, профиль «Математика».

Таблица 3

Фрагмент учебного плана подготовки бакалавра по профилю «Математика», направление «Педагогическое образование»

№ п/п	Наименование дисциплины	Зач. ед.	Трудоемк. ч		Семестры							
			Общ	Ауд	1	2	3	4	5	6	7	8
Б.1 Гуманитарный, социальный и экономический цикл		29	1044	512								
Б.2 Математический и естественнонаучный цикл		10	360	180								
Б.3 Профессиональный цикл		161	5796	2632								
	Базовая часть	39	1404	522								
	Вариативная часть	76	2736	1390								
	…											
1	Геометрия	12	432	288	×	×	×	×				
2	Элементарная математика (стереометрия)	2	72	36					×			
	…											
	Дисциплины по выбору	40	1440	576								
	…											
3	Дополнительные главы геометрии / Избранные разделы геометрии	8	216	144					×	×		
	…											
	Общепрофессиональные курсы по выбору, определяемые работодателем	6	216	72								

Таким образом, на курс геометрии в Красноярском государственном педагогическом университете им. В.П. Астафьева отведено 432 аудиторных часа, из которых 216 часов приходится на лекции, 168 – на практические и семинарские занятия и 48 – на лабораторные занятия. На самостоятельную работу студентов запланировано 144 часа.

Фактор готовности студентов к использованию информационных технологий в курсе геометрии. Для реализации в первом семестре концепции компьютерной поддержки курса геометрии достаточно знания студентами курса информатики в объёме средней школы. В последующих семестрах эффективность реализации концепции КПГ будет уже меньше зависеть от уровня подготовки студентов по школьному курсу информатики, поскольку к этому времени кафедра информатики успевает изложить весь необходимый материал.

В настоящее время в высшие учебные заведения продолжают поступать абитуриенты, особенно из сельских школ, которые изучали информатику в условиях дефицита компьютерной техники и даже теоретически (безкомпьютерный вариант). Такие первокурсники, особенно на первых порах, с трудом адаптируются к условиям, когда одним из средств обучения геометрии является персональный компьютер.

Для ликвидации пробелов в школьной информационной подготовке параллельно с изучением базовой дисциплины «Информатика» можно организовать курсы по получению такими первокурсниками одной из дополнительных специальностей. Такие курсы можно проводить на лицензионной основе по специальной программе. После их окончания слушатели (ими могут быть и студенты других факультетов, преподаватели, любые желающие) имеют возможность получить специальные сертификаты. Кроме создания условий для успешного обучения студентов в условиях реализации концепции компьютерной поддержки, такие курсы позволяют социально защитить студентов.

Фактор готовности преподавателей к реализации концепции КПГ. Использование в курсе геометрии педагогического вуза информационных технологий требует от преподавателей, читающих этот курс, специальной подготовки, выходящей за рамки традиционной. Для того чтобы преподаватель педвуза мог успешно реализовать концепцию компьютерной поддержки курса геометрии, к нему следует предъявить определенные требования. Он должен:

– знать современные операционные системы;

– знать основы одного-двух языков программирования высокого уровня, их вычислительные, графические и логические возможности, уметь составлять простейшие программы в режимах символьного и графического экранов;

– знать некоторые текстовые процессоры и издательские системы с элементами графики; графические редакторы, пакеты трёхмерной графики и анимации, тестовые оболочки с графическим сопровождением, СУБД «библиотека», цифровые образовательные ресурсы поддержки школьной геометрии, в том числе системы динамической геометрии;

– знать некоторые пакеты символьных преобразований, уметь применять их в геометрических исследованиях учебного характера;

– знать вычислительные методы построения изображений геометрических фигур при параллельном и центральном проектировании;

– знать основные алгоритмы визуализации геометрических объектов и абстракций;

– иметь собственный опыт использования систем динамической геометрии в учебно-методических исследованиях, уметь использовать свой научно-исследовательский потенциал в учебном процессе.

Необходима психологическая перестройка преподавателей, читающих курс геометрии, ориентирующая их на полноценное и качественное осуществление в процессе обучения концепции КПГ. Нуждается в изменении и психология профессионального отношения представителей других математических кафедр к использованию информационных технологий и к профессионально-педагогическому воспитанию студентов средствами этих технологий.

Подготовить преподавателей к работе в условиях реализации концепции КПГ можно в рамках научно-методического семинара, посвящённого проблемам использования в курсе геометрии новых информационных технологий. К работе этого семинара можно подключить преподавателей кафедры информатики, которые имеют базовую математическую подготовку и хорошо знакомы с технологиями компьютерной графики и геометрического моделирования.

В распоряжении каждого преподавателя, как лектора, так и ассистента, должны находиться учебные пособия по курсу геометрии, ориентированные на использование в обучении информационных технологий, методические рекомендации по проведению практических, лабораторных и лабораторно-практических занятий по компьютерно-ориентированной методике, все необходимые для проведения лабораторных работ программы с соответствующими комментариями. Каждое лабораторное занятие в компьютерном классе, особенно его информационная часть, должно быть достаточно подробно расписано, методика его проведения – доведена до уровня технологии. В частности, преподавателям должно быть известно, какие задания или учебные проекты необходимо рассмотреть на лабораторном занятии, что в связи с этим должно быть обсуждено на лекции, что на практическом или лабораторно-практическом занятиях, что задано в качестве самостоятельного задания. Преподаватель, проводящий лабораторное занятие, должен знать несколько способов выполнения аудиторных учебных проектов, этапы их выполнения, уметь формировать из числа студентов работоспособные творческие коллективы и таким образом организовать их деятельность, чтобы к окончанию занятий все учебные проекты и задания были выполнены.

Концепция КПГ и курс информатики. Обсудим проблему «состыкованности» концепции КПГ с дисциплинами информационного цикла. Согласно государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100.62 Педагогическое образование (квалификация (степень) «бакалавр») на дисциплины информационного цикла (информационные технологии, информационная культура, информатика, информационные технологии в математике) выделено 14 зачетных единиц (504 часа, из них 270 часов на аудиторные занятия).

В *первом семестре* кафедра информатики читает модуль «Программное обеспечение». Студентам даются основы языков программирования высокого уровня, полученные знания закрепляются на практикуме в компьютерном кабинете. Уже к середине семестра студенты знакомятся с наиболее распространёнными операционными системами, с системами управления базами данных, учатся строить простейшие изображения с помощью одного из графических редакторов, обучаются создавать текстовые файлы и строить рисунки с помощью текстовых редакторов и издательских систем. Таким образом, во второй половине семестра студенты вполне подготовлены к первой лабораторной работе, как с точки зрения геометрии, так и с точки зрения информатики.

Полученные студентами пользовательские навыки работы с различным программным обеспечением позволят им без особых проблем освоить пакеты «Живая геометрия» или «GeoGebra» непосредственно на втором лабораторном занятии (в курсе информатики детальное изучение пакетов не предполагается).

К концу семестра студенты уже должны достаточно хорошо знать алгоритмизацию и программирование, один из языков программирования высокого уровня, иметь представление о моделях решения функциональных и вычислительных задач. Это создаст необходимые предпосылки для успешного выполнения студентами третьей лабораторной работы, посвящённой моделированию вычислительных геометрических задач с помощью языка программирования высокого уровня.

Во *втором семестре* кафедра информатики продолжает чтение раздела «Программное обеспечение», обеспечивает учебный процесс по разделу «Практика на ПК». В начале семестра изучаются графические возможности языков программирования, построение простейших фигур с помощью графических примитивов. Таким образом, для проведения первых двух лабораторных работ будет создана необходимая информационная база.

Третья лабораторная работа во втором семестре посвящена знакомству с графическими возможностями пакета символьных преобразований Maple, выполнению заданий, связанных с изображением плоских кривых с помощью этого пакета. Для успешного выполнения этой работы необходимо, чтобы во втором семестре несколько занятий по информатике (лекция и лабораторное занятие) были посвящены этому пакету.

Все лабораторные работы во втором, *третьем, четвёртом и шестом* семестрах посвящены компьютерной визуализации геометрических объектов и абстракций и предполагают знание студентами языка программирования высокого уровня и, в первую очередь, его графических возможностей. В частности, студенты должны быть знакомы с анимационными возможностями компьютера, позволяющими имитировать на дисплее динамические процессы. Весь необходимый теоретический материал к этому времени должен быть прочитан преподавателями кафедры информатики. Необходимые методы компьютерного геометрического моделирования будут даны непосредственно в курсе геометрии и в курсе информатики.

В *пятом* семестре модуль «Проективная геометрия» предполагается поддержать системами динамической геометрии «Живая геометрия» и «GeoGebra», пакетами символьных преобразований, инструментальными программными средствами. В предыдущем 4 семестре кафедра информатики в рамках дисциплины «Информационные технологии в математике» имеет возможность познакомить студентов с этими системами.

При освоении курса «Информационные технологии» студенты изучают технологические возможности использования компьютера в педагогической деятельности, в том числе в преподавании школьного курса геометрии, при изучении геометрии в педвузе, постигают психолого-педагогические аспекты работы с цифровыми образовательными ресурсами.

На этой ступени студенты получают более глубокие знания по комплексному использованию информационных технологий в образовании, осваивают принципы создания и использования автоматизированных курсов по различным предметам. В курсе делается упор на психолого-педагогические и технологические аспекты использования программно-педагогических средств.

Таким образом, студенты не только подготавливаются к успешному выполнению учебных проектов на лабораторно-практических занятиях по геометрии и индивидуальных домашних заданий, но и получают возможность применить компьютерно-ориентированную методику при выполнении выпускных квалификационных работ.

Концепция КПГ и курс методики обучения математики. Обсудим проблему «состыкованности» концепции КПГ с курсом «Теория и методика обучения математике». Согласно примерному учебному плану курс «Теория и методика обучения математике» читается в 4-7 семестрах, то есть тогда, когда основная часть курса геометрии уже пройдена. Это позволяет при изложении вопросов методики, связанных с применением в математике информационных технологий обучения, использовать известный учащимся по первым четырем семестрам опыт реализации концепции КПГ в курсе геометрии. Имея конкретное представление о том, как с помощью компьютера можно поддержать вузовский курс геометрии, студенты с большей заинтересованностью и пониманием относятся к темам курса методики, которые ориентированы на использование информационных технологий в школьном курсе геометрии. Преподаватели, читающие курс методики, при изложении этих тем имеют возможность опереться на вузовский курс геометрии, который содержит большое количество вопросов элементарной (школьной) геометрии.

Это особенно актуально, поскольку в новом государственном образовательном стандарте программа дисциплины «Теория и методика обучения математике» совершенно недостаточно затрагивает вопросы, связанные с использованием в школьном курсе математики информационных технологий. Реализация концепции КПГ даёт возможность в курсе методики обучения математики:

– раскрыть взаимоотношения школьного курса с математикой как наукой, познакомить с важнейшими областями применения математики, в частности *с информатикой и компьютерной геометрией*;

– вырабатывать у студентов практические навыки проведения учебной и воспитательной работы по математике на уровне требований, предъявляемых современной школе, в том числе, требований по подготовке учащихся к работе в условиях *глобальной информатизации общества*;

– сформировать у студентов интерес к педагогической науке, к научной работе по теории и методике обучения математике, в частности, по *методике применения в курсе геометрии информационных технологий*.

Опираясь на опыт использования в курсе геометрии педвуза компьютерных средств, студенту в процессе изучения курса «Теория и методика обучения математике» проще овладеть:

– знаниями различных аспектов вопроса постановки целей обучения математике, спецификой учебных, математических, методических задач и приёмами их формулировки и постановки, средствами обучения вообще и *компьютерными* в частности, способами их реализации при обучении различным вопросам в соответствии с целями обучения и методами обучения;

– знаниями общих принципов *технологии компьютерного обучения* и умением применять их для *создания информационных технологий обучения математике*;

– умением строить современные методики (*включая компьютерные*) изучения тем школьного курса математики в зависимости от целей и различных условий обучения;

– умением разрабатывать методику проведения урока математики с использованием *персонального компьютера* и других технических средств обучения;

– умением проводить экспериментальную работу и обрабатывать её результаты, *используя современные программные средства обработки статистических данных*;

– умением разрабатывать дидактические материалы, изготавливать наглядные пособия, *создавать демонстрационные программные средства обучения*, применять их при изучении конкретных тем курса математики;

– умением оценивать деятельность свою и учащихся, знанием *компьютерных средств оценки деятельности учащихся* (*компьютерное тестирование*), научить их оценке и самооценке своей деятельности;

– умением организовывать деятельность учащихся на различных видах занятий и управлять этой деятельностью на разных её этапах, организовывать и проводить *лабораторные и лабораторно-практические занятия по геометрии в дисплейном классе*;

– умением выполнять логико-математический анализ определений математических понятий, утверждений, правил, алгоритмов, сюжетных математических задач, логико-дидактический анализ материала учебника математики, *используя компьютерные средства создавать семантические сети и базы знаний*.

ВЫВОДЫ

1. Обоснована необходимость создания концепции компьютерной поддержки курса геометрии в вузе, готовящем учителя математики. Перечислены основные проблемы и трудности в обучении геометрии студентов, которые можно решить, используя информационные технологии. К ним, например, относятся следующие: слабое представление студентами роли компьютера в научных геометрических исследованиях, невысокий уровень развитости пространственных представлений

учащихся, большая зависимость иллюстративного сопровождения геометрической теории от субъективных и объективных факторов, формальное представление студентами связи между аналитическими конструкциями в геометрии и их наглядно-образным выражением, недостаточно развитое представление у студентов об объёме того или иного геометрического понятия и другие.

2. Сформулированы принципы концепции компьютерной поддержки курса геометрии в вузе, готовящем учителя математики. Принципами концепции КПГ являются: *принцип адекватности* (использование ИТ в процессе геометрической подготовки учителя математики должно быть в определенном смысле адекватным их использованию в геометрической науке), *принцип визуализации* (использование ИТ в курсе геометрии должно быть максимально ориентировано на визуальные возможности компьютера), *принцип использования компьютерных средств в качестве инструмента познания* (при изучении курса геометрии средствами ИТ необходимо отдавать приоритет тем из них, которые могут быть использованы в качестве инструмента познания), *принцип самостоятельности в использовании компьютерных средств* (при использовании ИТ в курсе геометрии особое внимание должно уделяться самостоятельной разработке студентами необходимых программных средств), *принцип ориентации на школу* (в процессе применения ИТ в курсе геометрии необходимо рассматривать вопросы использования компьютера в школьном курсе геометрии), *принцип систематичности использования компьютерных средств* (использование ИТ в курсе геометрии должно носить непрерывный, систематический характер, т.е. использоваться во всех его разделах).

3. Установлена связь принципов концепции компьютерной поддержки курса геометрии с принципами концепции профессионально-педагогической направленности обучения.

4. Проанализировано влияние принципов концепции компьютерной поддержки на компоненты традиционной методической системы геометрической подготовки учителя математики.

5. Выяснено, как в рамках государственного образовательного стандарта создать условия необходимые для реализации концепции компьютерной поддержки курса геометрии в вузе, готовящем учителя математики.

ГЛАВА III. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе информационных технологий

Глава посвящена построению методической системы геометрической подготовки студентов – будущих учителей математики, обучающихся по направлению подготовки 050100.62 Педагогическое образование, квалификация (степень) «бакалавр», профиль «Математика», в соответствии с заявленной в главе II концепцией; описанию основных компонентов методической системы: целей, содержания, методов, форм и средств обучения. В последнем параграфе главы приводится классификация компьютерных средств обучения геометрии.

3.1. Цели обучения

Коррективы целей обучения в связи с информатизацией общества. В соответствии с задачами исследования приступим теперь к построению методической системы, обеспечивающей нужную нам геометрическую подготовку учителя математики. Как отмечалось выше, под методической системой мы понимаем педагогическую структуру, компонентами которой являются цели, содержание, методы, формы и средства обучения.

Любая методическая система функционирует в определенной социальной и культурной среде, которая оказывает на неё решающее воздействие, причем наиболее явным образом это воздействие направляется на цели обучения, последние, таким образом, в известной степени зависят от социального заказа общества.

Как показывает анализ, проведенный в первой главе монографии, современной школе нужен учитель математики, разносторонне образованный, обладающий действенными математическими знаниями, в полной мере понимающий особенности школьного курса математики, знакомый с современными образовательными технологиями и владеющий компьютерными средствами обучения. Далеко не все из этих качеств могут быть сформированы в процессе изучения студентами специальных математических дисциплин, в частности геометрии. Определенную роль в этой подготовке должны играть психолого-педагогические и методические курсы, а также курсы информационного цикла.

В методической системе, которую строят авторы, предполагается, с одной стороны, отразить положительный опыт традиционной геометрической подготовки учителя математики, трансформированный с учетом концепции профессионально-педагогической направленности обучения, а с другой – реализовать выдвинутую нами концепцию компьютерной поддержки курса геометрии.

Анализ концепции КПГ и опыт её реализации в условиях специалитета показывают – для того чтобы система целей методической системы геометрической подготовки учителя математики, владеющего и активно использующего информационные технологии, адекватно отражала изменения, происходящие в системе высшего образования в связи с информатизацией общества, к ней необходимо добавить несколько новых целей.

Для реализации концепции КПГ соответствующая методическая система должна:

а) *содействовать формированию современного взгляда на геометрию как науку, использующую в своих исследованиях информационные технологии.*

Это, так сказать, методологическая цель. Если в древности и средние века геометр представлялся как человек, оперирующий циркулем и линейкой, а с семнадцатого века – еще и формулами, то теперь в его работе все более существенную роль начинает играть компьютер. Студенты должны понимать значение информационных технологий в современной математической деятельности. В определенном смысле эта цель соответствует принципу *адекватности* концепции КПГ;

б) *обеспечить студентам знания, умения и навыки, необходимые для использования информационных технологий при изучении курса геометрии в педагогическом вузе.*

Это – учебная цель. Об информационных технологиях надо не только рассказывать, но и учить использовать их, давая необходимые знания, умения и навыки, формируя требуемые компетенции. Это становится особенно важным в связи с новой концепцией изучения в школе информатики, о чем речь шла в первой главе монографии. В определенном смысле эта цель соответствует всем принципам концепции КПГ;

в) *обеспечить достаточный опыт использования компьютера в качестве средства познания геометрии.*

Это – психолого-педагогическая цель. В ней подчеркивается, что из двух основных форм использования компьютеров в образовательных целях предпочтение должно отдаваться их использованию в качестве инструментов познания в смысле идей Д. Джонассена [62] (см. также параграф 1.2). Уровень подготовки должен давать студентам возможность самостоятельно осваивать новые разделы геометрической теории, используя при этом компьютеры в качестве эффективного средства познания. Эта цель непосредственно связана с принципом *использования информационных технологий в качестве инструмента познания* и принципом *самостоятельности в использовании компьютерных средств* КПГ;

г) *воспитывать устойчивый интерес к геометрии, прежде всего как к науке о пространственных формах.*

Эта цель поставлена в связи с огромной ролью, которую пространственные представления и пространственное воображение играют в культурном и психологическом развитии человека. Она подчеркивает роль информационных технологий в развитии этого важного компонента человеческой культуры и непосредственно связана с принципом *визуализации* КПГ;

д) *подготовить студентов психологически и идеологически к тому, чтобы в школьном курсе геометрии применять информационные технологии.*

Эта цель непосредственно связана с принципом *связи со школой* КПГ;

е) *содействовать формированию достаточно высокого уровня не только геометрической, но и информационной культуры.*

Надо приучить студентов к мысли, что информатику они изучают не только ради преподавания её в школе, но и для того, чтобы использовать компьютерные среды при изучении других дисциплин, без этого трудно говорить об информационной культуре.

Это – воспитательная цель. Она соответствует процессам, происходящим в современном мире, и связана со всей системой принципов КПГ, в первую очередь, с принципом *самостоятельности использования компьютерных средств*.

Группы целей методической системы геометрической подготовки учителя математики на основе информационных технологий. С учётом рассмотренных выше коррективов группы целей методической системы геометрической подготовки учителя математики на основе информационных технологий будут выглядеть следующим образом.

<u>Первая группа целей</u>. *Формирование научного мировоззрения.* Курс геометрии в ряду других математических дисциплин должен содействовать формированию достаточно высокого уровня научной подготовки студентов. В процессе его преподавания должно быть обеспечено понимание сути геометрической науки, ее структуры, связи её понятий с объектами внешнего мира, универсальность геометрических абстракций, особенности аксиоматического метода. Должна быть раскрыта связь геометрии с математическими и другими науками, её место в системе

этих наук. Должны быть сформированы отчетливое представление о применяемых в геометрии методах, в том числе и *компьютерных, современный взгляд на геометрию как науку, использующую средства информационных технологий.*

Вторая группа целей. *Обеспечение знаний, умений и навыков, формирование компетенций.* Изучение курса геометрии в педагогическом вузе должно обеспечить такой уровень математических знаний, умений и навыков, формирование компетенций, который гарантировал бы владение научным фундаментом школьного курса математики, полное и глубокое понимание его фактов, идей, методов и структуры, глобальных целей преподавания и тонкостей изложения отдельных вопросов. *Оно должно также обеспечить студентам знания, умения и навыки необходимые для применения информационных технологий в геометрических исследованиях,* возможность самостоятельной работы с *использованием компьютера в качестве эффективного средства познания геометрии, способствовать формированию требуемых компетенций.*

Третья группа целей. *Развитие математического мышления*. Изучение курса геометрии в педагогическом вузе должно обеспечить развитие математического мышления студентов с присущими ему качествами: полнотой аргументации; доминированием логической схемы рассуждений; лаконизмом; четкой расчлененностью хода рассуждений; скрупулезной точностью символики. В этом курсе необходимо научить студентов правильно использовать правдоподобные рассуждения и пространственную интуицию. *Особое внимание следует обратить на использование компьютеров для развития пространственного мышления, в котором восприятие пространственных образов корректируется теоретическими соображениями, знанием фактов геометрической науки. Студентов следует знакомить с психологическими проблемами использования компьютера в качестве инструмента познания.*

Четвёртая группа целей. *Формирование опыта педагогической деятельности.* Изучение курса геометрии в педагогическом вузе должно обеспечить студентам достаточный опыт педагогической деятельности, создать условия для формирования методических взглядов будущего учителя, сформировать умение преобразовывать научный материал во фрагмент учебной дисциплины. Этот курс должен уменьшить разрыв между вузовским и школьным курсом геометрии, как по содержанию, так и по методам изложения. В нем необходимо отдавать предпочтение методам и приемам, которые рекомендуются в школьном преподавании, обращая на это внимание студентов; *использовать новые образовательные технологии, включая информационные, обеспечить достаточный опыт применения компьютеров в качестве средства познания.*

Пятая группа целей. *Воспитание интереса к геометрии.* Изучение курса геометрии в педагогическом вузе должно обеспечить устойчивый интерес к геометрии, *прежде всего как к науке о пространственных формах, развивать пространственную интуицию*. Студентов следует увлечь логической стройностью курса, красотой и изяществом доказательств, неожиданностью решений, *возможностью конструировать геометрические образы на экране дисплея.* Следует использовать богатую событиями многовековую историю геометрической науки, знакомить студентов с попытками различных учёных решить ту или иную задачу, с характеристикой их достижений и неудач. Полезны конкретные и обстоятельные указания на нерешённые проблемы. *Немалую роль в воспитании интереса к геометрии может сыграть использование информационных технологий.*

Шестая группа целей. *Формирование математической и информационной культуры*. Изучение курса геометрии в педагогическом вузе должно обеспечить формирование не только математической, но и *информационной* культуры будущего учителя. Необходимо добиваться от студентов: чёткой формулировки основных определений и положений теории, логически верного, последовательного и грамотного изложения своих мыслей; владения математической терминологией и литературным языком. Они должны овладеть методом математического моделирования, научиться применять его к решению задач, сформировать внутреннюю потребность в продолжении своего математического образования, способность осваивать новые разделы геометрии; оценивать уровни строгости и полноты изложения материала (в том числе и школьного). *В области информационной надо приучить студентов к мысли, что информатика изучается не только ради преподавания этой дисциплины в школе, но и для того, чтобы использовать компьютерные среды при изучении других дисциплин, что без соответствующих умений трудно говорить об информационной культуре*.

Наконец, изучение курса геометрии должно содействовать формированию общей культуры, в чём геометрия по сравнению с другими математическими науками имеет определенные преимущества, ибо имеет самое непосредственное отношение к изобразительному искусству, ваянию и архитектуре.

В обобщенном виде связь между группами целей и принципами КПГ представлена в таблице 4. Степень связи влияния выражена числом звездочек.

Таблица 4

Связь принципов КПГ с группой целей методической системы геометрической подготовки учителя математики

	Группы целей	Принципы КПГ					
		Адекватности	Визуализации	Использования ИТ как инструментов познания	Самостоятельности в использовании КС	Ориентации на школу	Систематичности
1	Формирование научного мировоззрения	* * *	* *	* *	* *	–	* *

2	Обеспечение знаний, умений и навыков	*	*	* * *	* * *	–	* * *
3	Развитие математического мышления	* *	* * *	* * *	* * *	–	* *
4	Формирование опыта педагогической деятельности	–	* *	* * *	* *	* * *	* * *
5	Воспитание интереса к геометрии	* *	* * *	* *	*	* *	* *
6	Формирование математической и информационной культуры	* *	*	* * *	* * *	–	* *

3.2. Содержание обучения

Влияние принципов КПГ на содержание геометрической подготовки учителя математики. Рассмотрим, какое влияние оказывают принципы КПГ на содержание геометрической подготовки учителя математики.

Первый принцип (*принцип адекватности*) требует, чтобы использование информационных технологий в процессе геометрической подготовки учителя математики было, в определенном смысле, адекватным их использованию в геометрической науке.

Для реализации этого принципа необходимо знакомить студентов с различными информационными технологиями, основанными на использовании языков программирования высокого уровня и современных программных пакетов, в частности: пакетов символьных вычислений, математических систем, систем автоматического проектирования и механического доказательства геометрических утверждений. Более конкретно – пакетов символьных вычислений Maple, Derive, Reduce, математических пакетов Mathematica, MathCAD, систем автоматического проектирования AutoCAD. Кроме того, желательно познакомить студентов с методами механического доказательства геометрических утверждений.

Использовать все эти средства предполагается прежде всего при решении нестандартных задач творческого содержания и выполнении специальных учебных проектов по курсу геометрии.

В рамках разработанной нами концепции недопустимо замыкаться на какой-либо одной технологии или одном средстве, например, использовать компьютеры только для вычислений или только для получения изображений.

В этих целях студентов необходимо познакомить с *особенностями применения пакета Maple при изучении линий и поверхностей в евклидовом пространстве, методами механического доказательства геометрических утверждений.*

Этот принцип может быть реализован, как глобально, то есть во всем курсе, так и локально, то есть в отдельных разделах, темах, и, даже, частных вопросах.

Второй принцип (*принцип визуализации*) требует, чтобы использование информационных технологий в курсе геометрии педагогического вуза было максимально ориентировано на визуальные возможности компьютера.

Для реализации этого принципа предполагается на лекциях, лабораторных, практических и лабораторно-практических занятиях широко использовать демонстрационные динамические чертежи; решение части задач доводить до построения изображения на дисплее; широко использовать анимационные возможности компьютера, особенно при визуализации геометрических преобразований.

Для того чтобы студенты лучше усвоили связь между аналитическими фактами и их наглядным выражением, полезно решение некоторых чисто математических задач (на вычисление, преобразование, распознавание и т.д.) доводить до наглядного образа и исследовать влияние, которое оказывают на этот образ значения параметров, входящих в рассматриваемое выражение.

Для того чтобы при работе с понятием у студентов формировалось правильное представление о его объеме, полезны специальные задания, требующие от них создания программ, демонстрирующих набор образов, соответствующих рассматриваемому понятию, а еще лучше, программ, позволяющих эти образы деформировать вплоть до предельных ситуаций.

В ряде случаев усвоению учебного материала помогает использование программ, позволяющих при желании или необходимости «оживить» чертеж, увидеть его в процессе построения.

Еще больше возможностей у них при изучении отдельных тем. Так, при изучении модуля «Геометрические преобразования» можно с помощью компьютерной анимации представить преобразование в динамике и в виде пошаговой процедуры. Системы динамической геометрии и специальные компьютерно-ориентированные методики помогают в обучении студентов приемам решения задач элементарной математики методом преобразований. Наконец, средства графического программирования помогут в использовании преобразования и в решении конструктивных задач.

Для достижения этих целей студентов необходимо познакомить с *вычислительным методом построения изображений фигур*, *методами компьютерного моделирования планиметрических, стереометрических и многомерных объектов, а также методами создания анимационного эффекта с помощью языков программирования высокого уровня и систем динамической геометрии, с решением задач локальной и глобальной видимости, с методами компьютерной визуализации движений, подобий, аффинных и проективных преобразований, инверсий, компьютерно-ориентированной методикой решения конструктивных задач с помощью геометрических преобразований*.

Третий принцип (*принцип использования информационных технологий в качестве инструмента познания*) требует при изучении курса геометрии в педагогическом вузе средствами информационных технологий отдавать приоритет тем из них, которые могут быть использованы как инструменты познания.

Для реализации этого принципа предполагается использовать при решении задач языки программирования высокого уровня и внутренние языки пакетов, применять компьютер как средство экспериментирования в виртуальной лаборатории, решать задачи прикладного характера. Привлекать студентов к созданию банка справочных материалов и баз данных, к разработке тестов с занесением их в готовые тестовые оболочки.

Совершенно естественно применение компьютера при решении задач, требующих большого объема вычислений, и дело здесь не столько в экономии времени, которое, кстати сказать, часто является иллюзорным, сколько в необходимости детально прописывать вычислительный алгоритм, составлять банк подпрограмм.

В этих целях студентов необходимо познакомить с *возможностями систем динамической геометрии, математических пакетов и языков программирования при изучении различных тем курса геометрии, использования этих программных средств в качестве инструмента построения собственных знаний по геометрии.*

Четвёртый принцип (*принцип самостоятельности в использовании компьютерных средств*) требует, чтобы при использовании информационных технологий в курсе геометрии педагогического вуза особое внимание уделялось самостоятельной разработке студентами необходимых программных средств.

Для реализации этого принципа предполагается использовать задания, требующие самостоятельной разработки студентами программ на языках высокого уровня и внутренних языках пакетов, умения работать в системах динамической геометрии. Основное внимание следует обратить на задания, визуализирующие на дисплее геометрические процессы, объекты и абстракции, в частности, рассмотреть в соответствующих разделах *методы компьютерного моделирования геометрических* *объектов и абстракций, а также методы создания анимации с помощью языков программирования высокого уровня, систем динамической геометрии и пакетов символьных вычислений.*

В связи с использованием экрана дисплея студентов необходимо познакомить с *особенностями решения геометрических задач на ограниченном фрагменте дискретной плоскости.*

Пятый принцип (*принцип ориентации на школу*) требует, чтобы в процессе применения информационных технологий в курсе геометрии педагогического вуза рассматривались вопросы использования компьютера в школьном курсе геометрии.

Для реализации этого принципа предполагается при изучении темы «Геометрические фигуры» познакомить студентов с *особенностями построения изображений фигур на экране дисплея с помощью графических редакторов и систем динамической геометрии.* Это вооружит учащихся простейшими (не ориентированными на использование языков программирования и математических пакетов) методами построения фигур на экране компьютера.

При изучении темы «Решение конструктивных задач» предполагается познакомить студентов с *программными средствами поддержки конструктивной геометрии,* к которым относятся, например, пакеты *Живая Геометрия* и *GeoGebra.* Эти пакеты рекомендованы для использования в школе. Поэтому будущие учителя математики должны быть с ними знакомы. Причём не только иметь представление о возможностях пакета, но и понимать, как он используется непосредственно в курсе геометрии при решении задач.

Шестой принцип (*принцип систематичности использования информационных технологий*) требует, чтобы использование информационных технологий в курсе геометрии педагогического вуза носило непрерывный, систематический характер, т.е. применялось во всех его разделах и большинстве тем.

Для реализации этого принципа, в соответствии с его формулировкой, необходимо использовать информационные технологии во всех достаточно крупных и значимых темах курса геометрии.

Таким образом, рассмотренные выше формы реализации концепции КПГ предполагают включить в программу курса геометрии следующие вопросы.

Методы компьютерного моделирования планиметрических, стереометрических и многомерных геометрических объектов с помощью систем динамической геометрии, языков программирования высокого уровня и пакетов символьных вычислений.

Методы создания анимационного эффекта с помощью систем динамической геометрии, языков программирования высокого уровня и пакетов символьных вычислений.

Решение задач локальной и глобальной видимости.

Методы компьютерной визуализации движений, подобий, аффинных и проективных преобразований, инверсий.

Применение компьютерно-ориентированной методики при решении конструктивных задач методом геометрических преобразований.

Методы механического доказательства геометрических утверждений.

Геометрические фигуры, *изображение фигур с помощью графических редакторов и систем динамической геометрии.*

Решение конструктивных задач с помощью интерактивных геометрических сред и пакетов поддержки конструктивной геометрии.

Особенности решения геометрических задач на ограниченном фрагменте дискретной плоскости.

Системы динамической геометрии и пакеты символьных вычислений, их графические возможности.

Вычислительный метод построения изображений пространственных фигур.

Содержание методической системы. Построение содержания, как и построение системы целей, мы начинаем не на чистом месте. Нельзя игнорировать накопленный опыт, программы, учебники и учебные пособия. Ведь отрабатывались они десятилетиями в соответствии с существовавшими представлениями о самой геометрической науке и принципах дидактики. В основном они сохранились и в настоящее время. Приходится учитывать и государственные стандарты, какими бы плохими они нам ни казались. Содержание курса геометрии в условиях ППНО приведено в параграфе 1.4. Анализируя влияние концепции компьютерной поддержки на содержание геометрической подготовки учителя математики, мы пришли к выводу о необходимости включения в содержание методической системы дополнительных вопросов (смотри предыдущий пункт).

Ниже приводится распределение этих вопросов по всем разделам основного курса геометрии педагогического вуза. Курсивом выделены вопросы, связанные с реализацией концепции КПГ.

ПЕРВЫЙ МОДУЛЬ (Геометрия на плоскости). Краткий исторический обзор возникновения геометрических понятий. Идея логического построения геометрии. Геометрические фигуры*, изображение фигур с помощью систем динамической геометрии.* Задачи на построение циркулем и линейкой, метод пересечения фигур, алгебраический метод. Задачи, не разрешимые циркулем и линейкой. Золотое сечение. Построение правильных n-угольников. Решение конструктивных задач другими инструментами. Движения и подобия, равные и подобные фигуры. Метрические соотношения. Классические теоремы о треугольниках и окружностях. *Компьютерные эксперименты как средство исследования в геометрии*. Теоремы Птолемея, Чевы, Менелая, задачи Эйлера. Площади многоугольников. Теорема Брахмагупты о площади четырёхугольника, вписанного в окружность, формула Герона. Равновеликость и равносоставленность. Теорема Бояи-Гервина. Теорема

Пифагора, различные способы доказательства. Площадь круга и его частей.

ВТОРОЙ МОДУЛЬ (Метод координат). Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве, расстояние между точками. Векторы на плоскости и в пространстве, их координаты, замена системы координат, скалярное произведение векторов. Прямая на плоскости и окружность, уравнения прямой и окружности. *Методы компьютерного моделирования планиметрических фигур. Особенности решения геометрических задач на ограниченном фрагменте дискретной плоскости.* Конические сечения, их уравнения. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду. *Методы создания анимационного эффекта на экране компьютера.* Циклоида, эпициклоида и гипоциклоида, винтовая линия. Критерий разрешимости конструктивных задач. Специальные кривые, используемые при решении задач, не разрешимых циркулем и линейкой. *Пакет символьных преобразований Maple, его графические возможности.* Векторное и смешанное произведения векторов. Уравнения плоскости и прямой в пространстве, сферы и винтовой линии. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Задачи метрического и позиционного характера по теме плоскость и прямая в пространстве.

ТРЕТИЙ МОДУЛЬ (Геометрия в пространстве). Аксиомы стереометрии, геометрические построения в пространстве. Понятия геометрического тела и его поверхности, анализ школьных определений. Изображение пространственных фигур с помощью параллельного проектирования, построение сечений. Аксонометрия. *Вычислительный метод построения изображений пространственных фигур. Методы компьютерного моделирования поверхностей и линий. Задача локальной видимости.* Правильные многогранники, теорема Эйлера для многогранников, *методы компьютерного моделирования многогранников.* Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения, уравнения этих поверхностей, тор. Поверхности второго порядка, эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие поверхности второго порядка. *Компьютерное моделирование невыпуклых тел, задача глобальной видимости*. Понятие объёма. Способы вычисления объёма, принцип Кавальери. Объём прямой призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара. Вопросы измерения величин. Теоремы существования и единственности измерения площадей и объёмов.

ЧЕТВЕРТЫЙ МОДУЛЬ (Геометрические преобразования). Понятие геометрического преобразования, примеры. Композиция преобразований, группа преобразований. Движения плоскости и пространства. Классификация движений плоскости. Симметрии фигур. Подобия плоскости и пространства, гомотетии. Аффинные преобразования. Родство. *Компьютерная визуализация движений, подобий и аффинных преобразований*. Использование геометрических преобразований при решении задач, *в том числе с применением компьютерно-ориентированной методики.*

ПЯТЫЙ МОДУЛЬ (Проективная геометрия). Центральное проектирование, его инварианты. Проективная плоскость, однородные координаты, теорема Дезарга, *решение задач элементарной геометрии на применение теоремы Дезарга с использованием систем динамической геометрии.* Проективные преобразования, инварианты преобразований. Гомология. *Решение конструктивных задач на построение одной линейкой в системе динамической геометрии.* Линии второго порядка, полюс и поляра. Линейная перспектива. Теоретико-групповой подход к классификации геометрий. Эрлангенская программа Ф. Клейна.

ШЕСТОЙ МОДУЛЬ (Основания геометрии). «Начала» Евклида. Проблема пятого постулата. Аксиоматический метод построения геометрии, требования к системе аксиом. *Методы механического доказательства геометрических утверждений*. Система аксиом Гильберта. Система аксиом Вейля. Системы аксиом, используемые в школьном курсе геометрии. Неевклидовы пространства. Геометрия Лобачевского. Модели плоскости Лобачевского. Аффинное n-мерное пространство. Евклидово n-мерное пространство. *Методы компьютерного моделирования многомерных геометрических объектов*.

Проверим полученное содержание на соответствие критериям отбора.

Критерии отбора содержания. Особенности, состав и структура содержания учебного предмета находят свое выражение в учебных программах, которые, в свою очередь, определяют характер и содержание образования на уровне учебного материала.

Принципы и методы отбора и построения содержания обучения в вузе на общетеоретическом уровне исследованы в ряде работ: [24], [25], [35], [64], [73], [192] и других. Так, В.И. Загвязинский и Л.И. Гриценко выделяют:

– общие принципы соотношения науки и учебного предмета: принцип изоморфности содержания дисциплины содержанию соответствующей науки, принцип минимизации в отборе содержания науки для учебной деятельности;

– принципы построения оптимальной структуры учебного предмета: исторический (соответствие логике развития науки), логический (соответствие логике построения современной науки), принцип развертывания содержания учебного предмета соответственно закономерностям формирования познавательных возможностей субъекта учения;

– требования к учебным программам:

1) в программе должна быть отобрана система знаний, включающая такие виды, как основные понятия и теоремы, без которых нельзя понять ни один элемент знаний, основные законы науки, научные теории и т.д.;

2) отражена глубина изучения знаний;

3) содержание программы в целом должно носить развивающий характер;

4) содержание образования должно иметь воспитательную ценность [73].

В диссертации А.Г. Мордковича применительно к математике сформулированы критерии профессионально-педагогического подхода к составлению программ математических курсов педвузов:

– *критерий соответствия целям обучения*, который, по словам автора, выражает достаточно очевидное условие соответствия учебного предмета целям математической подготовки будущего учителя математики. Отсюда следует необходимость явного присутствия в программе элементов методологии, историзма, пропедевтики, алгоритмичности, математического моделирования. Необходимо также наличие в программе элементарного введения в курс, которое имеет характер постановки задач и мотивировки построения курса, перспектив его изучения;

– *критерий дидактической изоморфности*, который означает, что основные структурные элементы и смысловые единицы соответствующей области математики переходят в учебный предмет с переосмыслением в дидактическом плане;

– *критерий минимизации*, означающий необходимость тщательного отбора минимума информации [163].

В своей монографии «Методическая система обучения алгебре и теории чисел» Г.Г. Хамов, сохранив все три критерия А.Г. Мордковича, добавил к ним еще пять принципов (критериев): *дидактический*, *интегративности,* *профессионально-педагогический*, *единства содержания обучения* и *перспективности* [211].

В результате он получил восемь принципов (критериев) отбора содержания.

Принцип *соответствия целям обучения.* Содержание математического курса должно обеспечить формирование научного мировоззрения и математической культуры у студентов, воспитать у них устойчивый интерес к математике, развить математические способности и интуицию, а также обеспечить необходимый объем математических знаний, умений и навыков, который гарантировал бы учителю владение научным фундаментом школьного курса. Кроме того, содержание курса должно способствовать формированию методической культуры будущего учителя; обеспечить достаточный опыт математической деятельности, включая и умение преобразовывать научный материал в учебный.

Принцип *дидактической изоморфности*. В соответствии с этим принципом основные структурные элементы и смысловые единицы соответствующей области математики должны переходить в учебную дисциплину дидактически переосмысленными.

Принцип *интегративности*. Математические курсы в педвузе должны обеспечить плавность перехода от школьного уровня строгости изложения материала к вузовскому, используя промежуточный, если возможно, элементарный уровень, но более строгий, чем в школе.

Дидактический принцип. Содержание математического курса должно быть педагогически обосновано, т.е. удовлетворять общедидактическим принципам.

В соответствии с общедидактическим принципом научности при отборе содержания в структуру курса следует включать вопросы, определяющие сущность соответствующей науки, пути её развития. В соответствии с принципом доступности степень научно-теоретической сложности учебного материала, строгость его изложения должна определяться с учетом психологических особенностей студентов, уровня их развития. Принцип систематичности и последовательности предполагает, что содержание знаний будет располагаться в строгой логической последовательности, где последующий учебный материал логически связан с предыдущим, опирается на него и готовит к усвоению нового. Принцип связи теории и практики предполагает, что содержание обучения должно осуществлять профессиональную ориентацию студентов.

Наконец, принцип прочности требует выделения в содержании обучения материала, подлежащего наиболее прочному усвоению. Кроме того, общепедагогические принципы учитывают необходимость использования воспитательных возможностей предмета.

Профессионально-педагогический принцип. В соответствии с этим принципом содержание математических курсов педагогических вузов должно соответствовать концепции ППНО.

Принцип *единства содержания обучения*. В соответствии с ним содержание обучения отдельных учебных предметов в совокупности должно обеспечить формирование в сознании будущего учителя целостной научной картины, служащей научной основой его последующей педагогической деятельности.

Принцип *перспективности*. В содержание обучения следует включать не только те разделы математики, которые важны сейчас, но и те, что, предположительно, будут развиваться в ближайшем будущем или смогут стать основой будущих разделов науки.

Принцип *минимизации*. Нельзя увеличивать объем учебной дисциплины за счет второстепенной информации, перегружать материал деталями, не имеющими принципиального значения.

По поводу таких дополнений заметим, что в нашей работе принципы дидактики учтены при переработке основных структурных элементов и смысловых единиц соответствующей области математики в учебную дисциплину, а потому *дидактический* принцип Г.Г. Хамова перекрывается критерием *дидактической изоморфности* А.Г. Мордковича.

Кроме того, мы посчитали необходимым несколько изменить трактовку принципа минимизации, включив в него требование соответствия объёма учебного материала времени, выделяемому на его изучение (см. параграф 2.3), а также потребовали, чтобы содержание не выходило за рамки поставленных целей образования.

Наконец, мы посчитали необходимым к рассмотренным выше принципам добавить критерий учета средств обучения, в соответствии с которым при определении содержания обучения следует учитывать изменения в средствах обучения.

Сформулируем теперь критерии, которыми мы пользуемся в данной работе.

Критерий *соответствия целям обучения*. Содержание геометрического курса должно обеспечить формирование научного мировоззрения и математической культуры студентов, воспитать у них устойчивый интерес к геометрии, развить математические способности и интуицию. Оно также должно обеспечить студентам необходимый объем геометрических знаний, умений и навыков, который гарантировал бы учителю владение научным фундаментом школьного курса. Кроме того, содержание геометрического курса должно способствовать формированию методической культуры будущего учителя; обеспечить достаточный опыт педагогической деятельности и, прежде всего, умение преобразовывать научный материал в учебный.

Критерий *дидактической изоморфности*. В соответствии с этим критерием основные структурные элементы и смысловые единицы соответствующей области математики должны переходить в учебную дисциплину дидактически переосмысленными, т.е. удовлетворять общедидактическим принципам.

В частности, принцип научности предполагает, что при отборе содержания в структуру курса будут включены вопросы, определяющие сущность геометрической науки, пути её развития. Принцип доступности – степень научно-теоретической сложности учебного материала, строгость его изложения будут определяться с учетом психологических особенностей студентов, уровня их развития. Принцип систематичности и последовательности – содержание знаний будет располагаться в строгой логической последовательности, где последующий учебный материал логически связан с предыдущим, опирается на него и готовит к усвоению нового. Принцип связи теории и практики, помимо традиционного толкования, предполагает, что содержание обучения должно осуществлять профессиональную ориентацию студентов. Наконец, принцип прочности требует выделения в содержании обучения материала, подлежащего наиболее прочному запоминанию. Кроме того, общепедагогические принципы при отборе содержания учитывают необходимость использования воспитательных возможностей предмета.

Профессионально-педагогический критерий. В соответствии с ним содержание курса геометрии в педагогическом вузе должно соответствовать концепции ППНО, её четырем принципам: фундаментальности, бинарности, ведущей идеи и непрерывности.

Критерий *преемственности* (интегративности по Г.Г. Хамову)**.** Математические курсы в педвузе должны обеспечить плавность перехода от школьного уровня строгости изложения материала к вузовскому, используя промежуточный, если возможно, элементарный уровень, но более строгий, чем в школе.

Критерий *единства содержания обучения***.** Содержание обучения отдельных учебных предметов в совокупности должно обеспечить формирование в сознании будущего учителя целостной научной картины, служащей научной основой его последующей педагогической деятельности.

Критерий *перспективности***.** В соответствии с этим критерием в содержание обучения следует включать не только те разделы математики, которые важны сейчас, но и те, относительно которых есть основание думать, что они будут развиваться в ближайшем будущем или смогут стать основой будущих разделов науки.

Критерий *минимизации*. Объём учебного материала должен соответствовать времени, выделяемому на его изучение, а содержание не должно включать вопросы, не соответствующие сформулированным целям образования.

Критерий *учета средств обучения*. В соответствии с ним при определении содержания обучения следует учитывать изменения в средствах обучения, в том числе наличие учебников, учебных пособий и компьютерных средств.

Проверка соответствия содержания принятым критериям. Это содержание мы теперь проанализируем с точки зрения соответствия рассмотренным выше критериям отбора содержания методической системы.

Критерий *соответствия целям обучения.* Предлагаемое содержание геометрического курса охватывает все основные направления геометрической науки. Естественно, что при этом не ставилось целью сохранить и свойственные ей пропорции. Это противоречило бы дидактическому принципу доступности, а также важнейшим принципам ППНО – принципу ведущей идеи и принципу бинарности. Включение же в этот курс информационных технологий приближает используемые в нем методы к тем, которые в последние годы стали применяться в геометрической науке.

Повышению интереса к геометрии, развитию математических способностей и интуиции будут способствовать:

– включение в основной курс вопросов элементарной математики и их использование в творческих учебных проектах;

– профессионально-педагогическая направленность содержания курса;

– использование компьютеров в целях визуализации геометрических абстракций;

– усиление наглядности;

– использование компьютера в качестве средства экспериментирования.

Предлагаемое содержание геометрического курса после включения в него вопросов элементарной геометрии и увязки этих вопросов с соответствующими разделами высшей геометрии, обеспечивая будущим учителям необходимый объем геометрических знаний, умений и навыков, гарантирует тем самым владение научным фундаментом школьного курса. Кроме того, включение в основной курс вопросов элементарной геометрии, в условиях реализации принципов ППНО при надлежащем их использовании будет способствовать формированию методической культуры будущего учителя; обеспечит определенный опыт педагогической деятельности. Процесс увязки вопросов школьной геометрии с высшей будет формировать умения, связанные с преобразованием научного материала в учебный.

Критерий *дидактической изоморфности*. В соответствии с ним основные структурные элементы и смысловые единицы геометрии как области математической науки, включены в учебную дисциплину дидактически переосмысленными.

В частности, выполнение принципа научности обеспечивается тем, что при отборе содержания в структуру курса включаются вопросы, определяющие сущность геометрической науки, пути её развития, например, вопросы механического доказательства геометрических утверждений, методы компьютерного моделирования многомерных объектов. Естественно, что при этом невозможно соблюсти сложившиеся в науке пропорции между отдельными её разделами и направлениями. Этому мешают другие принципы и критерии, например, принцип доступности, профессионально-педагогический критерий и т.д.

Выполнение принципа доступности обеспечивается прежде всего коррекцией объёма материала и учебного времени, выделяемого на изучение отдельных разделов геометрической науки с учетом их научно-теоретической сложности, с одной стороны, и психологических особенностей студентов, уровня их развития – с другой. Такие вопросы, как топологические свойства фигур, многомерная геометрия и некоторые другие рассматриваются лишь обзорно. Естественно, что при этом учитываются потребности профессионально-педагогической подготовки будущих учителей математики. Именно поэтому, а не из-за желания обеспечить доступность материала, так много внимания в курсе уделяется вопросам, составляющим научный фундамент школьного курса геометрии.

В ряде случаев доступность обеспечивается моделированием на экране компьютера геометрических преобразований, моделей неевклидовых плоскостей, многомерных объектов.

Выполнение принципа систематичности и последовательности обеспечивается тем, что содержание знаний располагается в строго логической последовательности – последующий учебный материал логически связан с предыдущим, опирается на него и готовит к усвоению нового. Прежде всего это обеспечивается включением вопросов элементарной математики и преимущественным расположением их в первоначальных разделах курса. Этой же цели подчинено и то, что принятые в школьном курсе геометрии синтетические и конструктивные методы предшествуют аналитическим. Это же относится и к распределению в структуре содержания вопросов, касающихся использования информационных технологий, например, геометрическое моделирование, использующее векторный и аналитический методы, следует после того, как студенты познакомятся с пакетами общего назначения.

Выполнению принципа сознательности и активности, помимо использования традиционных методов и форм, содействует применение информационных технологий. Здесь мы имеем в виду возможности пошаговой визуализации геометрических построений, формирование правильного представления о связи между аналитическими фактами и их наглядным выражением, а также использование компьютера как средства поискового эксперимента и моделирования.

Выполнение принципа связи теории и практики обеспечивается, во-первых, тем, что во всех разделах, включенных в содержание учебного курса, особенно разделах, непосредственно касающихся школьного курса, теоретические вопросы сопровождаются большим количеством решаемых задач. Во-вторых, системой прикладных задач, включая те, в которых требуется получить на экране компьютера определенное изображение. Наконец, и это особенно важно, содержание обучения рассчитано на то, чтобы осуществлять профессиональную ориентацию студентов. Достигается это, с одной стороны, включением в содержание основного курса вопросов элементарной геометрии и их увязкой с основным геометрическим курсом, а, с другой – применением в нем информационных технологий, используемых в условиях школы.

Наконец, реализации принципа прочности будет содействовать систематическое использование изученных фактов при решении задач, главным образом творческого характера, опорных, базовых и комплексных учебных проектов, прямо или косвенно связанных с визуализацией геометрических абстракций, а также создание и работа с базой данных по изучаемому курсу.

Профессионально-педагогический критерий. В соответствии с этим принципом в содержание методической системы и программу основного курса включены вопросы школьной геометрии и применяемые там методы и технологии, включая системы динамической геометрии, входящие в школьный комплект цифровых образовательных ресурсов (ЦОР).

Естественно, что значительная часть этих вопросов включена в программу первого курса, например, метрические соотношения, классические теоремы о треугольниках и окружностях, площади и объёмы. Однако в целях реализации принципа непрерывности концепции ППНО подобные вопросы включены и в программу старших курсов, это – изображения фигур при параллельном проектировании, правильные многогранники, движения, подобия и гомотетии, системы аксиом школьного курса геометрии. Учитывая, что в школе приоритетны синтетические методы, в вузовском курсе геометрии этим методам уделяется больше внимание, чем обычно. Определенную роль в реализации этого критерия играют информационные технологии, например, среди пакетов общего назначения и пакетов, ориентированных на геометрию, используются такие, как Живая геометрия, GeoGebra и графические редакторы, среди языков высокого уровня предпочтение отдаётся языку Бейсик, имеющему наибольшее применение в школе.

Критерий *преемственности*. И в этом случае решающую роль играет включение в основной курс геометрии школьного материала и соответствующих ему методов рассуждений и доказательств, что позволяет (и облегчает) реализовать плавный переход от школьного содержания и уровня строгости изложения материала к вузовскому, используя промежуточный, если возможно, элементарный, но более строгий, чем в школе уровень. Для того чтобы рассмотрение школьного материала не превратилось в механическое, а следовательно, скучное повторение пройденного, в программу включены обобщающие вопросы, а также частные вопросы элементарной геометрии, не рассматриваемые в школе. Так, при рассмотрении теорем метрической геометрии предусматривается доказательство теоремы Анищенко о двух синусах, а также Птолемея, Чевы и Менелая, помимо выводимых в школе площадей многоугольников, доказывается теорема Брахмагупты о площади четырёхугольника, вписанного в окружность. Применение компьютера на первом курсе позволяет «оживить» повторение вопросов школьной геометрии, например, визуализировать описанную и вписанную окружности, замечательные точки динамически изменяющегося треугольника и т. д.

Критерий *единства содержания обучения*. При широком толковании этого критерия обучение геометрии должно содействовать формированию научного представления об евклидовом пространстве и его свойствах, что обеспечивается всем курсом в целом. Вопрос о соответствии евклидового пространства реальному физическому пространству рассматривается в курсе физики и частично в курсе геометрии при знакомстве с неевклидовыми геометриями.

Роль геометрии при изучении других математических дисциплин многообразна. Прежде всего она определяется возможностью геометрической интерпретации различных аналитических соотношений. Например, в курсе анализа – это умение изобразить тело при вычислении его объема или нахождении центра тяжести. В курсе алгебры – геометрическая интерпретация систем линейных уравнений. Включение в содержание предлагаемой методической системы информационных технологий, направленных на визуализацию аналитических фактов, содействует реализации этого критерия. Использованию геометрических знаний за пределами чисто геометрического курса будет способствовать основательное повторение школьного материала на первом курсе. В то же время сдвиг изучения аналитической геометрии на второй-третий семестры снимает часто возникающие проблемы с обеспечением курса геометрии необходимыми знаниями по линейной алгебре.

Формированию целостного представления о математике содействовало бы использование компьютерных технологий и в других математических курсах.

Критерий *перспективности* имеет самое прямое отношение к содержанию предлагаемой нами методической системы, являясь в определенном смысле оправданием её существования, ибо есть все основания думать, что информационные технологии, вне зависимости от нашего к ним отношения, будут развиваться, и займут достойное место в системе образования. Перспективной является и форма, в которой эти технологии реализуются, а именно использование компьютера как средства познания.

Критерий *минимизации*. Система предусматривает соответствие объёма учебного материала времени, выделяемому на его изучение (см. параграф 2.3). В содержание не включены вопросы, выходящие за рамки сформулированных целей образования.

Критерий *учета средств обучения*. Всё содержание построено в соответствии с изменившимися условиями обучения и рассчитано на активное использование компьютерных средств обучения.

В заключение рассмотрим связь содержания обучения с разработанными нами принципами КПГ (табл. 5).

Таблица 5

Связь содержания обучения с принципами КПГ

		Принципы концепции КПГ					
	Содержание обучения (по модулям)	Адекватности	Визуализации	Использования ИТ как инструментов познания	Самостоятельности в использовании ИТ	Ориентация на школу	Систематичности
1	Геометрия на плоскости	* * *	*	* * *	* *	* * *	*
2	Метод координат	* *	* *	* * *	* *	* * *	* * *
3	Геометрия в пространстве	* * *	* *	* * *	* * *	* *	* * *
4	Геометрические преобразования	* * *	* *	* *	* *	* * *	* * *
5	Проективная геометрия	* * *	* * *	* * *	* * *	* *	* * *
6	Основания геометрии	* * *	*	* *	* * *	* * *	* *

3.3. Методы обучения

О различных подходах к понятию метода обучения. Как известно, успех обучения зависит не только от правильного определения его целей и содержания, но и от способов достижения целей, т.е. методов обучения. В свою очередь, любой метод предполагает поставленную цель, соответствующую ей деятельность (систему действий), необходимые средства, процесс изменения объекта, результат применения метода. Естественно, что проблема методов обучения остаётся одной из актуальных проблем в теории и практике обучения. От её решения, от выбора методов обучения во многом зависит успешность учебного процесса.

В педагогической литературе существует несколько определений понятия «метод обучения». Так, например, И.Я. Лернер и М.Н. Скаткин определяют метод обучения как способ организации познавательной деятельности учащихся [101, 102]. По существу, так же определяет метод обучения и Н.Д. Никандров [165]. А.Н. Алексюк определяет дидактический метод аналогично – как способ организации и управления учителем познавательной деятельностью учащихся [6]. И.Т. Огородников отмечает, что понятие метода включает в себя способы передачи знаний, способы приобретения знаний, умений и навыков и способы руководства познавательной деятельностью учащихся. В соответствии с этим он выделяет методы обучения, применяемые учителями, и методы обучения, которыми пользуются учащиеся [174]. Е.Я. Голант определяет метод обучения как способ взаимосвязанной деятельности учителя и учащихся, направленной на решение задач обучения [175]. С этих же позиций к трактовке метода обучения подходят Ю.К. Бабанский, В. Оконь, М.И. Махмутов, Р.А. Низамов и многие другие авторы.

При всём многообразии оттенков авторы, определяющие понятие метода обучения, едины в главном: метод обучения – это особый вид познавательной деятельности, в которой участвуют и обучающие и обучаемые; комплекс взаимосвязанных способов преподавания и учения, руководящая роль в котором принадлежит педагогу. По мнению Л.В. Шкериной, описанные выше подходы к понятию метода обучения не противоречивы, а лишь дополняют друг друга, т.к. позволяют дать трактовку метода обучения, в большей мере отражающую дидактические процессы [221]. На основании этих подходов метод характеризуется, с одной стороны, как способ познания, усвоения учебного материала и учебно-познавательной деятельности учащихся, а с другой – как способ передачи этих знаний, умений и навыков и способ организации управления этой деятельностью.

Более существенны расхождения в вопросах *классификации* методов обучения, их подразделяют:

– по источникам знаний: словесные методы, наглядные, практические (Е.Я. Голант);

– по этапам обучения: методы приобретения знаний, творческой деятельности, закрепления, проверки знаний, умений и навыков (М.А. Данилов, Б.П. Есипов);

– по характеру деятельности и степени самостоятельности и творчества: объяснительно-иллюстративные, репродуктивные, проблемного изложения, частично-поисковые, исследовательские (М.Н. Скаткин, И.Я. Лернер);

– по отношению обучающих и обучающихся к источникам передачи и приобретения знаний: словесные методы, методы работы с книгой, наблюдения, эксперимент, упражнения и практические работы (И.Т. Огородников);

– на основе сочетания метода преподавания с соответствующим методом учения: информационно-обобщающие и исполнительские, объяснительные и репродуктивные, инструктивно-практические и продуктивно-практические; объяснительно-побуждающие и частично-поисковые; побуждающие и поисковые (М.И. Махмутов).

Существуют и другие классификации методов обучения, в которых сочетаются две, три и даже четыре их стороны.

Среди причин, стимулирующих разработку и внедрение новых методов, важную роль играют изменения, происходящие не только в целях и содержании образования, но и в его средствах. Это обстоятельство отчетливо проявилось в последние десятилетия, с появлением ЭВМ. Несмотря на то, что первоначально они создавались совсем не для решения проблем образования, оказалось, что их применение может оказать большую помощь в обучении. В свою очередь, использование компьютеров в образовании потребовало разработки новых специфических методов, облегчающих достижение целей образования.

В связи с этим рассмотрим, в какой мере концепция КПГ увеличивает возможности использования продуктивных методов познавательной деятельности. С этой целью еще раз обратимся к пяти, введенным И.Я. Лернером и М.Н. Скаткиным, группам методов и достигаемым с их помощью пяти уровням познавательной деятельности обучаемых. Поднимаясь по этим ступеням, студенты шаг за шагом продвигаются от простейших форм репродуктивной познавательной деятельности к самым развитым формам продуктивного познания. При этом, говоря об уровне познавательной деятельности, мы будем иметь в виду не уровень развития обучаемого, а только уровень его знакомства с изучаемым материалом. С одним вопросом студент может быть знаком на уровне частично-поисковой познавательной деятельности, а с другим – лишь на объяснительно-иллюстративном или, как иногда говорят, на информационно-рецептивном уровне. Конечно, на этой основе можно классифицировать и общий уровень развития познавательных способностей обучаемого, а именно, считать его продуктивным, если он хотя бы в одной области достиг этого уровня, но мы будем использовать введенную терминологию в указанном выше смысле.

Сами методы обучения будем относить к той или иной группе в зависимости от того, на какой уровень они поднимают познавательную деятельность студента в рассматриваемой области. Например, частично-поисковому методу ознакомления обучаемых с учебным материалом соответствует частично-поисковый уровень познавательной деятельности.

При этом предполагается, что частично-поисковые методы применяются лишь после того, как учащиеся овладеют материалом на репродуктивном уровне.

1. Группа *объяснительно-иллюстративных,* или, как их еще называют, *информационно-рецептивных,* методов и обеспечиваемый ими уровень усвоения учебного материала.

Как известно, методы этой группы состоят в том, что преподаватель сообщает готовую информацию разными средствами, а студенты воспринимают, осознают и фиксируют её в памяти. Информация подаётся с помощью устного или печатного слова, наглядных средств, практического показа способов деятельности. Учащиеся слушают, смотрят, читают, наблюдают, соотносят новую информацию с ранее усвоенной и запоминают. В задачи объяснительно-иллюстративных методов не входит формирование навыков и умений пользоваться этими знаниями.

Объяснительно-иллюстративные методы составляют основу познавательной деятельности, а часто просто входят важной составной частью в методы других, более высоких уровней. Без рассказа, объяснения, показа, возможности прочесть, посмотреть не обходится ни один процесс обучения, каким бы методом он не осуществлялся. Более того, каждое усовершенствование в методах этой группы благотворно влияет на эффективность методов других групп. В этом отношении, как мы увидим ниже, информационные технологии располагают большими возможностями, ибо позволяют значительно расширить иллюстративную базу любого раздела вузовского курса геометрии.

2. Группа *репродуктивных методов, или методов организации воспроизведения способов деятельности,* и обеспечиваемый ими уровень усвоения учебного материала.

Опираясь на знания, полученные в результате применения объяснительно-иллюстративного метода, преподаватель системой заданий организует деятельность студентов по неоднократному воспроизведению сообщенных им знаний и показанных способов деятельности. При любом сочетании объяснительно-иллюстративного и репродуктивного методов первый принципиально предшествует второму. Так, после демонстрации пошагового построения чертежа от студентов требуется воспроизведение этого процесса на бумаге (репродуктивный уровень) или написание соответствующей компьютерной программы (частично поисковый и даже творческий уровни). Аналогично и при использовании других демонстрационных программ. По мере увеличения объема знаний учащихся возрастает частота применения объяснительно-иллюстративного метода в сочетании с репродуктивными методами.

Объяснительно-иллюстративные и репродуктивные методы обогащают знания, умения и навыки студентов, формируют основные мыслительные операции (анализ, синтез, абстрагирование и т.д.), но не гарантируют развития творческих способностей учащихся, не позволяют планомерно и целенаправленно их формировать. Эта цель достигается другими методами.

3. Метод *проблемного изложения* и обеспечиваемый им уровень усвоения учебного материала.

При проблемном изложении преподаватель, опираясь на знания, полученные объяснительно-иллюстративными и репродуктивными методами, на примере решения специально подобранных познавательных задач показывает студентам образцы научного поиска решения проблемы. В свою очередь, студенты, становясь соучастниками поиска, мысленно следят за логикой рассуждений преподавателя и в результате усваивают этапы решения целостной проблемы. Это важный элемент процесса обучения. Без него трудно реализовать переход на продуктивный уровень познавательной деятельности. Вместе с тем следует заметить, что при обучении математике проблемное изложение учителя, как правило, непосредственно сопровождается продуктивной деятельностью обучаемых и их разделение выглядит несколько искусственным. Мы полностью разделяем мнение Л.В. Шкериной, которая метод проблемного изложения включает в группу частично-поисковых методов. Использование в обучении компьютеров позволяет существенно усилить проблемное изложение, не отделяя его от частично поисковых методов.

4. Группа *частично-поисковых, или эвристических методов,* и обеспечиваемый ими уровень усвоения учебного материала.

Для них характерно использование специально подобранных учебных задач в целях более глубокого проникновения в содержание изучаемой теории. Перед студентами ставятся познавательно-поисковые задачи, специально подобранные педагогом, и организуется активный учебный поиск их решения, который поэтапно контролируется и направляется преподавателем. Рассмотренный в предыдущем пункте метод проблемного изложения как раз и призван помочь студентам в самостоятельном поиске решения таких нестандартных задач.

В результате применения эвристических методов познавательная деятельность студентов в соответствующей области учебного материала переводится на уровень продуктивного усвоения знаний, когда становится возможным применять исследовательские методы.

5. Группа *исследовательских* методов. К этой группе относятся методы самостоятельной поисковой, творческой деятельности учащихся по решению новых для них, но не для общества, проблем. Предъявляя ту или иную из этих проблем для самостоятельного исследования, преподаватель обычно знает её результат, ход решения, обучающие возможности и те черты творческой деятельности, которые студенты должны будут проявить в ходе решения.

Используемые в этой группе методы учебной работы сближаются с методами научного исследования. Им присущи отчетливая мотивация, самостоятельность, творческий характер деятельности, высокая заинтересованность в результатах. После постановки проблемы (лучше, если учащиеся сами её выдвинут), формулирования задач и инструктажа обучаемые самостоятельно работают над литературой, выдвигают гипотезу, ищут пути её решения, осуществляют самоконтроль.

Естественно, что в вузе именно этот уровень познавательной деятельности должен стать основной целью воспитания студентов. Однако отсюда не следует, что другими группами методов можно пренебречь. Только при нормально организованном процессе обучения, когда студент, усваивая учебный материал, шаг за шагом проходит все рассмотренные уровни познания, можно рассчитывать на то, что он сможет вести успешную исследовательскую работу. Недостаточное внимание к репродуктивным методам, пробелы в наглядных представлениях, отсутствие твердых навыков в решении стандартных задач, как правило, приводят к серьезным трудностям в организации исследовательской деятельности студентов.

Существует огромное количество различных частных методов, входящих в одну или сразу несколько из рассмотренных выше общих групп. Так, например Г.Г. Хамов, в своей монографии, посвященной построению методической системы обучения алгебре и теории чисел рассматривает 15 таких методов [211]. В том числе: усиление мотивационной основы учебной деятельности; всестороннее изложение материала; выделение базисного материала с концентрацией учебного материала темы вокруг базисного; пропедевтика вводимых понятий и нового материала; создание проблемных ситуаций; составление и применение алгоритмов; математическое моделирование; обучение студентов принципам дидактики путём осуществления процесса обучения на основе этих принципов и акцентирования внимания на использовании того или иного принципа при изложении материала; использование элементов историзма; анализа изложения соответствующих вопросов в школьных учебниках; осуществление межпредметных связей.

Даже поверхностный анализ всех таких в некотором смысле традиционных и общедидактических методов показывает, что каждый из них легко адаптируется к преподаванию геометрии. В то же время использование информационных технологий, с одной стороны, расширяет возможности реализации этих методов, а с другой – придаёт им особый колорит. Так, например:

– метод усиления мотивационной основы учебной деятельности. Реализуется включением в основной курс вопросов школьной геометрии. В этом случае мотив профессиональной подготовки становится более отчётливым и действенным. Кроме того, использование компьютера позволяет к группе мотивов подключить такой эмоционально-значимый мотив, как создание виртуальных геометрических образов и т. д.;

– метод всестороннего изложения материала. Использование компьютера позволяет взглянуть на некоторые абстрактные факты как на наглядно-зримые геометрические образы и тем самым подключить «правостороннее мышление»;

– метод выделения базисного материала отчасти реализуется за счёт того, что центральным (базисным) понятием курса является геометрическая фигура, свойства которой пополняются от курса к курсу, в том числе с помощью информационных технологий;

– метод пропедевтики. Помимо традиционных форм, пропедевтика реализуется через систему учебных информационно-ориентированных проектов, в которых предусматриваются задания, предвосхищающие изложение теории;

– метод создания проблемных ситуаций. Использование информационных технологий позволяет существенно увеличить возможности реализации этого метода. Например, визуализируя на экране компьютера ту или иную геометрическую фигуру, можно сформулировать ряд вопросов, требований самостоятельного её получения или её динамических вариантов. Диапазон таких вопросов очень широк – от самых простых, требующих воспроизведения известных им программ, до достаточно сложных, предполагающих построение новых теорий;

– метод математического моделирования. Если признать правомерность существования такого дидактического метода, то заметим, что все используемые нами информационные технологии невозможны без приёмов математического моделирования;

– метод историзма. Реализуется нами в форме кратких исторических экскурсов в отдельные темы курса (в начале курса, в темах «Метод координат», «Геометрические преобразования» и особенно при рассмотрении неевклидовых геометрий) и в форме исторического комментирования отдельных теорем;

– метод осуществления межпредметных связей. Заметим, что помимо традиционных форм реализации этого метода, применение средств алгебры, геометрии и математического анализа, используемых в пакетах общего и специального назначения, придаёт этим дисциплинам своеобразное единство. В свою очередь, пакеты символьной алгебры (Maple, Derive, Reduce и др.) применяются и в алгебре, и в математическом анализе, и в геометрии.

Естественно, что все подобные методы используются в рассматриваемой нами методической системе. Однако особое значение мы придаём методам, непосредственно базирующимся на концепции КПГ. Рассмотрим некоторые из них.

Методы обучения, соответствующие концепции КПГ. Обратимся теперь к конкретным методам использования компьютеров в качестве средства формирования познавательной деятельности будущих учителей математики в процессе их геометрической подготовки.

1. *Метод использования компьютера как инструмента, позволяющего значительно расширить иллюстративную базу вузовского курса геометрии.* Здесь мы имеем в виду использование готовых демонстрационных программ, подготовленных заранее с помощью пакетов

(математических, графических и т. д.), либо написанных преподавателем на языке программирования высокого уровня. К ним относятся не только статические образы геометрических объектов. Более эффективным является показ геометрических объектов в динамике, например, возможность пошагового построения чертежей, иллюстрация процесса изменения геометрических объектов с изменением значений параметров, возможности визуализации сечений различных геометрических тел, а также геометрических преобразований и многое другое.

К этому же методу можно отнести использование программ (готовых), предназначенных для решения геометрических задач на построение (на стадии показа и объяснения).

Разумеется, дело не в обилии картинок. Каждое новое изображение должно что-то объяснять, показывать явление в новом ракурсе, в новой связи. Важно, что компьютер позволяет сформировать правильное представление об объеме изучаемого понятия. Часто именно неправильное, узкое представление об объеме понятия вызывает трудности в решении нестандартных задач.

Очевидно, что метод использования компьютера в качестве инструмента, позволяющего расширить иллюстративную базу вузовского курса геометрии, относится к группе объяснительно-иллюстративных методов.

В большинстве случаев концепция КПГ предусматривает составление студентами компьютерных программ, обеспечивающих визуализацию геометрических абстракций, но это уже другой уровень познавательной учебной деятельности, другая более высокая группа методов.

2. *Метод использования компьютера для формирования алгоритмической культуры студентов.* Известно, какую большую роль в математической деятельности играют алгоритмы. Они организуют познавательный процесс, являются средством достижения результата, формируют у студентов чёткий стиль мышления; их применение

способствует более прочному усвоению материала. Алгоритмы широко применяются в вузовских математических курсах, иногда явно, а иногда нет. Без умения работать по алгоритму трудно решать задачи, даже те, которые изначально могут быть отнесены к творческим. Ведь если у решающего возникает идея провести медиану, то предполагается, что ему известен алгоритм её построения. И это на каждом шагу. Память студента-математика должна содержать огромное число таких коротких алгоритмов, к комбинации которых в конечном счете и сводится решение задачи. Другой вопрос, как найти такую комбинацию, как построить из набора сравнительно коротких алгоритмов цепь, ведущую от данных задачи к её искомым. Однако это уже следующий, более высокий уровень усвоения знаний.

В концепции КПГ алгоритмы играют особую роль. Студенты должны не только овладевать готовыми алгоритмами, но и научиться составлять их. И это тоже другой, более высокий уровень познавательной деятельности. Ведь для того чтобы написать алгоритм, надо решить соответствующую задачу. Поэтому к репродуктивным методам относится только работа с готовыми алгоритмами. Но и этот уровень требует от преподавателей и студентов определенных усилий. Задания такого типа в большом количестве приведены во второй части.

3. *Метод использования компьютера при решении вычислительных задач геометрии.* Известно, что авторы учебников и задачников, как правило, специально подбирают числовые данные таким образом, чтобы «возня» с числами не заслоняла от студентов сам процесс решения задачи. Однако, с одной стороны, систематическое использование специально подобранных «удобных» чисел, придает учебному процессу искусственный характер, а с другой – сам такой подбор возможен только в сравнительно простых задачах и при условии, что процесс решения не предполагает их случайных изменений.

Снять эту проблему можно, используя информационные технологии, которые позволяют переложить все вычисления на машину. То, что при этом приходится писать программу, вряд ли можно рассматривать как дополнительную ненужную нагрузку. Ведь написание такой программы невозможно без тщательно проработанного алгоритма, что само по себе и является общим решением задачи. Запись же алгоритма на соответствующем языке программирования для студентов, обучающихся на математических факультетах и прослушавших курс «Информатика», не должна вызывать особые трудности.

Система вычислительных геометрических задач, решаемых с помощью компьютера, может использоваться при работе на частично-поисковом и на исследовательском уровнях. Это зависит от участия в решении задачи педагога. Сначала такие задачи можно использовать в качестве частично-поискового метода, демонстрируя решение на лекции и практическом занятии, а потом предлагая их решение студентам при активной поддержке и контроле со стороны педагога. При выполнении учебных проектов студенты будут решать их самостоятельно. Во второй части приводятся примеры таких проектов.

4. *Метод использования компьютера при решении задач на визуализацию геометрических объектов.* Известно, что в подавляющем большинстве решаемых в вузовском курсе геометрии задач требуется: доказать тот или иной геометрический факт; построить фигуру; написать уравнение линии, поверхности; выяснить взаимное расположение линий; вычислить длину отрезка или дуги, площадь фигуры, объем тела и т.д. Очень редко подобные задачи, за исключением задач на построение, сопровождаются требованием изобразить соответствующий объект, выяснить особенности его формы и влияние на него параметров. В результате не пополняется в должной мере объем зрительных представлений геометрических объектов и не формируется понимание связи, существующей между аналитическим выражением и

соответствующим образом. Как уже отмечалось, для учителя, преподающего геометрию, это большой недостаток.

Исправить это положение опять-таки может использование информационных технологий.

5. *Метод использования информационных технологий в качестве средства создания творческого, эмоционального отношения к процессу решения задач.* Возможности визуализации, которые предоставляются информационными технологиями, могут быть использованы для создания творческого, эмоционального отношения к процессу решения задач. Так, например, после того как студенты, написав программу, визуализируют изучаемый геометрический объект, им можно предложить внести в это изображение те или иные изменения (вытянуть, сжать, повернуть и т.д.). Для выполнения подобного задания студенты должны понимать роль каждого из параметров уравнений, задающих соответствующий образ. Конечно, аналогичный вопрос можно задать студентам и при традиционном изучении геометрии, не использующем компьютерные технологии, однако убедиться в правильности ответа будет значительно труднее, если, конечно, не заглянуть в ответ или не дождаться реакции преподавателя. При использовании компьютера ситуация совсем иная: студенты всегда могут самостоятельно выяснить, к каким последствиям приводят их действия. Важно и то, что наличие наглядного образа, который в результате ошибочных действий обучаемого может принять причудливую форму, придает решению эмоциональную окраску. Более того, как показывает опыт, наличие образа подталкивает студентов к экспериментированию с ним и на постановку собственных вопросов.

6. *Метод создания и использования баз данных.* Известно, какое большое значение в системе образования имеет хорошо организованная система знаний. Какая-то её часть хранится в памяти студента, другая в конспектах, учебниках, справочниках. От того, как организована эта информация, насколько легко её добыть, зависит успешность обучения.

Компьютер в этом отношении предоставляет большие возможности. Особенно это ощущается при решении задач. Часто трудности в их решении возникают из-за того, что в доступной студенту части информации не оказывается необходимой теоремы или задач, в чём-то аналогичных решаемой. Известны пособия, в которых поиск решения задачи ведется с помощью специально разработанной системы рекомендаций и опорных таблиц, содержащих необходимые для решения сведения.

Мы располагаем некоторым, пока небольшим, опытом построения соответствующих компьютерных баз данных и их использования в практике преподавания геометрии. В основу группировки и организации поиска кладутся используемые в задаче понятия, их свойства и признаки, а также различные комбинации данных или искомых задачи. Простота доступа к информации, содержащейся в базе данных, существенно повышает эффективность её использования.

Опыт работы с такой базой данных подтвердил сам по себе очевидный факт: максимальную пользу от взаимодействия с компьютерной обучающей средой получают разработчики этой среды. Поэтому мы стараемся по возможности раньше привлекать своих студентов к созданию и наполнению базы данных по отдельным геометрическим понятиям, их свойствам и признакам (методики Н.Н. Пономарёвой [179] и Т.Т. Фискович [207]). Участие в создании такой базы данных и её использование при решении задач позволяет более эффективно применять принцип: если понятие задано в условии задачи, то используем его свойства, если надо установить факт существования понятия, то используем его признаки.

К созданию компьютерной базы данных, состоящей из задач школьного курса геометрии и набора различных их решений (методика М.Н. Марюкова [157]) привлекались студенты старших курсов. Эти студенты не только хорошо подготовились к применению данной методики в школьном курсе геометрии, но и более глубоко усвоили основные приёмы решения более сложных задач элементарной геометрии.

Другой формой использования компьютера стала разработка студентами второго и третьего курсов тестовых заданий по различным темам вузовского курса геометрии и заполнение ими компьютерной тестовой оболочки. Итоговая аттестация показала, что студенты этой группы, самостоятельно подбиравшие и решавшие тестовые задания, лучше усвоили соответствующие темы, чем остальные студенты, несмотря на то, что последние неоднократно тестировались с помощью составленных тестов.

7. *Метод использования информационных технологий в качестве средства экспериментирования и моделирования.* В ряде случаев при решении задач и проверке гипотез бывает полезным прибегать к помощи компьютерного экспериментирования и моделирования. С помощью компьютерных моделей можно исследовать влияние параметров на структуру геометрического объекта. Например, выяснить, как на ребрах куба выбрать три точки, чтобы сечение получило требуемый вид. Большие возможности открываются при изучении геометрических преобразований, особенно при их реализации в пошаговом режиме. Большое впечатление производит на студентов реализация на экране дисплея геометрических преобразований. Определенную помощь компьютерное моделирование и экспериментирование может оказать при обучении студентов решению задач элементарной геометрии с использованием геометрических преобразований, особенно если вид преобразования в задаче не указан. Нами разработана специальная программа, помогающая студентам путем компьютерного эксперимента подбирать вид преобразования и осуществлять само решение. Интересное применение может получить компьютерная реализация моделей неевклидовых геометрий.

8. *Метод учебных информационно-ориентированных проектов.* Под учебным информационно-ориентированным проектом по геометрии мы

будем понимать специальное учебное задание по компьютерной реализации некоторой среды, состоящей из сложноорганизованных геометрических объектов, включающее в себя решение задач геометрического характера, составление аналитической и информационной моделей, ввод, обработку и вывод на экран дисплея графической информации. В системе учебных проектов применение компьютерных сред познания реализуется в наиболее полном объеме. Актуальность метода проектов связана с повышением доли самостоятельной работы студентов по приобретению новых знаний и освоению новых средств познания. Потребность в этом формируется у обучаемых в процессе решения практических задач, причём оба процесса протекают одновременно в тесной взаимосвязи.

В зависимости от сложности, самостоятельности исполнения и образовательных целей мы будем различать три вида учебных проектов:

1) *опорные учебные проекты,* несложные по содержанию и небольшие по объёму реализации, выполняемые при активном участии преподавателя, в рамках лабораторных занятий, служащие своеобразной опорой для выполнения более сложных проектов. Возможна как индивидуальная, так и коллективная формы работы над такими проектами;

2) *базовые учебные проекты*, среднего уровня сложности и небольшие по объему реализации, разрабатываемые студентами в течение непродолжительного времени, при консультационной поддержке преподавателя, служащие базой для выполнения реферативных и курсовых работ;

3) *комплексные информационно-ориентированные учебные проекты,* достаточно сложные по содержанию, многоплановые, включающие в себя целый комплекс теоретических исследований по основным математическим дисциплинам и компьютерной графике, предлагаются студентам для выполнения в течение длительного времени. Эти проекты

могут служить основой для выполнения выпускных квалификационных работ или выноситься на государственный экзамен в качестве спецвопроса.

Постепенный переход от опорных проектов к базовым, а затем к комплексным информационно-ориентированным проектам соответствует переходу с частично-поискового уровня познавательной деятельности на исследовательский уровень.

Информационно-ориентированный проект, особенно базовый и комплексный, сам по себе представляет глобальное творческое задание, при выполнении которого всячески поощряется самостоятельное получение студентами знаний вне обязательных учебных занятий. Имея некоторые сведения об объектах и поставленную задачу, студент разрабатывает свой алгоритм решения, ставит эксперименты, моделирует, анализирует, самостоятельно пополняет свои знания в соответствующей области. Таким образом, формируются новые знания более высокого уровня, большей степени обобщённости, то есть строится личностная модель знаний каждого студента.

3.4. Формы обучения

Об особенностях системы организационных форм обучения в условиях реализации концепции КПГ. В современной дидактике существуют несколько подходов к трактовке понятия организационной формы обучения, однако различия между ними не столь заметны, как при определении методов обучения. Во всех случаях речь идет о способах организации учебного процесса с учетом его целей, содержания и методов, а также взаимодействия субъектов и объектов обучения.

Так, например, Б.П. Есипов под организационной формой обучения понимает способ реализации содержания учебной работы, дидактической задачи и методов обучения [170]. Р.А. Низамов определяет организационную форму обучения как способ организации, устройства и проведения учебных занятий [164]. Н.Д. Никандров организационную форму обучения в вузе определяет как способ взаимодействия обучающего и обучаемых, в котором реализуются содержание и методы обучения [165]. Г.Г. Хамов предлагает любую форму учебной работы представлять как цепь управляемых ситуаций, направленных на стимулирование и развитие познавательной и практической активности студента [211]. В современной высшей школе традиционно используется система учебных занятий, включающая в себя лекции, практические и лабораторно-практические занятия, семинары, просеминары, спецсеминары, лабораторные работы, практикумы, курсовые и дипломные работы, производственную практику, самостоятельную работу студентов.

В педагогической литературе предлагаются различные рекомендации по выбору тех или иных форм обучения. В соответствии с ними одним из основных требований, предъявляемых к системе учебных занятий, является требование соответствия формы учебных занятий целям, содержанию и применяемым методам. Обращает на себя внимание то, что в этом ряду требований отсутствует требование соответствия средствам обучения. До недавнего времени, когда основными средствами обучения оставалась книга, конспект, классная доска и мел (в лучшем случае цветной) это было естественным. Однако с момента использования в учебном процессе компьютерной техники и информационных технологий положение существенно изменилось. Теперь планировать организационные формы занятий без учета используемых средств обучения стало уже невозможным.

Так как каждому разделу (каждой локальной порции) содержания соответствует своя цель, свои методы и свои средства, то ему должна соответствовать и своя организационная форма обучения. В одном случае необходимо большее число лекций, в другом – практических и лабораторно-практических занятий, в третьем – лабораторных, а в четвертом – самостоятельной внеаудиторной работы и т.д. В связи с этим необходимо, чтобы у преподавателя была возможность изменять количественное соотношение различных типов учебных занятий в зависимости от специфики материала и целей его изучения.

Система занятий должна создавать условия для реализации дифференцированного подхода в обучении, создания индивидуальных образовательных траекторий и их реализации. Л.В. Шкерина определяет это условие и называет его условием дифференцирующего потенциала системы учебных занятий [221]. Использование информационных технологий в рамках предлагаемой нами концепции значительно усиливает этот потенциал.

Система аудиторных занятий должна быть такой, чтобы в неё входили учебные занятия, позволяющие преподавателю проконтролировать действия студента с комментариями, показать основные способы контроля и создать студентам условия для взаимоконтроля и самоконтроля. Естественно, что и в этом отношении концепция компьютерной поддержки создает особенно благоприятные условия. Здесь мы имеем в виду не только систему контролирующего компьютерного тестирования по отдельным разделам программного материала, но и возможность организации текущего оперативного контроля за усвоением учебного материала, формированием компетенций и овладением студентами соответствующими умениями и навыками не только в сфере репродуктивной, но и продуктивной учебной деятельности. В частности, нами организована система допуска студентов к выполнению индивидуальных учебных проектов. Большое значение в этом отношении играет и система задач, в которых предусмотрена возможность визуализации полученного решения. Замечено, что использование подобных задач формирует у студентов привычку контролировать и критически оценивать получаемые решения.

От системы учебных занятий принято требовать, чтобы она создавала среду, которая ориентировала бы студента на самостоятельную внеаудиторную работу. В условиях реализации концепции КПГ выполнение этого требования создает свои специфические трудности, речь о которых пойдет ниже.

Рассмотрим теперь, какое влияние на основные формы обучения оказывает концепция КПГ.

Как мы уже отмечали выше, активное использование компьютерных средств, при их ограниченности, приводит к тому, что важной организационной формой, в которой реализуется наша концепция, становятся лабораторные занятия и выполняемая самостоятельно в лабораторных условиях работа студентов. Естественно, что в условиях реально протекающего учебного процесса ограничиться этими формами не только невозможно, но и не рационально. Учебное время в дисплейном классе должно быть максимально использовано для работы студента за компьютером. Длительное обсуждение непосредственно на лабораторном занятии теоретических и алгоритмических проблем, связанных с выполнением студентами учебных проектов, представляется непозволительной роскошью, нерациональным использованием компьютерного парка. Следовательно, ограничиваться при реализации концепции КПГ лишь лабораторной формой проведения занятий невозможно. К моменту встречи с персональным компьютером студент должен быть максимально подготовлен к выполнению учебных проектов по геометрии. Поэтому вопросы общего характера, основные теоретические факты и методы, составление и прогонка программ и подпрограмм, предназначенных для решения геометрических задач с демонстрацией соответствующих изображений, сопряжение знаний и умений, полученных в курсах информационного цикла, с сугубо геометрическими проблемами и задачами должны быть рассмотрены, по возможности, на предварительных лекционных, практических и лабораторно-практических занятиях. Большое значение в нашей системе приобретают самостоятельные задания, которые студентами выполняются в лабораториях.

Рассмотрим теперь особенности реализации каждой из основных организационных форм обучения в условиях концепции КПГ.

Реализация организационных форм обучения в условиях концепции КПГ. Рассмотрим особенности реализации основных организационных форм обучения в условиях концепции компьютерной поддержки курса геометрии в педагогическом вузе.

Лекция является главным звеном в системе учебных занятий. В соответствии с концепцией Л.В. Шкериной её основной дидактической целью является формирование ориентировочной основы для учебно-познавательной деятельности будущего учителя математики в процессе математической (геометрической) подготовки в педвузе [221].

О достоинствах и недостатках лекции как формы организации учебной деятельности сказано много и убедительно. При этом, говоря о её недостатках, прежде всего указывают на то, что на лекциях информационный процесс слишком рассеян и однороден, то есть рассчитан на восприятие знаний всеми студентами в равных условиях, что крайне затрудняет организацию дифференцированного подхода. Другим недостатком лекции как организационной формы обучения считается отсутствие оперативной обратной связи, что крайне затрудняет организацию контроля и коррекции учебно-познавательной деятельности студентов. Все попытки преодолеть этот недостаток с помощью информационных технологий до сих пор оказывались слишком трудоемкими и малоэффективными. В связи с этим Л. В. Шкерина рекомендует сместить целевое назначение лекции в плоскость ориентировочного обеспечения. При этом наиболее эффективными становятся вводные и заключительные (обзорные) лекции.

На вводных лекциях происходит знакомство студентов с целью и назначением курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в будущей профессиональной деятельности. Лектор даёт краткую характеристику рекомендуемых учебников и учебных пособий, рассказывает о других видах занятий, которые будут проводиться при изучении данного курса, особенно о занятиях в компьютерном кабинете. Знакомит студентов со своими требованиями и графиком контроля знаний. Такие лекции помогают студенту принять цели дальнейшей перспективы их учебно-познавательной деятельности.

Заключительные (обзорные) лекции читаются по завершению изучения темы или курса. На таких лекциях преподаватель систематизирует полученные знания, анализирует логические связи внутри этого материала и его внешние связи. Рассмотрение материала на таком уровне способствует формированию умений и навыков логического мышления на достаточно высоком уровне, что является необходимым компонентом любой продуктивной деятельности.

На текущих лекциях цели дальнейшей перспективы конкретизируются и из них выделяются цели средней и ближней перспектив. В процессе изложения материала лектор ориентирует студентов на математическую деятельность и закладывает основы формирования профессиональных умений и навыков.

Важным, но не обязательным элементом лекции является постановка проблемы. Как правило, она включает обоснование её актуальности, определение базовых знаний, необходимых для её разрешения. Сама организация исследовательской работы студентов по разрешению поставленной проблемы, сравнение полученных ими результатов с известными фактами; корректировка решения осуществляется на практических и особенно лабораторных занятиях.

Реализация концепции КПГ накладывает на лекционную форму занятий по курсу геометрии определённый отпечаток.

На этих лекциях студентов приходится знакомить с возможностями и проблемами использования конкретных пакетов, систем и языков программирования в курсе геометрии, например, систем динамической геометрии (Живая геометрия, GeoGebra); пакетов трёхмерной графики и анимации (3D-Studio); тестовых оболочек с графическим сопровождением (оболочки В.Н. Хвоща и В.И. Якушевича); систем, используемых для автоматического доказательства геометрических теорем (система Reduce, пакет «Geom» С.П.Царёва-И.А.Соцковой), прикладных программных продуктов, ориентированных на решение многомерных задач.

В лекциях по курсу геометрии должны быть соединены знания, полученные студентами в курсе информатики, с сугубо геометрическим материалом, что не происходит автоматически. Студентам разъясняется, каким образом тот или иной геометрический факт используется в пакетах или реализуется в программах. Например, при изучении методов параллельного проектирования дополнительно к основному материалу рассматривается вычислительный метод и выводятся соответствующие формулы, которые используются во всех программах по компьютерному моделированию стереометрических объектов. При изучении преобразований пространства студентам рассказывается о представлении движений в виде композиции плоскостных отражений, визуализации последних на дисплее. При использовании пакета «Geom» на лекции обсуждаются программы, входящие в его состав, роль метода координат и векторного метода в алгоритмах, лежащих в основе этих программ. Перед выполнением заданий, связанных с созданием динамических эффектов актуализируются знания по анимационным возможностям тех или иных программных сред, полученные студентами в курсе информатики.

При изучении геометрических преобразований в четвертом семестре на лекциях студенты знакомятся с компьютерно-ориентированной методикой решения конструктивных задач, использующих перемещения и подобия плоскости, рассматривается и демонстрируется на дисплее примеры решения таких задач.

Для того чтобы студенты на лабораторных занятиях могли без особых проблем выполнять лабораторные работы и составлять программы, реализующие учебные проекты, на лекциях приходится обсуждать алгоритмы основных подпрограмм, например, подпрограммы нахождения координат точек пересечения двух фигур, подпрограммы, создающие анимационные эффекты, подпрограммы вычисления координат точек при замене системы координат.

В отличие от традиционных лекций в нашей системе широко применяются компьютерные демонстрации, в том числе с использованием аудиовизуальных и мультимедийных средств. При этом мы различаем демонстрационные программы, которые работают по обсуждённым со студентами алгоритмам, и программы, принципы действия которых неизвестны обучаемым. Такие демонстрации иногда используются нами для создания проблемных ситуаций.

Практические занятия. Традиционное предназначение практического занятия – это формирование умений и навыков в применении теоретических знаний в решении различных упражнений, задач и примеров. Концепция профессионально-педагогической направленности обучения вносит в эту трактовку существенные дополнения. Исходя из сформулированных им принципов, А. Г. Мордкович сделал вполне обоснованный вывод о том, что на практических занятиях будущий учитель должен не только сам научиться решать задачи, но и овладеть техникой обучения этому других, понять роль и место задач при обучении математике. Уточняя этот тезис, А.Г. Мордкович выделил следующие пять функций задач в обучении математике будущих учителей: обучающую, развивающую, воспитывающую, контролирующую и методическую. Естественно, что особое значение он придавал специфической для педвуза методической функции задач. Обычно в нее включают: аккуратное и настойчивое выделение четырех этапов процесса решения задачи (осмысление условия, составление плана решения, осуществление плана решения, анализ решения) с особым вниманием к анализу выполненного решения; методическое сопоставление различных способов решения одной и той же задачи; комментарии преподавателя к задаче о её научной и методической ценности; методические комментарии преподавателя ко всей системе упражнений, рассмотренной на данном практическом занятии.

Г.Г. Хамов считает, что в систему задач, предлагаемых студентам, следует включать задания с недостающими и лишними данными и особенно задания исследовательского характера. Важными он считает и задания по самостоятельному составлению задач; задания, имеющие школьную направленность, как по содержанию, так и по методам решения; упражнения на развитие умений по формированию понятий у учащихся в школе [211].

В разработанной нами методической системе процесс решения задач обогащается применением информационных технологий. Последние становятся важным средством исследования задачи и моделирования возникающих в процессе решения ситуаций. Наконец, компьютер позволяет делать наглядными отдельные этапы решения задачи. Так, например, при установлении коллинеарности или компланарности векторов, разложении вектора по базисным векторам и т.д., мы обычно обсуждаем и технику их компьютерной реализации, а само решение дополняем при необходимости составлением компьютерных программ. Набивка и прогонка этих программ осуществляется либо на лабораторном занятии, либо при самостоятельной работе в кабинете информатики во второй половине дня.

При обсуждении конструктивных задач особое внимание обращается на те из них, при решении которых, в рамках учебного проекта, может использоваться компьютерная методика поиска геометрического преобразования. Аналогично при рассмотрении поворота пространства вокруг произвольно расположенной оси вращения обсуждается способ решения задачи о нахождении уравнений двух плоскостей, пересекающихся по заданной прямой и образующих между собой заданный угол.

Лабораторно-практические занятия. К лабораторно-практическим занятиям мы относим те практические занятия, которые проводятся в компьютерном классе с использованием систем динамической геометрии в качестве виртуальной лаборатории. На подобных занятиях рассматриваются преимущественно задачи элементарной геометрии, решения которых особенно выигрышны при условии использования информационных технологий. В первую очередь это относится к задачам с элементами исследования. Именно на таких занятиях у студентов имеется возможность не только решить школьную задачу, применяя элементы компьютерного исследования и эксперимента, но и овладеть навыками организации подобной формы обучения решению геометрических задач в школе. Программные средства, позволяющие на уроках в школе и лабораторно-практических занятиях в педвузе эффективно решать задачи по геометрии с использованием компьютерного исследования и эксперимента, должны удовлетворять следующим четырем требованиям:

- *динамизма*, согласно которому исследуемая геометрическая конфигурация может быть представлена на экране компьютера в виде динамического чертежа, т.е. чертежа, допускающего (по желанию исследователя) многократно повторяемые изменения, сохраняющие иерархию зависимости элементов конфигурации (принадлежность точек прямым или окружностям, параллельность или перпендикулярность прямых, отношение длин параллельных отрезков и т.д.);
- *визуальной полноты*, согласно которому изображение рассматриваемой конфигурации можно сделать максимально полным, т.е. исследователь имеет возможность к изображению данных и искомых фигур оперативно добавить не только необходимые вспомогательные фигуры, но и числовые значения тех геометрических величин, которые

могут оказаться полезными для установления гипотетически предполагаемой зависимости;

- *компьютерной анимации*, согласно которому экспериментатор при необходимости может задать анимацию любого фрагмента исследуемой конфигурации с оставлением следа этого или иного фрагмента конфигурации на экране компьютера;

- *свободы эксперимента*, согласно которому при проведении компьютерного геометрического эксперимента программное средство не должно навязывать исследователю ту или иную идеологию эксперимента [145]. Программные средства этого класса отнесены нами (см. главу I) к инструментам познания.

Системы динамической геометрии «Живая геометрия» и «GeoGebra» удовлетворяют всем перечисленным выше требованиям, позволяют проводить учебные эксперименты и исследования в различных разделах математики, в том числе в элементарной геометрии.

Продемонстрируем применение среды «Живая геометрия» в качестве средства проведения компьютерного эксперимента при решении следующей планиметрической задачи на максимум и минимум.

Задача. Под каким углом к берегу реки нужно направить лодку, чтобы за время переправы через реку ее как можно меньше снесло течением, если скорость течения реки в два раза больше скорости лодки в стоячей воде.

Для проведения компьютерного эксперимента на рабочем поле «Живой геометрии» (рис. 2) в соответствии с условием задачи построим чертеж, на котором изобразим фрагмент реки с параллельными берегами, выберем на одном из них (правом берегу) точку A, от которой лодка будет отправляться на левый берег. Отложим от A векторы $\overrightarrow{AG}$ и $\overrightarrow{AH}$, характеризующие скорости (и направления) течения реки и перемещения лодки в стоячей воде, соответственно. Согласно условию задачи длина первого вектора должна быть в два раза больше длины второго. Построим вектор $\overrightarrow{AF}$ равный сумме векторов $\overrightarrow{AG}$ и $\overrightarrow{AH}$. Данный вектор будет определять результирующие направление и скорость перемещения лодки.

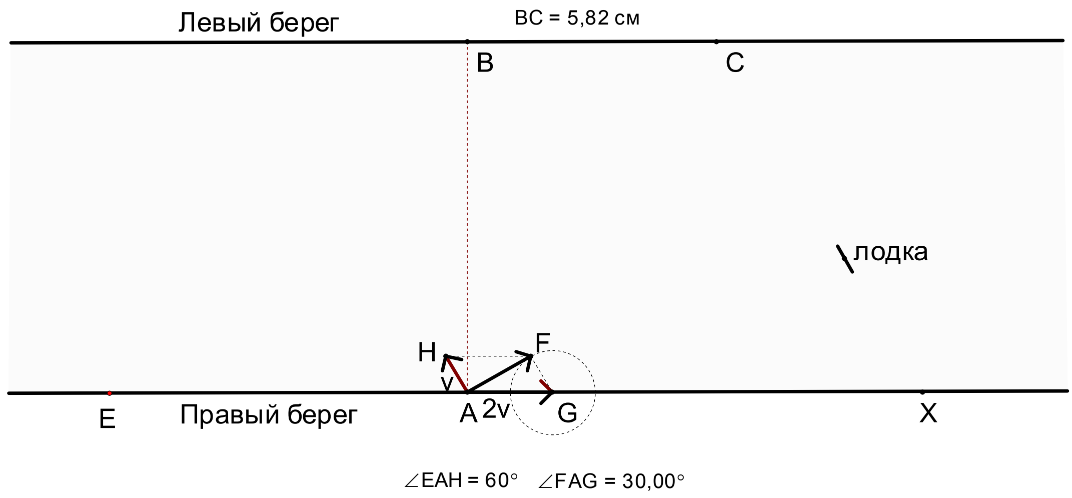


Рис. 2

На правом берегу выберем точку *X*, на противоположном – построим точку *C* такую, что прямая *XC* параллельна $\overrightarrow{AH}$. На отрезке *XC* выберем произвольную точку, назовем ее «лодка». Чтобы изображение лодки имело некоторую линейную протяженность, построим на *XC* небольшой отрезок с серединой в точке «лодка». Используя возможности программного средства, спрячем отрезок *XC*. Построим на левом берегу точку *B*, в которую должна приплыть лодка в случае, если в реке окажется стоячая вода, а направление перемещения лодки – перпендикулярно берегу реки.

Зададим анимацию точки «лодка» по отрезку *XC* с условной скоростью 0,5 (в одну сторону, только 1 раз) и анимацию точки *X* по прямой *EA* (слева направо) со скоростью 1. Перед тем, как приступить к эксперименту выведем на экран величину угла $\angle EAH$. Для измерения величины, на которую сносит лодку, отметим, что если лодка приплывет на противоположный берег, то точка «лодка» совпадет с точкой *C*. Поэтому длина отрезка *BC* после завершения презентации будет представлять собой величину, на которую снесло лодку. В связи с этим выведем на экран расстояние между *B* и *C*.

Приступим к проведению эксперимента. Перемещая мышкой *H*, выберем некоторое направление вектора $\overrightarrow{AH}$. Совместим точки *X* и «лодка» с точкой *A* и запустим анимацию. Лодка начнет перемещаться по направлению вектора $\overrightarrow{AF}$. Величина, на которую снесет лодку, будет зависеть от направления вектора $\overrightarrow{AH}$, которое однозначно определяется величиной угла $\angle EAH$. Нередко неискушенный исследователь считает оптимальным направление перпендикулярное берегам реки (первая рабочая гипотеза). При $\angle EAH = 90^o$ результатом экспериментальной проверки первой рабочей гипотезы для конфигурации, представленной на чертеже, является значение *BC* = 16,47 см. Ошибочное предположение о том, что такой выбор направления перемещения лодки является самым оптимальным, зачастую подкрепляется тем, что исследователь пробует увеличить длину вектора $\overrightarrow{AF}$ (скорость перемещения лодки), выбрав для вектора $\overrightarrow{AH}$ направление «более близкое к направлению течения реки», полагая, например, $\angle EAH$ равным сначала 100º, затем – 110º. Смещение *BC* лодки принимает в этих случаях значения большие, чем при $\angle EAH = 90^o$, а именно 17,95 см и 20,34 см соответственно. Становится понятно, что увеличение результирующей скорости перемещения лодки в реке не влечет за собой уменьшение исследуемого смещения. Это понимание подкрепляется последующими данными эксперимента. При $\angle EAH$ = 80º, *BC* = 15,14 см (первая рабочая гипотеза не получила своего подтверждения), при $\angle EAH$ =70º, *BC*=14,39 см и, наконец, при $\angle EAH$ =60º, *BC*=14,21 см. Дальнейшее уменьшение $\angle EAH$ приводит уже к увеличению смещения (при $\angle EAH$ =50º получаем *BC* = 14,5 см).

В ходе эксперимента к исследователю приходит понимание того, что смещение окажется наименьшим в том случае, когда вектор $\overrightarrow{AF}$, задающий результирующую скорость лодки, будет образовывать возможно больший угол с берегом реки (на рабочее поле можно вывести значение $\angle FAG$). Действительно, в этом случае в прямоугольном треугольнике *ABC* с фиксированным катетом *AB* и переменной вершиной *C* величина острого угла при вершине *A* окажется наименьшей и, следовательно, второй катет *BC* треугольника примет наименьшее значение.

По результатам эксперимента исследователь имеет возможность сформулировать следующую гипотезу.

<u>Гипотеза</u>. Наиболее оптимальное направление движения лодки задает вектор $\overrightarrow{AH}$*, образующий угол 60º с берегом реки.*

Далее компьютерная среда «Живая геометрия» предоставляет исследователю возможность подвергнуть эту гипотезу экспериментальным проверкам: расположить вектор $\overrightarrow{AH}$ так, чтобы он образовывал с берегом реки углы меньшие и большие 60º, выбирать иные расположения точки *A*, задать другую ширину реки и т.д. Задача учителя побуждать учащихся к обязательному теоретическому обоснованию гипотезы, даже той, что выдержала большое число экспериментальных проверок. Учащиеся должны понимать, что поставленную задачу можно считать решенной лишь только в том случае, когда соответствующая гипотеза будет теоретически обоснована.

Опыт использования в обучении геометрии компьютерных исследований показал, что у обучаемых при проведении экспериментов развивается умение наблюдать, получать информацию, сортировать и классифицировать ее, предсказывать и проводить испытания. Экспериментирование с помощью систем динамической геометрии подстегивает здоровый скептицизм, стимулирует учащихся к взаимному анализу работ друг друга, к разделению работы на части и дальнейшему соединению составных частей работы, а также к пониманию того, как формулировать гипотезы и получать решение. Обучение с помощью эксперимента и исследования строится на различиях в способностях учащихся; оно исходит из глубокого уважения к учащемуся как личности; опирается скорее на развитие его сильных сторон, чем на попытку избавиться от слабых.

Насыщение сугубо теоретического курса геометрии компьютерными экспериментами, позволяет превратить его в теоретико-экспериментальный курс. Возможность с помощью среды динамической геометрии открыть новую (для себя) геометрическую закономерность, сформулировать гипотезу и обосновать ее, стимулирует учащихся на лабораторно-практических занятиях к самостоятельному добыванию знаний, что полностью соответствует деятельностному подходу в обучении.

Занятия семинарского типа. В предлагаемой системе, основанной на концепции КПГ, такая форма, как семинары, находит ограниченное применение и используется преимущественно в разделе «Основания геометрии». На них студенты выступают с традиционными докладами (исторический обзор обоснований геометрии, утверждения, эквивалентные пятому постулату, группы аксиом системы аксиом Д. Гильберта, системы аксиом евклидовой геометрии, используемые авторами различных школьных учебников и т.д.). Доклады и выступления студентов сопровождаются демонстрациями на экране монитора.

В последние годы предпринята попытка включить в тематику семинарских занятий задания, формирующие умения и навыки квазипрофессиональной деятельности и профессионально-педагогического общения, теория и содержание которых применительно к курсу математического анализа разработана Л.В. Шкериной [221].

Лабораторные занятия. Лабораторные занятия, представляющие один из видов самостоятельной работы студентов, составляют органическую часть учебно-воспитательного процесса. Их содержание непосредственно связано с другими видами учебного эксперимента – демонстрационными опытами, домашними экспериментальными заданиями, решением задач с применением наблюдений и опытов и др. В традиционной вузовской системе геометрической подготовки учителей математики занятия лабораторного типа применялись редко и сводились главным образом к конструированию и изготовлению многогранников и измерительным работам на местности. С появлением компьютеров роль и значение лабораторных занятий возросли многократно.

В условиях реализации концепции КПГ лабораторные занятия проводятся в компьютерных классах, преимущественно в форме выполнения учебных проектов. Вопрос об учебных проектах уже обсуждался в предыдущем параграфе. Однако там проект рассматривался в качестве метода обучения. Теперь же мы обратимся к нему с точки зрения организационной формы. Из трёх типов учебных проектов (см. параграф 3.3) на лабораторных занятиях рассматриваются, как правило, опорные учебные проекты, число которых колеблется от одного до пяти в зависимости от изучаемого материала и целей занятия.

Каждое занятие должно быть детально продумано, причём не только по содержанию, но и организационно, а методика его проведения доведена до уровня технологии. Преподавателю должно быть известно, какие учебные проекты необходимо рассмотреть, какой материал в связи с этим обсудить на лекции, какой – на практическом занятии, какой – задать для самостоятельного изучения, знать, по крайней мере, один способ реализации учебных проектов, возможные этапы их выполнения.

На первых лабораторных занятиях, как правило, работа ведётся фронтально: выполняется либо один общий, либо несколько близких по содержанию опорных учебных проектов. По мере овладения этой методикой мы всё чаще переходим на индивидуально-групповые задания. Наиболее успешно работающие студенты на старших курсах выполняют базовые и комплексные проекты, которые в отдельных случаях перерастают в курсовые и дипломные работы.

Набор учебных информационно-ориентированных проектов зависит от изучаемой темы, а также от опыта преподавателя. По одной и той же теме могут быть сформулированы проекты разного уровня (опорные, базовые и комплексные). Например, по теме «Сфера» можно предложить в качестве опорных проектов с нарастанием сложности следующие: изображение каркасной модели сферы в виде семейства параллелей; изображение каркасной модели сферы в виде семейства параллелей и меридиан; изображение полигональной модели сферы с удалением невидимых линий; изображение окрашенной полигональной модели сферы. В качестве базовых проектов: изображение окрашенной, произвольно расположенной сферы; изображение окрашенной, произвольно расположенной вращающейся сферы. В качестве комплексных проектов: изображение части сферы, в которой видимая внешняя и внутренняя стороны её поверхности окрашены разными цветами, с сохранением эффекта вращения; изображение системы окрашенных сфер или их частей, вращающихся друг относительно друга с учётом условия заслонения, освещения, в аксонометрии или линейной перспективе.

Выполнение проектов требуют широкого круга знаний и умений: математической теории, программирования, навыков работы с графическими системами, пространственного воображения, чертёжных умений и т.д. Поэтому работа над ними ведётся небольшими группами студентов – своеобразными творческими коллективами, которые формируются на целый семестр. Создание таких коллективов – важный элемент организации работы над проектом. Коллективы формируются нами, как правило, с учётом возможностей и склонностей студентов, а также степени сложности проекта. Преподавателю следует исключить крайности – как принудительное, так и стихийное их формирование. Вначале, организуя коллективы, мы старались учитывать, что одному студенту больше нравится программирование, другому математика, третий студент свободно владеет теми или иными пакетами, четвёртый – хорошо знает черчение и графику и т. д. Однако вскоре заметили, что поручение одним и тем же студентам одних и тех же функциональных обязанностей ведет к «однобокости» в их развитии. Поэтому в дальнейшем отказались от закрепления за студентами постоянных поручений.

Само лабораторное занятие начинается с демонстрации домашних индивидуальных заданий (около 5 минут). После чего проводится групповое тестирование на допуск к выполнению очередного проекта. После распределения проектов для усиления мотивации преподаватель может продемонстрировать на дисплее компьютерную модель аналогичного или даже предлагаемого для выполнения проекта. Затем совместно с каждым из коллективов распределяются обязанности среди его членов; планируются основные этапы, связанные с реализацией проектов; выбираются компьютерные средства решения задачи: языки программирования, математические пакеты, пакеты общего назначения и другие. В процессе работы студентов преподаватель консультирует их. Завершается работа защитой проектов. Защита и оценка проекта осуществляется с участием всей академической студенческой группы (подгруппы), т.к. необходимо всем проанализировать полученные результаты, область применения решённых задач, практическую значимость, отметить успехи и неудачи. В результате обсуждения проектов формируется групповая оценка проделанной работы, которую должен учесть преподаватель при аттестации.

Методика проведения большинства лабораторных работ по геометрии ориентирована на самостоятельное составление студентами программ на одном из языков программирования. Хорошо известно, что их составление, особенно начинающими программистами, представляет собой достаточно длительный процесс, способный отнять много учебного времени. Причём проблемы могут возникнуть не только в связи с неумением вывести необходимую формулу или незнанием необходимого алгоритма или оператора, но и по такой банальной причине, как наличие в программе синтаксической ошибки, обнаружить которую бывает не всегда просто.

Чтобы свести до минимума потерю учебного времени по этим причинам, можно, как мы уже отмечали выше, воспользоваться модульным принципом построения программ. Большинство программ учебного характера по компьютерной визуализации геометрических объектов или абстракций можно представить в виде трёх блоков: блока, содержащего начальные данные; блока, содержащего подпрограммы, иногда их называют модули (неоднократно используемые автономные части всей программы); блока, содержащего рабочую часть программы. Алгоритм выполнения большинства учебных информационно-ориентированных проектов по геометрии строится через обращение к тем модулям, которые отобраны в процессе анализа условия и методов реализации проекта. Иными словами, алгоритм конструируется из готовых модулей, вызов которых происходит с разными данными. Проекты подобраны по принципу «нарастания»: большинство модулей, составленных в процессе выполнения очередного проекта, используются в следующих проектах этого и даже других семестров. В связи с этим представляется разумным каждый модуль с присвоенной ему меткой сохранять на жёстком диске для использования его в тех учебных проектах, где он будет востребован, не тратя время на его составление и отладку.

Предполагается, что работа над учебными проектами проводится не только в режиме лабораторного занятия, но и во внеучебное время.

Дисциплины по выбору обучающимися. Дисциплины по выбору обучающимися в сочетании с факультативными занятиями являются важной формой дифференциации и индивидуализации учебно-познавательной деятельности студентов, позволяющей им в большей мере проявить свои индивидуальные особенности и интересы. В тоже время эти формы учебно-познавательной деятельности расширяют возможности усиления мотивационной основы обучения.

В системе дисциплин по выбору и факультативов мы выделяем два направления. Первое объединяет студентов, желающих углубить свои математические знания. С ними рассматриваются интересные математические задачи, требующие усвоения базовых математических знаний на достаточно высоком уровне. Студенты, посещающие такие курсы, могут быть вовлечены в исследовательскую работу по математике, которая найдёт продолжение в их самостоятельной работе. Они готовят рефераты, доклады и сообщения, с которыми выступают перед своими товарищами на занятиях, на научных студенческих конференциях, на заседаниях математического кружка, а также на факультативах по математике и в кружках перед учащимися школ.

Второе направление в своём составе объединяет студентов, которых в большей степени интересует использование получаемых математических знаний в школьном курсе математики. Студенты, объединяемые этими интересами, в разное время могут быть как наблюдателями процесса изучения математики в школе, так и непосредственными участниками этого процесса. В системе таких занятий расширяются возможности организации квазипрофессиональной деятельности студентов.

Одним из условий успешной реализации концепции КПГ является наличие у студентов возможности углублять свои знания по вопросам использования информационных технологий в геометрии вообще и в школьной геометрии в частности, по компьютерной геометрии, теории конечных геометрических объектов, компьютерной графике и геометрическому моделированию. С элементами этих теорий, дисциплин, технологий и методик студенты знакомятся в основном курсе геометрии. Однако среди студентов всегда находятся такие, которые проявляют повышенный интерес к вопросам, связанным с компьютерным геометрическим моделированием. Удовлетворить их интерес к различным аспектам и тонкостям использования компьютера в изучении геометрии можно в системе дисциплин по выбору.

В Красноярском государственном педагогическом университете им. В.П. Астафьева работа по углублению геометрической подготовки будущих учителей математики средствами информационных технологий проводится, начиная с первого курса, через систему дисциплин по выбору вариативной части профильной подготовки бакалавров педагогического направления, объединенных общим названием «Поликонтекстный модуль – математическое образование». Одна из таких дисциплин – «Компьютерное сопровождение курса геометрии», основная цель обучения которой – формирование систематизированных знаний, умений и компетенций, необходимых для проведения профильных исследований в области компьютерного сопровождения курса геометрии и элективных курсов в основной, общеобразовательной (базовой) и профильной школах.

Общая трудоемкость дисциплины – 14 зачетных единиц (504 ч.), из них аудиторных – 144 часа. Реализация дисциплины связана с соблюдением следующих требований: непрерывность обучения (программа реализуется в течение всего срока обучения в вузе); модульно-рейтинговое обучение; обучение на основе разновозрастных групп студентов (каждый учебный год группа пополняется 2-3 студентами первого курса); включение студентов в реальную среду деятельности учителя математики.

Перечислим названия модулей дисциплины с указанием семестров, в которых они изучаются и числа аудиторных учебных часов: «Компьютерное сопровождение занимательной геометрии» (1 семестр, 18 ч.); «Компьютерное сопровождение планиметрии» (2 семестр, 18 ч.); «Компьютерное сопровождение стереометрии» (3-4 семестры, 36 ч.); «Компьютерное сопровождение решения конкурсных и олимпиадных задач элементарной геометрии» (5-6 семестры, 36 ч.); «Компьютерное сопровождение элективных геометрических курсов» (7-8 семестры, 36 ч.).

Самостоятельная работа. Самостоятельная работа в вузе призвана завершать реализацию целей и задач всех остальных форм занятий.

Рассматривая самостоятельную работу как организационную форму учебной деятельности, мы имеем в виду учебно-познавательную деятельность студентов, осуществляемую во внеучебное время при минимальном участии педагога. Организуется она с помощью соответствующих заданий, необходимых методических рекомендаций, планов работы, учебников и учебных пособий, а также технических средств обучения, в том числе компьютеров. Большое значение придаётся включению в рабочие программы перечня тем и конкретных вопросов, подлежащих самостоятельному изучению. На лекциях, семинарах, практических и особенно лабораторных занятиях студентов необходимо ориентировать на самостоятельную работу как на одну из форм учебно-познавательной деятельности. Результаты самостоятельной работы студентов во многом зависят от того, какие знания, умения и навыки они получили в процессе учебно-познавательной деятельности на лекции, семинаре, практическом и лабораторном занятии. С другой стороны, успех лекции, семинара, практического и лабораторного занятия во многом зависит от того, насколько предыдущий материал был закреплён и усвоен в самостоятельной работе. Поэтому самостоятельная работа как форма учебной деятельности играет существенную роль в организации учебно-познавательной деятельности студентов.

Однако это не единственное назначение самостоятельной работы в вузе. В процессе самостоятельной работы студенты должны не только закреплять полученные знания, но и овладевать новыми. Этой цели служит, например, выполнение рассмотренных выше творческих учебных проектов. Более того, как пишет Г.Г. Хамов: «За время обучения в вузе у студента необходимо сформировать стойкую потребность к *самостоятельному изучению научной, учебной и методической литературы*» [211]. Для реализации этих целей студент должен быть поставлен в ситуацию необходимости собственной познавательной деятельности.

Существует несколько систем классификаций видов самостоятельной работы. Например, П.И. Пидкасистый в основу классификации положил четыре уровня самостоятельности в познавательной деятельности обучаемых.

1. Воспроизводящие самостоятельные работы по образцу (тренировочные). Работы этого типа выполняются на основе образца, известного алгоритма. Познавательная самостоятельность студента проявляется в узнавании, осмыслении, запоминании, подведении известного метода решения под новую задачу.

2. Реконструктивно-вариативные самостоятельные работы. При их выполнении действия обучаемого протекают в плане реконструирования, преобразования структуры учебного материала, имеющегося опыта решения задач, а познавательная активность и самостоятельность студента не выходит за рамки элементарного обучения.

3. Эвристические самостоятельные работы. Работы такого типа содержат познавательные задачи, требующие от студента анализа незнакомой ему проблемной ситуации и получения необходимой новой информации. При выполнении работ эвристического типа познавательная активность и самостоятельность студента выражается в проводимых им обобщениях при анализе проблемной ситуации и нахождении способа решения задачи.

4. Творческие (исследовательские) самостоятельные работы. Предполагают непосредственное участие студента в производстве новых для него знаний, доказательстве неизвестных ему теорем. Студент должен при этом самостоятельно осуществлять выбор средств и методов решения стоящих перед ним задач, определить и отобрать необходимые для выполнения задания знания. Характерным признаком этого типа работ являются творческий поиск, нахождение незнакомых студенту способов решения задач, открытие новых для себя знаний.

Все эти виды самостоятельной работы присутствуют в нашей системе. Однако в рамках действия концепции КПГ каждая из них имеет свои особенности. В частности, как было отмечено выше, работа над учебными проектами проводится не только в режиме лабораторного занятия, но и в форме самостоятельной работы. Это касается не только базовых и комплексных учебных проектов, которые проводятся в основном во внеучебное время, но и части незавершённых опорных проектов. Возможность работы во внеучебное время в компьютерном кабинете определяется и открытостью системы обучения: студенты должны знать формулировки всех проектов, которые им предстоит выполнить на всех лабораторных занятиях в текущем семестре, и иметь возможность заранее подготовиться к каждой лабораторной работе. В частности, выяснить, какие из составленных ранее модулей могут понадобиться при выполнении очередного проекта или задания, а какие необходимо составить дополнительно. Студенты должны иметь возможность найти в библиотеке подпрограмм все необходимые из ранее созданных модулей или составить и отладить новые. Наконец, в режиме внеучебной самостоятельной работы студенты выполняют отдельные задания преподавателя, курсовые и дипломные работы, требующие применения компьютера. Для реализации этой формы обучения необходим свободный доступ в компьютерный кабинет во внеучебное время.

Важным элементом в организации и управлении самостоятельной работы является текущий контроль за ней. В наших условиях применяются разные формы такого контроля. В последние годы особое значение приобретает компьютерное тестирование, в том числе организация упоминавшегося выше допуска к лабораторным работам. Важно, чтобы текущий контроль содействовал формированию навыков самоконтроля. В определённое время студент может прийти в кабинет и проверить себя на готовность выполнить заданный тест. В зависимости от результатов студент может корректировать свою учебно-познавательную деятельность.

Государственный экзамен и выпускная квалификационная работа. Реализуемая нами концепция КПГ накладывает определённый отпечаток на организацию ГЭК и ГАК. Основные принципы, которые мы считаем необходимым при этом реализовать, заключаются в следующем:

1. В государственный экзамен мы не включаем вопросы, связанные с применением информационных технологий в геометрии, ибо считаем, что использование компьютера в нашей системе прежде всего должно содействовать лучшему пониманию самого геометрического курса, поскольку на это нацелено большинство принципов концепции компьютерной поддержки. Реализация остальных принципов влияет на общее мировоззрение и методические установки обучаемых.

2. Иначе обстоит дело с выпускной квалификационной работой. Ряд выпускников, специализирующихся по кафедре алгебры, геометрии и методики их преподавания, выполняют эти работы с широким использованием информационных технологий, в том числе и по школьной тематике.

Мы полностью разделяем мнение Г.Г. Хамова о том, что госэкзамен по математике должен выявить готовность выпускников к работе в качестве учителя математики. Поэтому программа экзамена должна предусматривать возможности проверки следующих моментов: обладает ли выпускник достаточным для работы в школе уровнем математической подготовки, самостоятельностью суждений, неформальным владением материалом, умением применять теорию на практике, сформировано ли математическое мышление выпускника. В связи с этим мы считаем, что программа ГЭК должна включать в себя материал, имеющий профессионально-педагогическое значение для будущей работы выпускника. Для усиления продуктивной составляющей госаттестации было бы целесообразно по примеру ряда вузов заменить теоретические вопросы решением задач, проверяющих теорию. К тому же решением задач проверяются многие весьма важные качества будущего учителя математики.

В выпускных квалификационных работах мы не склонны жёстко регламентировать их структуру, ибо считаем, что в них должны проверяться творческие способности будущих учителей.

3.5. Средства обучения

В методических системах средства обучения подчиняются прежде всего целям и содержанию, соответствуют методам и формам обучения. Поэтому им обычно отводится второстепенная, вспомогательная роль. В разрабатываемой нами системе роль средств обучения многократно возрастает. Именно с появлением компьютеров и информационных технологий стала возможной постановка таких дидактических целей, которые в более раннее «докомпьютерное» время были трудно реализуемы. Само появление концепции КПГ полностью обязано информационным технологиям. В соответствии с этой концепцией нами были расширены и углублены цели обучения и в связи с этим скорректированы содержание, формы и методы обучения.

Учебники и учебно-методические пособия. Естественно, что в условиях реализации концепции КПГ, среди всех используемых в обучении средств, мы основное внимание уделяем компьютерным средствам обучения. Однако это не значит, что в нашей методической системе учебники и учебные пособия играют меньшую роль, чем в традиционной системе. Более того, опыт реализации концепции показывает, что широкое использование информационных технологий предъявляет к учебникам и учебным пособиям дополнительные требования. Эти требования не сводятся, как может показаться на первый взгляд, лишь к необходимости создания специальных пособий по компьютерной поддержке основного курса. В основных учебных пособиях по геометрии должна быть обеспечена «стыковка» геометрического и информационного материала, чётко обозначена связь курса геометрии с его компьютерным сопровождением. В этих пособиях необходимо рассмотреть конкретные методы и алгоритмы компьютерного моделирования геометрических объектов и абстракций, а также листинги соответствующих программ и подпрограмм. Кроме того, традиционную систему задач в этих пособиях или задачниках необходимо пополнить заданиями, ориентированными на использование компьютера.

Требования к учебникам и учебным пособиям в традиционных системах обучения в любых высших учебных заведениях достаточно подробно проанализированы в работах [41], [64], [206]. Этим же требованиям должны удовлетворять и все пособия в рамках разрабатываемой нами системы.

Все компоненты содержания учебного пособия по математике, предназначенного для педвуза, имеют свою специфику в сравнении с учебными пособиями, предназначенными для других вузов. Как отмечено в [211], «самая существенная особенность содержания учебного пособия для педвузов заключена в его методическом компоненте». По мнению автора этой работы: «Учебное пособие по математике для педвуза должно осуществить: знакомство студентов с методами изложения школьного курса математики; мотивационное обеспечение рассматриваемого материала; всестороннее изложение материала; рассмотрение различных способов доказательства теорем; пропедевтику обучения; восполнение дедуктивных пробелов в логическом изложении материала в школьных учебниках; создание проблемных ситуаций». Учебные пособия и методические рекомендации по курсу геометрии, подготовленные сотрудниками кафедры геометрии КГПУ им. В.П. Астафьева, удовлетворяют большинству этих требований (достаточно полно представлен школьный материал, в большинстве параграфов есть элементы историзма и т.д.) [12–14, 16, 104, 108, 184–187]. Кроме того, пособия В.Ю. Ровенского по дифференциальной геометрии содержат большой теоретический и задачный материал, достаточный для эффективной реализации концепции КПГ [184–187].

Для компьютерной поддержки учебных пособий по курсу геометрии в педвузе нами подготовлены учебно-методические пособия, которые содержат:

– основные графические процедуры языка программирования;

– краткое изложение геометрической теории и основных алгоритмов, необходимых для выполнения заданий и проектов;

– примеры компьютерной визуализации геометрических объектов и абстракций;

– задания и учебные проекты различного уровня сложности [104, 114, 144].

Материал пособий разбит на части (параграфы), каждая из которых рассчитана на одно двухчасовое лабораторно-практическое занятие. На учебное занятие можно выносить не весь материал параграфа, а некоторую его часть в зависимости от рассматриваемой темы и уровня подготовки студентов. Большинство параграфов по своей структуре достаточно автономны. Это позволяет по желанию преподавателя опускать некоторые из них или рассматривать в другом порядке.

В конце каждого параграфа приводятся варианты учебных заданий и проектов для самостоятельной или коллективной работы студентов над ними во внеучебное время. Выполненные учебные проекты пополняют библиотеку программных продуктов кафедры, используются как демонстрационные средства на лабораторных занятиях. Для текущей работы студентам выдаются методички для каждого лабораторного занятия.

Компьютерные средства обучения. Методическая система, которая строится нами на основе концепции КПГ, использует все средства обучения, применяемые при традиционной системе геометрической подготовки учителя математики. Однако реализация принципов концепции требует включения в арсенал традиционных средств обучения дополнительные программные средства, без которых компьютер на занятиях по геометрии не будет выполнять те функции, которые отводятся ему в разрабатываемой нами методической системе. В этом и последующих пунктах параграфа мы рассмотрим те компьютерные средства обучения, которые могут, по нашему мнению, использоваться в процессе преподавания курса геометрии в педагогическом вузе. Одновременно мы приведём классификацию таких средств (соответствующая схема приведена в конце параграфа). Каждая группа в этой классификации объединяет большое число близких по возможностям использования в курсе геометрии программных средств (мы приводим лишь два-три средства), многие из которых нам не удалось апробировать в практике своей личной педагогической деятельности. Однако определённый опыт работы хотя бы с одним из программных средств каждой группы у авторов или их коллег по институту математики, физики и информатики КГПУ им. В.П. Астафьева имеется.

При описании большинства компьютерных средств мы ограничимся лишь совсем краткой информацией. Примеры применения в учебном процессе наиболее часто используемых нами средств приводятся во второй части монографии.

Компьютерные средства обучения, используемые в различных образовательных технологиях в процессе геометрической подготовки учителя математики, разобьём на два блока.

К первому блоку, назовём его, следуя Джонассену [62], *компьютерные средства познания* (КСП) *геометрической направленности*, отнесём компьютерные средства общего назначения, которые создавались с целью использования в профессиональной деятельности (например, в математике, программировании, чертёжной графике и т.д.), не связанной с учебным процессом, однако могут быть применены как инструменты познания в курсе геометрии.

Ко второму блоку, назовём его *компьютерные обучающие средства* (КОС) *по геометрии*, отнесём те компьютерные средства, в которые разработчиками частично или полностью встроена та или иная модель обучения геометрии. Рассмотрим каждый из этих блоков отдельно.

Компьютерные средства познания геометрической направленности. Этот блок компьютерных средств обучения разобьём на три группы: языки (системы) программирования, используемые как средства познания в курсе геометрии; прикладные профессиональные пакеты геометрической направленности и стандартные средства обработки графической информации.

На рисунке 3 приведено это разбиение.

Рис. 3

1.1. Языки (системы) программирования, используемые как средства познания в курсе геометрии. К этой группе относятся: алгоритмические языки (системы) программирования высокого уровня с развитыми графическими возможностями, логические языки (системы) программирования и языки программирования профессиональных прикладных пакетов геометрической направленности**.**

1.1.1. К *языкам программирования высокого уровня с развитыми графическими возможностями* относятся языки, имеющие в своём распоряжении графические операторы и команды, позволяющие изображать на экране компьютера простейшие графические примитивы, предусматривающие работу со слоями изображений и видеостраницами. Таковыми являются большинство известных языков программирования, например, Бейсик, Паскаль, Си, Фортран. Мы в своей практике применения в курсе геометрии языка программирования используем в основном первый из них.

При выполнении учебных проектов нами используется, как правило, система программирования Qbasic – наиболее удобная для обучения программированию на языке Бейсике (под системой программирования понимается комплекс программ, облегчающий составление, исправление и выполнение программ на языке программирования). Язык программирования этой системы вобрал в себя, с одной стороны, лучшие свойства языка Бейсик как диалогового языка программирования, а с другой стороны, основные средства структурного и модульного программирования таких языков, как Паскаль, Си, Модула и ПЛ/1. Язык Qbasic имеет развитый аппарат описания подпрограмм (с параметрами и без) и функций с параметрами, что позволяет создавать в нём сложные модульные программы.

Одним из основных преимуществ системы Qbasic является наличие встроенного редактора, позволяющего достаточно удобно вводить и редактировать тексты программ на Бейсике. Другим её преимуществом является автоматический анализ правильности записи программ сразу же при вводе каждого очередного оператора. Это даёт возможность пользователям получать синтаксически корректные программы до их запуска на выполнение. Кроме того, система содержит целый комплекс отладочных информационно-справочных средств. Во второй части приведены учебные проекты, при реализации которых используется эта система.

1.1.2. *Логические (декларативные) языки программирования* были созданы для решения задач искусственного интеллекта. К ним относятся языки Лого, Пролог и некоторые другие. В курсе информатики студентам КГПУ им. В.П. Астафьева, обучающихся по профилю «Математика», читается модуль «Системы искусственного интеллекта. Язык Пролог». Поэтому при изучении раздела «Основания геометрии» имеется возможность поддержать основной курс геометрии демонстрацией на языке Пролог или в системе Reduce осуществлять механическое доказательство некоторых геометрических утверждений. Для составления и комментирования соответствующих программ потребуется знание возможностей языка Пролог в доказательствах теорем геометрии.

Существует несколько версий Пролога, из которых PDG Prolog версии 3.1 и его более ранняя версия Турбо-Пролог 2 являются наиболее доступными и привлекательными для изучения их в школах и педвузах.

В отличие от алгоритмических языков программирования, Пролог относится к логическим, декларативным языкам. При использовании алгоритмических языков программист задаёт машине способ решения поставленной задачи, описываемый алгоритмом. Программы же на Прологе содержат только описания соотношений между объектами, которые необходимы для решения задачи. Способ решения выбирает сама машина. Поэтому программы на Прологе бывают понятнее и короче, чем на алгоритмических языках программирования.

Основой Пролога является логическая система предикатов первого порядка. Факты, сформулированные на естественном языке, выражающие свойства или отношения между объектами, записываются в программу на Прологе в виде предикатов.

В математических терминах Пролог рассматривает факты и правила в качестве множества аксиом, а вопрос пользователя как теорему. Затем он пытается доказать эту теорему, т.е. показать, что её можно вывести из аксиом.

1.1.3. К *языкам программирования профессиональных прикладных пакетов геометрической направленности* относятся Maple–язык, язык AutoLISP, язык SPL и другие, которые созданы на базе языков программирования высокого уровня (или машинных языков) и предназначены для написания программ в рамках тех или иных прикладных пакетов. Так, например, первый из перечисленных выше языков разработан специально для пакета символьных вычислений Maple в качестве его внутреннего языка. Этот язык чаще всего применялся в личной практике авторов (см. параграфы 4.2 и 7.2).

Возможность использования внутреннего языка пакета, как правило, предусмотрена программным обеспечением соответствующего пакета. Такой язык создаётся для того, чтобы предоставить пользователю более комфортные условия работы с пакетом. Применение языка пакета повышает производительность труда пользователя, так как ещё больше автоматизирует работу и расширяет круг возможностей для достижения поставленной цели. Кроме того, пользовательская адаптация многих пакетов предполагает модификацию систем меню, создание пакетных файлов, макросов и т.п. Например, встроенный в AutoCAD язык программирования AutoLISP и новая система разработки приложений (начиная с 11-ой версии) предусматривают программирование в среде AutoCAD на языках AutoLISP и C, дают возможность создавать как простые, так и достаточно сложные программы, работающие внутри AutoCAD, для решения практически любых задач геометрического конструирования.

1.2. <u>Профессиональные прикладные пакеты геометрической направленности</u>. К этой группе можно отнести: математические пакеты с графическими возможностями, системы автоматизированного проектирования, инструментальные графические пакеты и системы динамической геометрии (или интерактивные геометрические среды).

1.2.1. К *математическим пакетам* (их иногда называют пакетами символьных вычислений или пакетами компьютерной алгебры) с графическими возможностями относятся системы Maple, Derive, Reduce, Mathematica, MatCAD и др. Они созданы для повышения производительности труда в области визуализации и вычисления. Рассмотрим более подробно первые три пакета из перечисленных выше, которые наиболее часто используются в нашей методической системе.

Математический пакет Maple считается одним из лидеров по графическим возможностям среди математических систем для персональных компьютеров. Система состоит из ядра – процедур, написанных на языке С; библиотеки, написанной на Maple-языке; интерфейса. Ядро выполняет большинство базисных операций. Библиотека содержит множество команд – процедур, выполняемых в режиме интерпретации. Программирование собственных процедур позволяет пользователю пополнить ими стандартный набор и тем самым расширить возможности Maple.

Пакет Maple можно эффективно использовать как инструмент построения знаний при изучении курса геометрии. Рассматривая поверхности в евклидовом пространстве, часто бывает полезно визуализировать не только саму поверхность, но и некоторые фигуры, связанные с ней: линии на поверхности, касательную плоскость, соприкасающийся параболоид и т. д. Во второй части приведены примеры использования пакета в некоторых разделах курса геометрии.

Система Derive (математический ассистент) предназначена для начинающих и студентов, занимает небольшой объём памяти. Derive можно эффективно использовать как компьютерную среду познания при изучении многих разделов курса геометрии педагогического вуза, в частности линий и поверхностей второго порядка. По команде студента он выполнит все необходимые аналитические и численные преобразования, изобразит плоские и пространственные фигуры.

Derive предлагает для работы три типа окон:

1) окно «*авторская строка*» (Author) предназначено для записи и редактирования формул;

2) *«алгебраическое окно*» (Algebra) содержит список построенных пользователем выражений и формул;

3) *«графическое окно*» (Plot), где можно строить изображения по выбранным из «алгебраического окна» формулам.

В работе с Derive выделим три этапа.

Первый этап. В «авторской строке» студент задаёт формулу и затем отправляет её в «алгебраическое окно», где эта формула занимает строку с текущим номером. Перемещать курсор в «авторской строке» можно одновременным нажатием клавиши CTRL и одной из клавиш S (влево) или D (вправо).

Второй этап. Выделив в строке «алгебраического окна» формулу или некоторую её часть студент командует Calculus, выбирает нужное действие (взять производную, найти интеграл, вычислить предел, решить уравнение, найти сумму ряда и т.д.). Новое выражение займёт в окне строку с очередным номером. При необходимости формулу можно скопировать в «авторскую строку» и там отредактировать.

Третий этап. Выделив в «алгебраическом окне» формулу студент командует Plot и переходит в «графическое окно». При повторной команде Plot строится соответствующее изображение.

В качестве примера рассмотрим выполнение следующей задачи [182].

Задача. *Дана прямая l и точка S, не принадлежащая ей. Пусть P_t произвольная точка прямой l; l_t – прямая, проходящая через P_t перпендикулярно прямой SP_t. Если P_t будет пробегать множество всех точек прямой l, то соответствующие прямые l_t будут касаться некоторой линии γ. Доказать, что γ – парабола.*

Решение (построение и расчёт выполним с помощью Derive):

1) примем прямую l за ось OX (рис. 4). Уравнение семейства прямых l_t имеет вид: $-t(x-t)+py=0$. В авторской строке наберём левую часть этого равенства: - T * (X – T) + P * Y;

2) явно выразим у командой soLve: T* (X – T) / P;

3) найдём частную производную по t: dif (- T * (X – T) + P * Y, T);

4) вычислим эту производную командой Simplify: 2*T – X;

5) выразим T через X командой soLve: 0.5 * X;

6) командой Manage-Substitute подставим найденное T в уравнение 1) и командой Simplify упростим его: P * Y - 0.25 * X * X;

7) командой soLve выразим y: Y = 0.25 * X * X / P – парабола;

8) задаём параметр p: P := 2.

9) командой Window-Split-Vertical делим экран на два окна. Командой Plot-Plot в окне 2 строим параболу $y=0{,}25x^2/p$. При T = 0, ±0.5, ±1,... строим прямые l_t. Все они касаются параболы $y=0{,}25x^2/p$ с осью OY и фокусом $S(0, p)$.

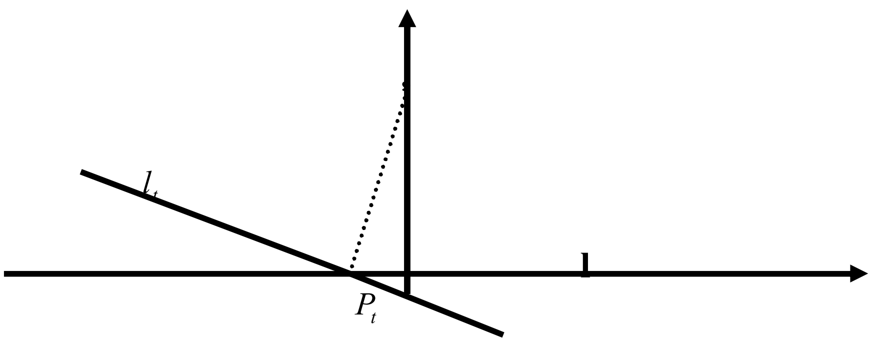


Рис. 4

Система Reduce предназначена для выполнения алгебраических операций с выражениями произвольной сложности. Система может выполнять различные действия с полиномами: раскрытие скобок, разложение на множители, а также выделение требуемых компонент. В системе, возможно, выполнять дифференцирование и интегрирование выражений. Система является интерактивной, т.е. пользователь может ввести некоторое алгебраическое выражение и посмотреть на его значение, прежде чем система перейдет к следующему шагу вычислений.

Отметим, что, как и в других языках программирования, система может работать с переменными и константами. Вычисление выражений выполняется по правилам высшей математики. *Reduce* обычно везде, где это, возможно, раскрывает скобки, выполняет подстановки, собирает подобные члены и упорядочивает переменные специальным образом. Однако раскрытие, упорядочивание переменных, формат выдачи могут управляться пользователем, для чего имеются различные команды. Пример применения системы при изучении раздела «Основания геометрии» приведён во второй части.

1.2.2. *Системы автоматизированного проектирования* (САПР) представляют собой компьютерные среды, которые созданы для облегчения труда проектировщиков, чертёжников. Их можно с успехом использовать для моделирования геометрических фигур, автоматического проектирования и черчения. В настоящее время в мире существует более ста различных систем для двумерной графики и трёхмерного моделирования, например, системы Catia, Compas, Geometrie, Romulus и другие. Однако одной из самых распространённых и популярных в мире гибких систем автоматизированного проектирования является система AutoCAD. В первых версиях система могла выполнять лишь поверхностное моделирование. Последние её версии уже имеют модуль объёмного моделирования. Единая база данных, как для двумерных, так и для трёхмерных объектов, а также единый графический интерфейс вывода делают систему удобной для пользователя. Благодаря открытой архитектуре система может быть адаптирована на конкретную специфику работы. Например, каждый пользователь легко и быстро может создать свои собственные меню с наборами применяемых стандартов и часто используемых команд и функций.

Версии AutoCAD до 11-ой включительно разработаны под ОС DOS, с версии 12 – под Windows. Форматы графических файлов *.dwg системы поддерживаются программой TurboCAD, которая позволяет быстро обрабатывать изображения, придавая, например, 3-мерным моделям реалистичный полутоновый вид.

САПР AutoCAD обладает многими достоинствами, позволяющими использовать эту среду для преподавания курса геометрии в педагогическом вузе. К таким достоинствам можно отнести:

– широкое применение метода координат для построения плоских и пространственных фигур (причём координаты можно вводить с очень большой точностью и в разных форматах, включая числовые выражения);

– простое оперирование геометрическими преобразованиями, выраженными специальными командами (MOVE – параллельный перенос, MIRROR – осевая симметрия, ROTATE – поворот вокруг указанной точки на заданный угол, SCALE – подобие);

– просмотр изображения с различных точек зрения, а также в динамике, как бы «обходя» объект вокруг;

– построение изображения в перспективе;

– возможность быстрого построения цилиндрических поверхностей, поверхностей вращения и т.п.;

– в математический аппарат системы AutoCAD заложены такие мощные средства как сплайны, алгоритм построения поверхности Кунса, удаление невидимых линий и др.;

– существование библиотеки заготовок стереометрических фигур: сферы, тора, пирамиды, параллелепипеда и т.д.

Сильный математический аппарат, прекрасные визуальные и чертёжные свойства способствуют развитию конструктивных навыков, пространственного воображения, логического мышления, деятельностного подхода при изучении математики.

Все эти качества САПР AutoCAD послужили основанием для рекомендации её в качестве инструмента познания в курсе геометрии. Систему AutoCAD в основном курсе геометрии целесообразно использовать в следующих целях:

1) для демонстрации геометрических объектов, способов их построения (при этом требуется подготовленный заранее файл с конечным изображением или пакетный файл, демонстрирующий построение по шагам);

2) в качестве тренировочной среды для отработки математических алгоритмов, упражнений;

3) как инструментальную графическую среду для выполнения учебного проекта.

Все три назначения системы можно реализовать при обучении следующим геометрическим темам: метод координат на плоскости и в пространстве; конструирование многогранников; моделирование поверхностей; преобразования плоскости и пространства; симметрии на плоскости и в пространстве; сплайны; проецирование.

В качестве примера рассмотрим решение задачи одной из важных и занимательных тем математики «Симметрия на плоскости». Для качественного усвоения этой темы очень важно обучить студентов методике построения различных плоских фигур (бордюров или плоских орнаментов), имеющих заданный тип симметрии. Добиться этого можно, используя пакет AutoCAD.

Задача. *На гексагональной решётке построить орнамент, указанный на рисунке 5.*

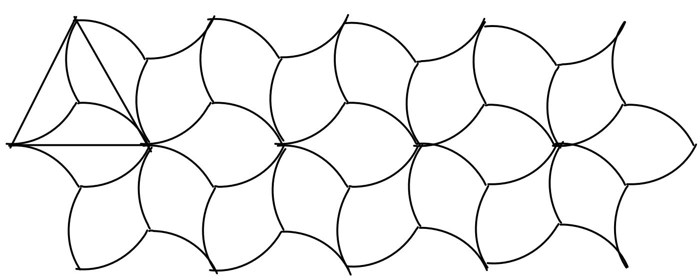


Рис. 5

Решение. Необходимо проанализировать структуру орнамента: выяснить с помощью композиции каких геометрических преобразований изображён этот орнамент и выделить элементарный мотив (на рисунке он заключён в правильный треугольник *ABO*). Этот этап представляет собой исключительно важную деятельность с привлечением математических знаний.

Следующий этап – разработка сценария для изображения орнамента на дисплее в среде AutoCAD. Приведём возможный вариант сценария:

1. Установить параметры нового чертежа с помощью команд SNAP, GRID и т.д.
2. Построить правильный треугольник (команда POLIGON).
3. Изобразить элементарный мотив. Его моделирование можно начать с построения дуги (команда ARC, опция S, E, D). Точки начала S и конца E выбрать из режима объектной привязки как точки пересечения Intersection. Направление D выбрать совпадающим со стороной треугольника. Обход начать против движения часовой стрелки. С помощью команды ARRAY получить окончательный элементарный мотив треугольника ABO.
4. Отобразить построенный элементарный мотив с помощью осевой симметрии относительно прямой *AO* (команда MIRROR). Вершина *B* при этом отобразится на вершину *C*, четырёхугольник *ABOC* будет представлять собой ромб.
5. Осуществить композицию параллельных переносов (команда ARRAY) построенной фигуры на вектор с началом в точке *B* и концом в точке *O*.
6. Отобразить построенный в результате выполнения параллельных переносов бордюр с помощью осевой симметрии относительно прямой *OB* (команда MIRROR). Точки *A* и *C* при этом отобразятся соответственно на точки *P* и *Q*.

7. Повторить предыдущую операцию, выбрав в качестве оси симметрии прямую *PQ*. При необходимости повторить последнее преобразование несколько раз.

Примечания:

– существует несколько способов построения данного орнамента, студенты могут моделировать узор с помощью любого из них;

– для удобства работы гексагональная сетка, фрагментом которой является выделенный треугольник, может быть изображена в другом слое чертежа (кальке) и отображаться в случае необходимости;

– особый интерес представляют: поворотная симметрия, создающая иллюзию вращения объекта и калейдоскопическое построение орнаментов;

– рекомендуется использовать различные варианты заданий, например, только синтез изображения по заданному элементарному мотиву и композиции геометрических преобразований;

– в основе предлагаемого метода компьютерного конструирования орнамента лежит деятельность обучаемых, которая не использует формул преобразований. В случае необходимости подключения аналитического аппарата (в частности формульное задание орнамента) можно использовать системы MathCAD или Sketchpad;

– существует специальный мощный пакет для моделирования орнаментов TasselMania, разработанный специально для обучения и дизайна, который хорошо известен в учебных заведениях США и Европы;

– многие задачи этой темы служат прекрасным материалом для учебных проектов.

1.2.3. К *инструментальным графическим пакетам и системам динамической геометрии* относятся системы CorelDraw, 3dStudio, Cabri Geometry, Geometer’s Sketchpad, GeoGebra и другие. С помощью первых двух на экране компьютера можно строить высококачественные изображения плоских и трёхмерных сцен, в том числе и динамические изображения. Эти пакеты основаны на использовании соответствующих методов построения реалистических изображений, удаления невидимых частей, геометрического моделирования [219]. При этом центр тяжести переносится с методов и самого процесса создания реалистических изображений на вопросы моделирования. Пользователь лишь задаёт геометрию сцены, используемые материалы, источники света и камеры, а пакет сам построит соответствующее изображение.

Особый класс инструментальных графических сред составляют системы динамической геометрии (или интерактивные геометрические среды): Cabri Geometry, Geometer's Sketchpad («Живая геометрия»), GeoGebra. Эти программные обеспечения построены на идеологии «открытия» геометрии и позволяют проводить компьютерный геометрический эксперимент. Главной особенностью компьютерных чертежей, создаваемых с помощью этих пакетов, является их динамичность. Чертёж как компьютерный файл существует вместе со всеми своими возможными деформациями. Элементы чертежей можно двигать, изучая свойства объекта, при этом сохраняется конфигурация, заданная построением.

1.3. Стандартные средства обработки графической информации. В эту группу входят: *графические редакторы, электронные таблицы со средствами визуализации, базы данных с возможностями ввода, хранения и переработки графической информации*. Кратко прокомментируем средства этой группы:

1. К *графическим редакторам* относятся такие известные программные средства, как Story Board Plus, Gred, Cpen и др., позволяющие создавать на экране компьютера разнообразные рисунки, сохранять их на диске и распечатывать.

2. *Электронные таблицы со средствами визуализации* представляют собой широко распространённые программные средства, которые могут использоваться для моделирования математических зависимостей или

отношений между переменными. К этой подгруппе программных средств относятся, например, Excel, Multiplan и др.

3. *Базы данных с возможностями ввода, хранения и переработки графической информации* – хорошо известные программные средства, к которым относятся Access, FoxPro и т.д.

Компьютерные обучающие средства по геометрии. Второй блок компьютерных средств обучения также разобьём на три группы: педагогические программные средства (ППС) по геометрии, инструментальные программные средства, предназначенные для создания ППС по геометрии и учебные программные средства для формирования навыков работы с компьютерными средствами познания геометрической направленности (рис. 6).

Рассмотрим каждую из групп, входящих во второй блок, отдельно.

Рис. 6

2.1. Педагогические программные средства по геометрии. Используя известную типологию, к программным средствам этой группы можно отнести: обучающие программные средства с элементами геометрического моделирования, учебно-демонстрационные программные средства обучающего характера по геометрии и учебно-игровые и досуговые программные средства по развитию геометрической интуиции и пространственного воображения [183].

2.1.1. *Обучающие программные средства с элементами геометрического моделирования* предназначены для организации и поддержки учебного диалога по геометрии ученика с компьютером, предоставляют среду для компьютерного геометрического моделирования, а также необходимую учебную информацию по геометрии, направляют обучение, учитывая индивидуальные возможности и предпочтения обучаемого. Приведём примеры таких программных средств.

Пакет «Система иллюстративно обучающих программ по стереометрии» (ЛГПИ им. А.И. Герцена, кафедра геометрии). Пакет позволяет воспроизводить на экране ПК проекции многогранников и n-угольных призм, пирамид и антипризм с учётом видимости рёбер. Обучаемый имеет возможность осуществлять построение моделей этих многогранников, а также их сечений заданной плоскостью. Система предоставляет наглядные средства в виде стереометрических объектов, служит развитию пространственного воображения, даёт возможность преподавателю моделировать стереометрические объекты к различным задачам по определённой тематике.

Пакет «Компьютерная поддержка курса геометрии (КГПУ, кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания). Пакет позволяет моделировать на экране ПК в аксонометрии или линейной перспективе основные типы изучаемых в вузовском курсе геометрии многогранников и поверхностей (в том числе и их комбинации) с учётом локальной (при необходимости и глобальной) видимости, задавая различные их расположения по отношению к системе координат, как в статическом состоянии, так и динамике. Обучаемый имеет возможность строить их плоские сечения, самостоятельно задавая секущую плоскость. Имеется возможность для некоторых типов многогранников проводить исследования, связанные с нахождением групп симметрий этих многогранников. По целому ряду геометрических задач на построение циркулем и линейкой, решаемых с помощью таких преобразований как движение, подобие, инверсия, у обучаемых есть возможность проводить исследования, связанные с различным выбором данных по условию задач фигур. Пакет используется в личной практике авторов на лекциях (для компьютерных демонстраций), на практических занятиях (для организации компьютерных экспериментов) и лабораторных занятиях (как мотивационное средство выполнения учебных проектов).

2.1.2. *Учебно-демонстрационные программные средства обучающего характера по геометрии* предназначены для поддержки учебного процесса по геометрии, для создания на экране компьютера, включая демонстрационный дисплей в лекционной аудитории, моделей геометрических объектов и абстракций. Предоставляют наглядную учебную информацию как статического, так и динамического характера. Нередко эти средства используются для создания объекта изучения, исполняя роль инструмента исследования. В качестве примера приведём следующие программные средства.

Программа «Демонстрация проведения сечения шара плоскостью» (научно-исследовательский институт СОиУК АПН, г. Москва), которая наглядно, в динамике демонстрирует на экране персонального компьютера процесс проведения сечений шара плоскостью.

Система «Многогранники» (научно-исследовательский институт ШОТСО АПН, г. Москва). Демонстрационно-обучающая программно-методическая система «Многогранники» состоит из пяти программных блоков, каждый из которых представляет собой программное средство определённого типа и инструктивно-методические материалы. Программные средства системы обеспечивают: динамическое представление плоских изображений стереометрических фигур, обратную связь, осуществление поиска необходимой учебной информации, контроль уровня знаний. Система предоставляет возможность пользователю пройти через все этапы формирования графических образов многогранников, позволяет организовать познавательную деятельность обучаемого для формирования «пространственного видения» стереометрического объекта, реализует на экране ПК вращение двумерного стереометрического чертежа многогранника (пять видов) с невидимыми штриховыми рёбрами.

Пакет демонстрационных программ «Компьютерная поддержка курса геометрии» (Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания). Содержит демонстрационные программы по большинству разделов вузовского курса геометрии: фигуры на плоскости, метод координат на плоскости, фигуры в пространстве, метод координат в пространстве, преобразования плоскости и пространства, методы изображений, проективная геометрия, дифференциальная геометрия, основания геометрии. Используется в личной практике авторов на всех видах занятий.

2.1.3. *Учебно-игровые и досуговые программные средства по развитию геометрической интуиции и пространственного воображения*, которые предназначены для проигрывания учебных ситуаций, с целью развития пространственного воображения и геометрической интуиции. Ограничимся краткими комментариями к двум таким программным средствам.

Программное средство «Mosaic» (Английская фирма «Advisory Unit Microtechnology in Education»). Представляет собой графический редактор с расширенными возможностями. Предназначено для создания различных графических построений на основе осуществления аффинных преобразований графических элементов, создаваемых пользователем. Позволяет в увлекательной игровой форме создавать богатое многообразие разноцветных мозаичных полей, напоминающих рисунки в калейдоскопе. Работа с программным средством позволяет подвести обучаемого к интуитивному пониманию сущности движений, подобий и аффинных преобразований.

Широко известное программное средство «Тетрис», которое, используя идеи занимательности и соревновательности, позволяет обучаемому самостоятельно развивать свою геометрическую интуицию и пространственное воображение. Для развития последнего наибольший эффект даёт «объёмная» версия программного средства.

2.2. Инструментальные программные средства для создания ППС по геометрии. Предназначены для конструирования программных систем учебного назначения, подготовки или генерирования учебно-методических и организационных материалов, создания графических или музыкальных включений, сервисных надстроек. К этой группе относятся: программные оболочки по созданию обучающих программных средств по геометрии, программные оболочки по созданию демонстрационных программных средств по геометрии и тестирующие оболочки с возможностью ввода графической информации.

2.2.1. *Программные оболочки по созданию обучающих программных средств по геометрии* предназначены для создания информационно-геометрической программной среды со встроенными элементами технологии обучения. Приведём пример такой оболочки.

Пакет инструментальных программных средств «Инструментарий стереометрии» (ИСО РАО, г. Москва). Средствами этого пакета можно создавать обучающие программы по теме «Многогранники», которые позволяют выводить на экран плоские изображения пространственных фигур на фоне изображения трёхмерной системы координат и выполнять все виды геометрических преобразований, осуществлять построение сечений, развёртку, вхождение внутрь фигуры. Есть возможность «отделять» любую грань и располагать её в плоскости экрана с демонстрацией процесса «разворачивания» грани, выполнять дополнительные построения (изображать точку, сплошную или штриховую линию и т.д.), строить сечения плоскостью, заданной различными элементами, осуществлять отсечение части фигуры и «приклеивание» отсечённой части. Средствами пакета осуществимы такие виды геометрических преобразований, как вращение фигуры вокруг выбранной оси координат, параллельный перенос на некоторый вектор, осевой или центральной симметрии, гомотетии.

Система Конструктивная Геометрия (разработана фирмой F-Bit Ltd) – это инструментальная среда, представляющая собой:

– универсальный инструмент для решения конструктивных и позиционных задач;

– электронный задачник, содержащий большое количество задач по различным темам курса геометрии, позволяющий педагогу за короткое время подготовиться к очередному занятию, к контрольной работе, экзамену, олимпиаде;

– исследовательскую лабораторию, позволяющую «увидеть», как работает механизм математики применительно к данному конкретному случаю, дающую возможность всё «потрогать» своими руками, покрутить-повертеть, посмотреть с разных сторон, понять и убедиться, что это «работает» только так и никак иначе;

– электронный журнал, систематизирующий результаты работ обучаемых и являющийся электронной базой данных.

Интерфейс программы максимально приближен к современным общепринятым стандартам и содержит кнопки с пиктограммами, изображающими геометрические действия, строки помощи, полосы прокрутки, диалоговые окна, окна просмотра и другие.

Рассмотрим более подробно модули «Планиметрия» и «Стереометрия» этой системы.

Модуль «Планиметрия» поддерживает тему «Решение задач на построение циркулем и линейкой». Каждый из используемых при построении примитивов имеет собственное меню. Например, меню отрезков содержит пункты: «провести отрезок по двум точкам», «изменить размер отрезка» и «удалить отрезок». Меню дуг и окружностей содержит пункты: «провести дугу по двум точкам», «построить дугу произвольного радиуса», «изменить раствор дуги» и «удалить дугу». Меню точек содержит пункты: «установка точки на пересечении отрезков», «установка точки на пересечении отрезка и дуги», «установка точки на пересечении дуг», «удаление точки». Имеются также дополнительные инструменты, которые позволяют: делить отрезок на *n* равных частей; проводить через точку отрезок, параллельный (перпендикулярный) данному отрезку; строить фигуру, инверсную данной фигуре. Последний инструмент является одним из самых мощных инструментов в модуле «Планиметрия». У составителя задач (учителя, преподавателя) имеется возможность средствами системы запретить учащимся пользоваться дополнительными инструментами.

После запуска модуля появляется диалоговое окно со списком всей группы. Из списка выбирается фамилия конкретного ученика и осуществляется переход в рабочее поле модуля. Затем на экране возникает окно со списком предлагаемых задач. Выбирается некоторая задача, например построение касательной к окружности, после чего на рабочем поле появляется рисунок и (после обращения к соответствующей команде меню) окно с текстом задачи. Используя перечисленный выше инструментарий, ученик строит на дисплее искомые фигуры. Система не накладывает никаких ограничений на способы решения задачи. Если искомые фигуры (отрезки касательных) найдены верно, то после их ввода появится сообщение о том, что ответ принят. Система автоматически запишет результат решения в журнал.

У учителя есть возможность самому создать задачу на построение циркулем и линейкой в редакторе задач, составить помощь для учеников по её решению, оформить ответ и комментарии к решению задачи, сохранить всё это на диске.

Модуль «Стереометрия» позволяет решать задачи, связанные с построением сечений выпуклых многогранников плоскостями. В этом модуле функционирует весь инструментарий планиметрического модуля. Кроме него, в редактор задач стереометрии добавлены инструменты –

«Провести произвольное сечение», «Провести сечение», «Параллельный перенос оснований», «Обрезание фигуры», – позволяющие провести произвольное сечение фигуры плоскостью, изменить фигуру путём параллельного переноса её оснований, изменить фигуру путём отсекания плоскостью её отдельных частей.

После запуска модуля ученик находит свою фамилию и выбирает некоторую задачу, например сечение куба по трём точкам на рёбрах. Затем на рабочем поле появляется куб с тремя отмеченными точками на рёбрах и окно с текстом задачи. Ученик, используя инструментарий модуля и любой из известных ему методов решения позиционных задач (метод следов, метод диагональных сечений и т.д.), строит на дисплее искомое сечение. Для того чтобы ввести ответ, выбирается соответствующая команда в меню и выполняется определённая последовательность действий. В частности, чтобы указать сечение, необходимо очертить его контур, пометив последовательно все точки вершин выпуклого многоугольника, образованного сечением фигуры. Если сечение найдено верно, то появится сообщение о том, что ответ принят. Система автоматически запишет результат решения в журнал на имя ученика, выполнявшего это задание.

У учителя есть возможность создать задачу на построение сечения, причём система будет сама отслеживать правильность её решения учеником. В редакторе задач система предлагает пользователю призмы или пирамиды, в основании которых лежат правильные многоугольники с числом вершин от 3 до 9. Можно изменить фигуру с помощью параллельного переноса её оснований и вершины (для конуса), отсечением её частей плоскостями. Для дальнейшего оформления задачи учителю надо задать сечение созданной им фигуры. Для этой цели используется инструмент «Построение произвольного сечения». После составления текста задачи учитель может посмотреть, как выглядит ответ, выбрав соответствующий пункт меню.

Для того чтобы ученик мог воспользоваться помощью при решении задачи, учитель сам составляет один из вариантов её решения, применяя те же инструменты, находящиеся в распоряжении ученика. Система предоставляет возможность подробно прокомментировать все этапы решения задачи. Итак, система «Конструктивная Геометрия» – это надёжный помощник учителя математики и универсальный инструмент для решения геометрических задач, позволяющий «оживить» застывшие на бумаге геометрические образы.

Система ПланиМир применяется как инструмент для построения легко модифицируемых, «живых» чертежей. Система может использоваться в школьном курсе планиметрии, в курсе геометрии педвуза. Особенно удобно применять её для решения задач на построение циркулем и линейкой. ПланиМир даёт возможность заниматься геометрией, не отвлекаясь на разные второстепенные детали (прямая линия оказалась кривой или чертёж не поместился на листе). Возможность перемещать построенные точки и другие объекты и наблюдать за изменением чертежа повышает наглядность построений и облегчает отыскание ошибок.

Базовым объектом системы является точка. Все остальные фигуры являются производными от точек. Чтобы поставить точку удобно воспользоваться мышью. Точку можно пометить и переместить в любое место экрана. В ПланиМире есть только одна базовая команда построения прямой – через две отмеченные точки. Однако можно создать и свои собственные команды построения прямой. Имеются базовые команды построения отрезка и луча. Система ПланиМир позволяет строить окружности двумя способами. Первый из них – окружность по заданному центру и точке, принадлежащей этой окружности. Второй – окружность по заданному центру и радиусу. В ПланиМире точки могут быть трёх видов: свободные; принадлежащие заданному объекту; точки пересечения объектов. Точки, принадлежащие объектам, навсегда связываются с объектом и перемещаются вместе с ним. Система ПланиМир позволяет проводить измерения и вычисления. Среди сервисных возможностей системы отметим следующие команды из меню Редактор: «Переименовать» (позволяет переобозначить автоматически обозначенные системой объекты), «Спрятать» и «Показать» (позволяют удалить или, наоборот, продемонстрировать любые дополнительные построения).

После запуска системы на экране появляется головная страница гипертекста. Если выбрать поле «Демонстрация», то, используя клавишу «пробел», можно по шагам увидеть появление изображений некоторых планиметрических фигур или решение специально подобранных задач на построение циркулем и линейкой. Если же войти в поле «Свободная работа в ПланиМире», то на экране можно выполнять построения различных фигур, в том числе связанных с решением задач конструктивной геометрии.

2.2.2. *Программные оболочки по созданию демонстрационных программных средств по геометрии*, которые предназначены для создания учебно-демонстрационных программ по геометрии. Приведём пример такой оболочки.

Инструментальное программное средство «Многогранники» (Научно-исследовательский институт ШОТСО АПН, г. Москва). Программное средство позволяет преподавателю создавать любое плоское изображение стереометрического объекта с последующим использованием его в качестве демонстрационного ПС. Преподаватель может с помощью этого средства подготовить для занятия по геометрии любые стереометрические чертежи многогранников, задать их вращение. Для описания этих фигур в инструментальном программном средстве разработан свой язык, имеющий кроме простого синтаксиса всего четыре оператора.

2.2.3. *Тестирующие оболочки с возможностью ввода графической информации* предназначены для конструирования программных сред, позволяющих проводить с помощью компьютера тестирование по различным темам того или иного курса, включая курс геометрии. Приведём пример такой оболочки.

Инструментальная тестирующая оболочка «Vera», созданная в институте математики, физики и информатики КГПУ (автор В.И. Якушевич). Выполненная на языке программирования Пролог, оболочка предназначена для разработки педдиагностических тестов и их использования в учебном процессе. Обладает высокими качествами, причём не только технического характера, но и педагогического. Реализует определённые научно-методические концепции теории тестирования, разрабатываемые в ИМФИ Красноярского педуниверситета.

2.3. Учебные программные средства для формирования навыков работы с компьютерными средствами познания геометрической направленности. Предназначены для подготовки учащихся к работе с компьютерными средствами познания геометрической направленности. К этой группе относятся: учебные среды для обучения языкам (системам) программирования, учебные среды по работе с профессиональными прикладными пакетами геометрической направленности и учебные среды по работе со стандартными средствами обработки графической информации.

2.3.1. *Учебные среды для обучения языкам (системам) программирования* («Изучение операторов языка Бейсик», «Практикум по алгоритмическим языкам», «Микропаскаль», «Лого – среда обучения» и др.), которые служат целям формирования у обучаемых практических навыков графического программирования на том или ином языке программирования высокого уровня**.**

2.3.2. *Учебные среды по работе с прикладными пакетами геометрической направленности* (J – LISP, учебно-демонстрационные программы по пакетам Derive, Maple и др.), которые служат целям формирования у обучаемых практических навыков работы с прикладными пакетами геометрической направленности.

2.3.3. *Учебные среды по работе со стандартными средствами обработки графической информации* («Роботрон-1715», «Учебные электронные таблицы», «Учебный графический редактор», «Учебные базы данных и базы знаний»), которые формируют у обучаемых практические навыки работы со стандартными средствами обработки информации.

В учебных заведениях широко используется пакет учебных программ «Информатика», который создан коллективом программистов под руководством В.А. Каймина в 1991 году. В состав этого пакета входят, в частности учебный графический редактор (Gredit), учебные электронные таблицы (Cals), учебная база данных (SDB), учебный интерпретатор Пролога (Prolog). Особенностью этого пакета программ является простота освоения программных средств. Это достигнуто простотой правил работы с ними на персональных компьютерах, выводом сообщений исключительно только на родном языке, наличием простых описаний и доступной учебной литературы.

На этом мы завершим краткий обзор и классификацию компьютерных средств обучения, которые можно использовать в процессе геометрической подготовки учителя математики. В таблице 6 схематично изображена приведённая выше классификация компьютерных средств обучения, которые могут быть использованы при изучении курса геометрии педвуза в условиях реализации концепции КПГ.

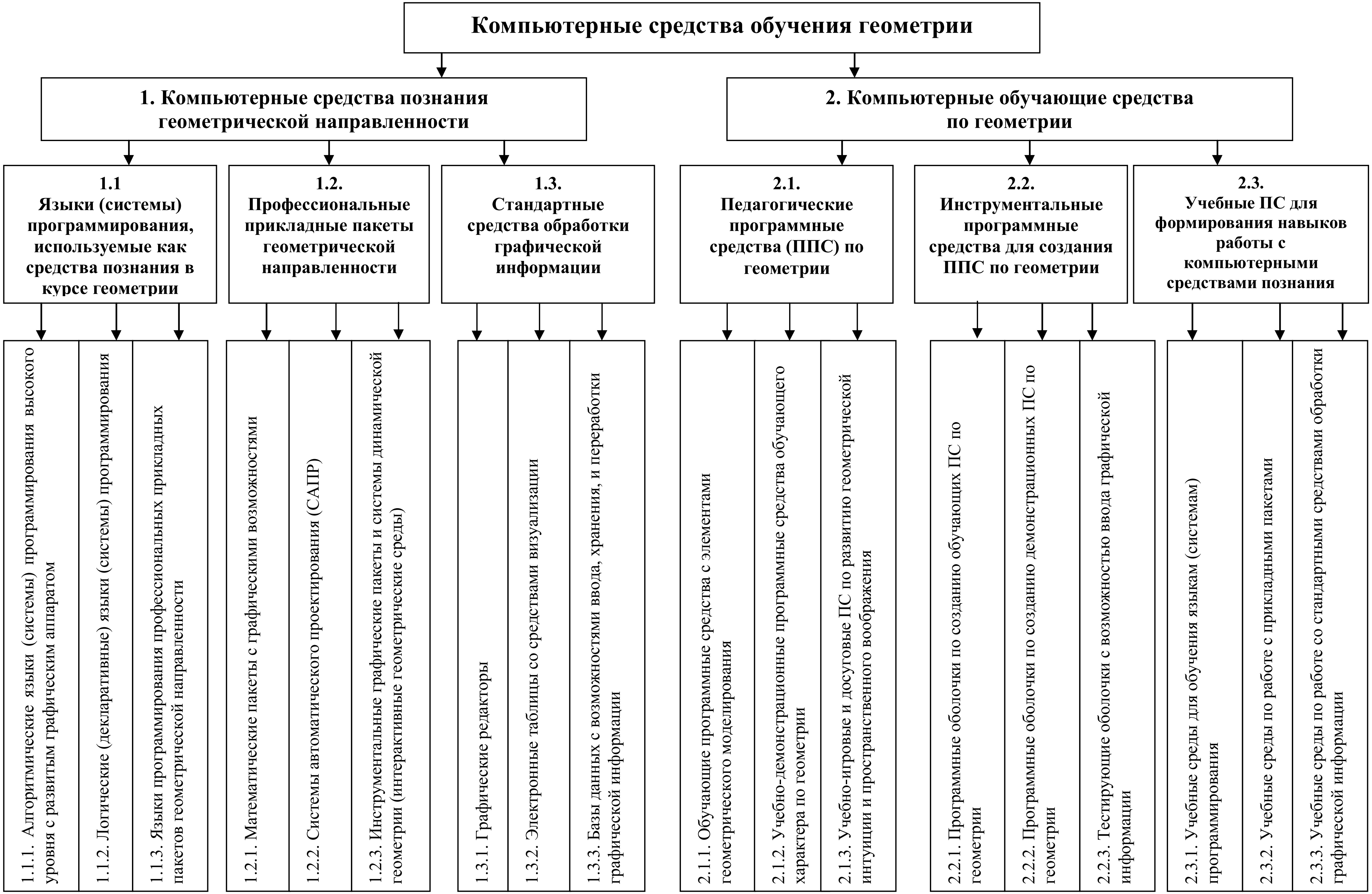

Компьютерные средства обучения геометрии
1. Компьютерные средства познания геометрической направленности
2. Компьютерные обучающие средства по геометрии
1.1 Языки (системы) программирования, используемые как средства познания в курсе геометрии
1.2. Профессиональные прикладные пакеты геометрической направленности
1.3. Стандартные средства обработки графической информации
2.1. Педагогические программные средства (ППС) по геометрии
2.2. Инструментальные программные средства для создания ППС по геометрии
2.3. Учебные ПС для формирования навыков работы с компьютерными средствами познания
1.1.1. Алгоритмические языки (системы) программирования высокого уровня с развитым графическим аппаратом
1.1.2. Логические (декларативные) языки (системы) программирования
1.1.3. Языки программирования профессиональных прикладных пакетов геометрической направленности
1.2.1. Математические пакеты с графическими возможностями
1.2.2. Системы автоматического проектирования (САПР)
1.2.3. Инструментальные графические пакеты и системы динамической геометрии (интерактивные геометрические среды)
1.3.1. Графические редакторы
1.3.2. Электронные таблицы со средствами визуализации
1.3.3. Базы данных с возможностями ввода, хранения, и переработки графической информации
2.1.1. Обучающие программные средства с элементами геометрического моделирования
2.1.2. Учебно-демонстрационные программные средства обучающего характера по геометрии
2.1.3. Учебно-игровые и досуговые ПС по развитию геометрической интуиции и пространственного воображения
2.2.1. Программные оболочки по созданию обучающих ПС по геометрии
2.2.2. Программные оболочки по созданию демонстрационных ПС по геометрии
2.2.3. Тестирующие оболочки с возможностью ввода графической информации
2.3.1. Учебные среды для обучения языкам (системам) программирования
2.3.2. Учебные среды по работе с прикладными пакетами
2.3.3. Учебные среды по работе со стандартными средствами обработки графической информации

Рис. 7

ВЫВОДЫ

Опираясь на существующий опыт преподавания геометрии в педвузе, достижения в области педагогики и психологии и концепцию компьютерной поддержки курса геометрии, описанную нами во второй главе, мы *разработали методическую систему* геометрической подготовки студентов – будущих учителей математики, обучающихся по направлению подготовки 050100.62 Педагогическое образование, квалификация (степень) «бакалавр». Для этого:

1. *Разработали систему целей.* Для того чтобы традиционная система целей геометрической подготовки учителя математики отражала изменения, происходящие в системе высшего образования в связи с информатизацией общества, нами к ней было добавлено несколько новых целей. В результате мы получили следующие шесть групп целей, которые легли в основу методической системы: *формирование научного мировоззрения*, согласно которой, в частности, должен быть сформирован современный взгляд на геометрию как науку, использующую информационные технологии; *обеспечение знаний, умений и навыков,* согласно которой, в частности, студенты должны быть подготовлены к тому, чтобы самостоятельно изучать геометрию, используя компьютеры в качестве эффективного инструмента построения знания; *развитие математического мышления*, согласно которой, в частности, компьютер должен использоваться для развития пространственного мышления, а восприятие пространственных образов должно корректироваться теоретическими соображениями, знанием фактов геометрической науки; *формирование опыта педагогической деятельности,* согласно которой, в частности, необходимо отдавать предпочтение методам и приемам, которые рекомендуются использовать в школьном преподавании, применять новые образовательные технологии, включая компьютерные; *воспитание интереса к геометрии,* согласно которой, в частности, студентов следует увлечь логической стройностью курса, красотой и

изяществом доказательств, неожиданностью решений, возможностью конструировать геометрические образы на экране дисплея; *формирование математической и информационной культуры*, согласно которой, в частности, изучение геометрии в педвузе должно обеспечить формирование не только математической, но и информационной культуры будущего учителя.

2. *Разработали содержание методической системы* геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий, удовлетворяющее всем критериям отбора содержания методической системы.

3. *Разработали систему методов.* Учитывая изменения, произошедшие не только в целях и содержании методической системы, но и в её средствах, разработали методы использования компьютеров в качестве средства формирования познавательной деятельности будущих учителей математики в процессе их геометрической подготовки: метод использования компьютера как инструмента, позволяющего значительно расширить иллюстративную базу вузовского курса геометрии; метод использования компьютера для формирования алгоритмической культуры студентов; метод использования компьютера при решении вычислительных задач геометрии; метод использования компьютера при решении задач на визуализацию геометрических объектов; метод использования информационных технологий в качестве средства создания творческого, эмоционального отношения к процессу решения задач; метод создания и использования баз данных; метод использования компьютерных технологий в качестве средства экспериментирования и моделирования; метод учебных информационно-ориентированных проектов.

4. *Рассмотрели особенности реализации каждой из основных организационных форм обучения* в условиях реализации концепции КПГ: лекции, практические, семинарские, лабораторные и лабораторно-

практические занятия, дисциплины по выбору, самостоятельная работа, государственные экзамены и выпускная квалификационная работа.

5. *Классифицировали компьютерные средства, которые могут быть использованы в курсе геометрии педвуза.* Привели и обосновали классификацию компьютерных средств обучения, которые могут быть использованы при изучении курса геометрии в педагогическом вузе в условиях реализации концепции КПГ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
Пути реализации методической системы геометрической подготовки учителя математики на основе информационных технологий

Опираясь на результаты, полученные во второй и третьей главах, рассмотрим пути реализации концепции компьютерной поддержки курса геометрии и построенной нами методической системы на примере некоторых тем курса геометрии педвуза. В каждом из последующих параграфов рассматривается по одному модулю, разделу или теме курса геометрии. Параграфы, посвящённые тому или иному модулю (разделу), начинаются с его содержания и кратких комментариев к нему, касающихся особенностей реализации нашей концепции. Каждый параграф состоит из подпунктов, содержащих вопросы, связанные с реализацией концепции компьютерной поддержки в одной из тем раздела.

Структурно материал второй части организован так, чтобы его содержание было максимально полезно не только исследователям в области дидактики математики, но и тем преподавателям-практикам, которые пожелают использовать его в своей профессиональной деятельности. В связи с этим стиль изложения материала в этой части несколько отличается от стиля изложения в части первой. Опираясь на собственный опыт использования информационных технологий в преподавании курса геометрии в педагогическом вузе, авторы позволили себе в ряде случаев более детально, чем это принято в монографических исследованиях по теории и методике обучения предмету, остановиться на некоторых математических и алгоритмических проблемах реализации концепции. Все такие случаи легко усматриваются из текста и, без особого ущерба для уяснения общей картины, могут быть читателем опущены.

Оговорим дополнительно некоторые вопросы общего характера.

Во-первых, лабораторные работы, приводимые во второй части, имеют номер, состоящий из двух цифр, разделённых точкой. Первая цифра обозначает номер модуля, вторая – порядковый номер работы в этом модуле. Номера учебных проектов, выполняемых на большинстве лабораторных занятий, состоят из трёх цифр. Первые две – это номер соответствующей лабораторной работы, последняя – порядковый номер проекта в этой работе (на некоторых занятиях выполняется более одного учебного проекта).

Во-вторых, приведены не только названия, формулировки и этапы выполнения всех учебных проектов (заданий), выносимых на лабораторные занятия, но и возможные способы выполнения некоторых из них. Особое внимание уделено учебным проектам тех модулей, которые пока не имеют надлежащую компьютерную поддержку в виде опубликованного в печати учебного пособия (в первую очередь, это относится к самому большому по объёму модулю «Геометрические преобразования»).

В-третьих, большинство параграфов (исключение составляет параграф 7.2) завершается перечнем индивидуальных заданий, которые выдаются студентам для самостоятельной работы. Было бы разумно отметить, какие из этих заданий могут использоваться в качестве базовых проектов, а какие – в качестве комплексных. Однако это нами не сделано, ибо данная классификация зависит не столько от степени сложности проектов, сколько от уровня подготовки студентов.

Отметим в завершение, что при выдаче индивидуальных заданий и учебных проектов для самостоятельного выполнения преподавателю необходимо учитывать такой психологический фактор, как желание творческого коллектива продолжать, углублять и развивать тот учебный проект, который выполнялся им на лабораторном занятии. Так, например, если творческий коллектив строил компьютерную модель правильного додекаэдра, то и индивидуальные задания, связанные с этим многогранником, желательно продолжить этому же коллективу. К числу таких заданий в нашем случае можно отнести следующие проекты. Построить: окрашенный правильный додекаэдр, усечённый додекаэдр, звёздчатый додекаэдр, додекаэдр со вписанными и описанными около него многогранниками и поверхностями, сечение додекаэдра плоскостью, развёртку додекаэдра; смоделировать перемещение додекаэдра в пространстве; построить тень, создаваемую додекаэдром; изобразить додекаэдр в линейной перспективе; изобразить композицию вращающихся многогранников, один из которых додекаэдр и т. д.

ГЛАВА IV. Реализация концепции при изучении фигур на плоскости

4.1. Модуль «Геометрия на плоскости»

Приведём сначала содержание этого модуля и краткие комментарии к нему.

Модуль «Геометрия на плоскости»: краткий исторический обзор возникновения геометрических понятий. Идея логического построения геометрии. Геометрические фигуры, *изображение фигур с помощью графических редакторов.* Задачи на построение циркулем и линейкой, метод пересечения фигур, алгебраический метод. Задачи, не разрешимые циркулем и линейкой. Золотое сечение. Построение правильных n-угольников. Решение задач на построение другими инструментами, а также *с помощью пакетов поддержки конструктивной геометрии*. Движения и подобия, равные и подобные фигуры. Метрические соотношения. Классические теоремы о треугольниках и окружностях. Теоремы Птолемея, Чевы, Менелая, задачи Эйлера. Площади многоугольников. Теорема Брахмагупты, формула Герона. Равновеликость и равносоставленность. Теорема Бояи-Гервина. Теорема Пифагора, различные способы доказательства. Площадь круга и его частей.

Комментарии к модулю. При изучении темы «Обзор возникновения геометрических понятий» рекомендуется познакомить студентов с некоторыми графическими редакторами, научить строить графические изображения с их помощью, а также создавать чертежи и рисунки в одном из текстовых редакторов для оформления результатов своей учебной и учебно-исследовательской деятельности. Этому знакомству посвящается первое лабораторное занятие.

При изучении раздела «Геометрические построения на плоскости» предполагается на лабораторном занятии рассмотреть системы динамической математики «Живая геометрия» и «GeoGebra». Эти программные средства рекомендованы для использования в школьном курсе математики. Поэтому желательно, чтобы будущие учителя знали их. Работа с одним из этих пакетов планируется при решении конструктивных задач методом пересечения множеств и алгебраическим методом на четырех лабораторно-практических занятиях.

При изучении раздела «Метрические соотношения» рекомендуется продолжить работу с одной из систем динамической геометрии, сделав на лабораторно-практических занятиях упор на применение встроенного в эту систему графического калькулятора. На лабораторном занятии предполагается при решении метрических задач использовать вычислительные возможности одного из языков программирования. Решение некоторых задач по этой теме с однотипными алгоритмами и громоздкими вычислениями можно поддержать составлением коротких программ на языке Qbasic. При этом потребуется умение работать с символьным экраном, которое у студентов к этому времени будет сформировано в курсе информатики. Решению вычислительных задач с помощью компьютера посвящается третья лабораторная работа.

Изучение данного модуля планируется в первом семестре. Общее число аудиторных учебных часов – 72. Из них 36 часов лекционных, 16 – практических, 14 – лабораторно-практических и 6 – лабораторных занятий.

Рассмотрим теперь пути реализации концепции в некоторых темах и разделах первого модуля.

Тема. Обзор возникновения геометрических понятий

В ней рассматриваются следующие вопросы: краткий исторический обзор возникновения геометрических понятий, зарождение геометрии в Древнем мире, развитие геометрии в Древней Греции, идея логического построения геометрии. Геометрические фигуры, изображение фигур с помощью чертёжных инструментов, а также средствами графических и текстовых редакторов.

На изучение темы отводится 2 часа лекций и 2 часа лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении: лекция, практическое, лабораторно-практическое или лабораторное занятие, самостоятельная работа студентов.

Лекции. На лекции предполагается дать краткую установку на подготовку к лабораторной работе, посвящённой использованию графических и текстовых редакторов при изображении геометрических фигур.

Практические и лабораторно-практические занятия не предполагаются.

Лабораторные занятия. Предполагается проведение одного лабораторного занятия в дисплейном классе, посвящённого выполнению лабораторной работы № 1.1.

Лабораторная работа № 1.1 *«Электронные изображения»*.

Организация работы: фронтальная работа в виде нескольких заданий, выполняемая всем коллективом.

Учебные цели: познакомить студентов с некоторыми известными графическими и текстовыми редакторами, научить строить их чертежи и рисунки в этих редакторах для оформления результатов своей учебной и исследовательской деятельности. В конце занятия предполагается познакомить студентов с компьютерной базой данных библиотеки «Липкин» (библиотека подарена математическому факультету одним из его основателей Абрамом Ефимовичем Липкиным), которая содержит подробную информацию о книгах по геометрии, методике её преподавания и истории математики. База данных заполняет нишу между традиционным учётом книг и современными компьютерными технологиями в библиотечном деле. Это программное средство потребуется студентам при выполнении индивидуальных заданий по всем темам курса геометрии.

Задания к лабораторной работе №1.1.

1. Используя графический редактор:

– изобразить на экране произвольные точки;

– стереть по точкам любой фрагмент рисунка;

– вырезать произвольный прямоугольный фрагмент рисунка;

– закрасить произвольную замкнутую область выбранным типом заливки;

– изобразить прямую, окружность, прямоугольник произвольного размера, треугольник, ромб, трапецию и другие фигуры;

– нанести текст на рисунок в произвольном месте;

– сохранить рисунок в файле и загрузить из него;

– распечатать рисунок на принтере.

2. Используя текстовый редактор:

– ввести новый математический текст и отредактировать существующий;

– ввести в текст новую математическую формулу и отредактировать существующую;

– изобразить необходимую геометрическую фигуру в математическом тексте, отредактировать существующую;

– записать, найти и прочитать текст на диске.

3. Используя электронный каталог библиотеки:

– найти необходимую книгу по её названию и автору;

– занести в каталог необходимую информацию о новой книге.

Программное обеспечение: пакет учебных программ «Информатика», созданный коллективом программистов под руководством В.А. Каймина, графический пакет 3D Studio, система Microsoft Word, электронный каталог «Липкин», АРМ читателя IRBIS.

Самостоятельная работа студентов. По данной теме могут быть предложены разнообразные индивидуальные задания.

Связь с традиционным материалом курса геометрии: на лекциях и практических занятиях предусмотрена система заданий по таким темам первого раздела, как исторический обзор возникновения и развития геометрии, конструктивная геометрия, элементарная геометрия, компьютерная геометрия. Таким образом, знания, которые получат студенты на лабораторном занятии, потребуются им в курсе геометрии.

Базовые знания: необходимы элементарные пользовательские навыки в соответствии со школьной программой.

Тема. Геометрические построения на плоскости

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: аксиомы конструктивной геометрии, элементарные построения, основные этапы решения задач, метод пересечения и алгебраический метод решения задач на построение; задачи, не разрешимые циркулем и линейкой, золотое сечение, построение правильных многоугольников, использование других инструментов. Решение задач на построение циркулем и линейкой с помощью пакетов поддержки конструктивной геометрии.

На изучение темы отводится 16 часов лекций, 8 часов практических и 8 – лабораторно-практических занятий, 2 часа лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении.

Лекции. На одной из лекций необходимо уделить время системам динамической геометрии «Живая геометрия» и «GeoGebra», их интерфейсу, графическим возможностям.

Практические занятия планируется проводить без использования информационных технологий.

Лабораторно-практические занятия. Предполагается проведение четырех лабораторно-практических занятий в дисплейном классе, посвященных решению задач на построение циркулем и линейкой с использованием одной из систем динамической геометрии.

Лабораторные занятия. Предполагается проведение одного лабораторного занятия в дисплейном классе, посвящённого выполнению лабораторной работы № 1.2.

Лабораторная работа № 1.2 *«Системы динамической геометрии»*.

Организация работы: фронтальная работа в форме нескольких заданий, выполняемая всем коллективом.

Учебные цели: приобретение умений и навыков работы с одним из программных средств поддержки конструктивной геометрии. Применение системы динамической геометрии при решении конструктивных задач на построение циркулем и линейкой. Обсуждение возможности применения пакетов в школьном курсе геометрии.

Задания к лабораторной работе №1.2. Используя систему динамической геометрии, решить элементарные задачи на построение циркулем и линейкой, которые приводятся, например, в учебном пособии [13, часть 1]. *Замечание:* при работе с системой все элементарные задачи должны быть занесены преподавателем заранее в базу модуля «Планиметрия».

Программное обеспечение: системы динамической геометрии «Живая геометрия», «GeoGebra» и другие.

Самостоятельная работа. Студентам можно предложить задания №№ 1-22, перечисленные на страницах 32-33 учебного пособия [13, часть 1]. При их выполнении рекомендуется использовать упомянутые выше программные средства.

Связь с традиционным материалом курса геометрии: используя возможности систем динамической геометрии, учащиеся на экране компьютера строят искомые фигуры, изображая для этого средствами пакетов окружности, прямые, лучи, отрезки, другие фигуры и их точки пересечения. Решая с помощью виртуальной лаборатории большое число конструктивных задач, студенты закрепляют те знания, которые они получают на лекционных и практических занятиях по этой теме.

Базовые знания: необходимы элементарные пользовательские навыки в соответствии со школьной программой.

Тема. Метрические соотношения

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: обзор основных теорем элементарной (школьной) геометрии, связанных с понятиями длины отрезка и величины угла. Теорема Птолемея, теорема двух синусов и теорема косинусов для выпуклого четырёхугольника, теоремы о биссектрисах, прямые и обратные теоремы Чевы и Менелая, задачи Эйлера. Длина отрезка, площадь многоугольника. Теорема Брахмагупты о площади четырёхугольника, вписанного в окружность, формула Герона. Равновеликость и равносоставленность, теорема Бояи-Гервина. Теорема Пифагора, различные способы доказательства. Площадь круга и его частей. Решение задач вычислительного характера с помощью языков программирования.

На изучение этой темы отводится 18 часов лекций, 8 – практических занятий, 6 – лабораторно-практических занятий и 2 – лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении.

Лекции. На одной из лекций необходимо напомнить студентам основные операторы языка QBASIC, составить несколько программ, позволяющих использовать при решении задач раздела язык программирования.

Практические занятия планируется проводить без использования информационных технологий.

Лабораторно-практические занятия. Предполагается проведение трех лабораторно-практических занятий в дисплейном классе, посвященных решению задач метрического характера, а также задач на вычисление площадей многоугольников, круга и его частей в одной из систем динамической геометрии.

Лабораторные занятия. Предполагается проведение одного лабораторного занятия в дисплейном классе, посвящённого выполнению лабораторной работы № 1.3.

Лабораторная работа № 1.3 *«Задачи вычислительного характера и язык программирования».*

Организация работы: фронтальная работа в форме нескольких заданий, выполняемая всем коллективом.

Учебные цели: приобретение умений и навыков применять персональный компьютер в геометрических задачах, решение которых связано с громоздкими вычислениями и однотипными алгоритмами.

Завершается занятие знакомством с одной из инструментальных тестовых оболочек, допускающих графические изображения.

Задания к лабораторной работе № 1.3.

1. Решить задачи из учебного пособия [13, часть 3] под номерами 20 (стр. 48), 23, 24, 25 (стр. 21), 14, 15, 16 (стр. 64). Используя язык программирования, составить соответствующие программы и найти численное значение длин искомых отрезков или площадей при различных числовых значениях данных отрезков и углов.

2. Занести формулировки задач пункта 1 и варианты ответов в тестовую оболочку.

Программное обеспечение: системы динамической геометрии «Живая геометрия», «GeoGebra», среда Qbasic, тестовая оболочка Vera (автор В.И. Якушевич, ИМФИ КГПУ).

Самостоятельная работа. Для выполнения с помощью языка программирования индивидуальных заданий и наполнения тестовой оболочки можно предложить студентам решить все задачи, относящиеся к рассматриваемому разделу, одного из школьных учебников по геометрии, например [26]. Подготовленную силами студентов тестовую оболочку можно использовать для тестирования школьников и студентов.

Связь с традиционным материалом курса геометрии: на лабораторном занятии решаются задачи непосредственно самого курса геометрии.

Базовые знания: необходимы знания основных операторов языка Бейсик и элементарные пользовательские навыки, в соответствии со школьной программой.

4.2. Модуль «Метод координат»

Приведём сначала содержание модуля и краткие комментарии к нему.

Модуль «Метод координат»: прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве, расстояние между точками, замена системы координат. Векторы на плоскости и в пространстве, их координаты, скалярное произведение векторов. Прямая на плоскости и окружность, уравнения прямой и окружности. *Методы компьютерного моделирования планиметрических фигур. Особенности решения геометрических задач на ограниченном фрагменте дискретной плоскости.* Конические сечения, их канонические уравнения. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду. *Методы создания анимационного эффекта на экране компьютера.* Циклоида, эпициклоида и гипоциклоида, винтовая линия. Критерий разрешимости конструктивных задач. Специальные кривые, используемые при решении конструктивных задач, не разрешимых циркулем и линейкой. *Пакет символьных преобразований Maple, его графические возможности.* Векторное и смешанное произведения векторов. Уравнения плоскости и прямой в пространстве, сферы и винтовой линии. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Задачи метрического и позиционного характера по теме плоскость и прямая в пространстве.

<u>Комментарии к модулю</u>. В теме «Прямая и окружность на плоскости» предполагается проведение лабораторной работы, посвящённой выполнению учебного проекта «Треугольник».

При изучении темы «Линии второго порядка», кроме традиционного теоретического материала и обычных методов изображения кривых, предполагается построить модели линий второго порядка на экране компьютера (второе лабораторное занятие модуля). На этом занятии также впервые применяются методы создания на экране компьютера анимационного эффекта.

После изучения темы «Циклоидные и другие кривые» предполагается провести третье лабораторное занятие, посвящённое знакомству с пакетом

Maple и построению с его помощью различных плоских кривых, включая циклоидальные.

Изучение второго модуля планируется во 2-ом семестре (некоторые разделы аналитической геометрии в пространстве будут рассмотрены в третьем модуле). Общее количество аудиторных учебных часов – 72. Из них 36 часов лекционных, 26 – практических, 4 – лабораторно-практических, 6 – лабораторных.

Рассмотрим теперь возможные пути реализации концепции КПГ в основных темах второго модуля.

Тема. Система координат на плоскости и в пространстве, векторы

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве; замена системы координат; расстояние между точками; векторы на плоскости и в пространстве, их координаты, скалярное произведение векторов.

На изучение темы отводится 6 часов лекционных занятий, 6 – практических и 2 – лабораторно-практических занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией сформулированной нами во второй главе концепции КПГ.

Лекции. В трёх последующих модулях предполагается выполнение студентами базовых, опорных и комплексных учебных проектов, связанных с изображением на дисплее произвольно расположенных фигур или с созданием эффекта вращения фигуры вокруг начала координат (на плоскости) или вокруг оси координат (в пространстве). Изучение же геометрических преобразований, дающих для этого необходимое теоретическое, а главное, аналитическое обоснование, предполагается лишь только в четвертом модуле. Чтобы в предшествующих ему модулях не ограничивать студентов рамками статической визуализации для «оживления» изображения можно с успехом использовать формулы поворота и переноса системы координат. Поэтому на лекции необходимо не только вывести соответствующие формулы замены координат, но и обратить внимание студентов на возможность использования этих формул для создания динамических эффектов.

Практические занятия. Решение некоторых традиционных для аналитического и векторного метода задач, например, связанных с установлением коллинеарности и компланарности, ориентацией плоскости, разложением вектора по неколлинеарным и некомпланарным векторам, сопровождается составлением вычислительных программ. На практических занятиях можно обсудить решение следующих задач и составление соответствующих Бейсик-программ:

Задача 1. Зная координаты двух векторов, определить их коллинеарность.

Задача 2. Известно, что базисные векторы положительно ориентируют плоскость. Зная координаты двух неколлинеарных векторов относительно этого базиса, выяснить, каким образом они ориентируют плоскость – положительно или отрицательно.

Задача 3. Зная координаты трёх векторов на плоскости, первые два из которых неколлинеарные, найти разложение последнего вектора по первым двум.

Задача 4. Зная координаты трёх векторов, определить их компланарность.

Задача 5. Зная координаты четырёх векторов в пространстве, первые три из которых некомпланарные, найти разложение последнего вектора по первым трём.

Кроме приведённых выше, можно рассмотреть большое количество аналогичных задач, связанных с определением координат точек или векторов, а также с нахождением коэффициентов линейных комбинаций векторов.

Для примера рассмотрим мотивировку и решение первых трёх задач.

Мотивировка и решение задачи 1. Умение определять коллинеарность двух векторов позволит студентам в дальнейшем успешно решать вопрос о принадлежности трёх точек одной прямой, о параллельности двух прямых, прямой и вектора и т.д. Одновременно студенты вспомнят известные им из школы основные операторы и процедуры языка программирования Бейсик. Приведём пример такой программы. Через *xa* и *ya* в программе обозначены координаты вектора $\vec{a}$, а через *xb* и *yb* – координаты вектора $\vec{b}$.

```
REM определение коллинеарности векторов
DATA 2,4, 6,12
READ xa,ya, xb,yb
IF xa*yb – xb*ya = 0 THEN
  PRINT "векторы коллинеарны"
  ELSE
  PRINT "векторы неколлинеарны"
END IF
```

Мотивировка и решение задачи 2. Эта задача при традиционном изложении темы, как правило, не рассматривается. Однако она потребуется нам для элементарного способа определения видимости грани многогранника и элементарной клетки поверхности (полигона).

```
REM ориентация плоскости парой неколлинеарных векторов
DATA 1,-2, 3,7
READ xa,ya, xb,yb
det = xa*yb – xb*ya
IF det = 0 THEN
 PRINT "векторы коллинеарны"
 ELSEIF det > 0 THEN
 PRINT "векторы положительно ориентируют плоскость"
 ELSEIF det < 0 THEN
 PRINT "векторы отрицательно ориентируют плоскость"
END IF
```

Мотивировка и решение задачи 3. Мы мотивируем необходимость решения этой задачи не только использованием её при компьютерном моделировании геометрических фигур, но и приложениями в физике. В механике приходится часто раскладывать вектор силы и скорости на две или три составляющие.

```
REM разложение вектора по двум неколлинеарным векторам
DATA 1,-2,  3,7,  12,-8
READ xa, ya,  xb, yb,  xc, yc
det = xa*yb – xb*ya
IF det = 0 THEN
 PRINT “Векторы коллинеарны. Искомого разложения нет”
ELSE
  x = (xc*yb – yc*xb) / det
  y = (yc*xa – xc*ya) / det
  PRINT “Коэффициенты разложения равны”; x, y
END IF
```

Программы выглядят достаточно просто, однако все они нуждаются в детальном обсуждении, поскольку потребуются уже на ближайших лабораторных занятиях.

Лабораторные занятия не предполагаются.

Тема. Прямая и окружность на плоскости

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: прямая на плоскости, параметрические и общее уравнения прямой, исследования общего уравнения прямой, взаимное расположение прямых, расстояние от точки до прямой. Окружность, каноническое и параметрические уравнения окружности, задачи, приводящие к окружности. Методы компьютерного моделирования планиметрических фигур; особенности решения геометрических задач на ограниченном фрагменте дискретной плоскости.

На изучение темы отводится 8 часов лекций, 8 – практических и 2 – лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении.

Лекции. Необходимо рассказать студентам о компьютерной геометрии как области научных знаний, тесно связанной с информатикой и геометрией, а также о некоторых основных методах компьютерного моделирования планиметрических фигур. На лекции желательно составить программы (подпрограммы) перехода от прямоугольных координат плоскости к экранным координатам, изображения прямой и окружности по их параметрическим уравнениям.

Подпрограмма (пометим её **uv**) перехода к экранным координатам простая. Во многих случаях, не связанных с обучением геометрии, её отдельно не составляют, а используют непосредственно в графических операторах, подставляя соответствующие выражения вместо параметров. Однако с точки зрения формирования у студентов геометрической культуры она нужна именно в виде отдельной подпрограммы. Необходимо особо подчеркнуть и обратить внимание студентов на то, что формулы, содержащиеся в этой подпрограмме, представляют собой аналитическую запись замены одной системы координат xy (в компьютерной геометрии её иногда называют мировой) на другую – uv (экранную). Для этого сначала совершается перенос системы координат на вектор, координаты которого совпадают с координатами центра экрана. Затем к полученному образу применяется осевая симметрия относительно оси абсцисс и, наконец, гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом m – масштабом изображения. Таким образом, студенты имеют возможность использовать материал «Замена системы координат» при визуализации планиметрических фигур. Отметим также, для того чтобы параметрически заданная окружность изображалась не в виде овала (это происходит в связи с искажением экрана), а так, как мы привыкли её видеть, то нужно дополнительно произвести растяжение плоскости вдоль оси абсцисс. Для этого первую координату каждой точки-прообраза необходимо умножить на некоторый коэффициент. Подпрограмму замены координат можно представить в следующем виде:

```
REM подпрограмма вычисления экранных координат точки
uv: u = 1.25 * m * x + 320: v = - m * y + 175: RETURN
```

Необходимо обратить внимание студентов на то, что при компьютерном моделировании геометрических фигур всевозможные преобразования координат или уравнений графических объектов удобнее выполнять в мировой системе координат *xy* и лишь в самом конце перед выводом изображения на экран дисплея необходимо переходить к экранной системе координат *uv*.

Желательно особо обсудить со студентами проблемы, связанные с дискретностью графического экрана компьютера (возникают особенности в изображениях отрезков, окружностей, других линий), с ограниченностью его размеров. В качестве примера на лекции можно рассмотреть выполнение следующего задания.

Задание. Составить программу, которая по двум заданным точкам *P* и *Q* строит ту часть луча *PQ*, которая помещается на экране персонального компьютера.

Требуемую программу целесообразно не только составить, но и проиллюстрировать результаты её выполнения на демонстрационных экранах в лекционной аудитории. Кроме того, надо иметь в виду, что программа будет нужна студентам в качестве подпрограммы на ближайшем лабораторном занятии при выполнении учебного проекта. Программа одновременно демонстрирует работу оператора LINE и функции POINT и показывает важность параметрических уравнений прямой. Приведём возможный вариант выполнения задания.

Выполнение задания. Координаты точек *P* и *Q* обозначим соответственно (*xp*, *yp*) и (*xq*, *yq*). Если (*x*, *y*) координаты произвольной точки *M* на луче *PQ*, тогда из коллинеарности векторов $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{PM}$ следует, что существует такое неотрицательное *t*, для которого $x = t*(xq - xp) + xp$ и $y = t*(yq - yp) + yp$. Присвоим параметру *t* первоначально значение 0. Затем будем увеличивать это значение на одно и то же постоянное число, допустим 0,1. Необходимо найти такое значение *t*, для которого точка *M*, соответствующая этому параметру ещё принадлежит экрану, а точка, соответствующая параметру *t* + 0,1, уже лежит за его пределами. После этого остаётся соединить начало *P* изображаемого луча и найденную точку *M* отрезком. Установить принадлежность точки *M*(*x*, *y*) экрану можно с помощью функции POINT(*x*, *y*), которая определяет код (неотрицательное число) цвета точки (*x*, *y*). Если же значение POINT равно минус единице, то это означает, что точка *M* лежит за пределами экрана. Приведём возможный вариант такой программы.

```
 REM программа луч PQ
 SCREEN 9: xp=30: yp=240: xq=120: yq=80: t=0
luch: x=t*(xq-xp)+xp: y=t*(yq-yp)+yp
 IF POINT(u, v) > = 0 THEN t = t + 0.1: GOTO luch
 LINE(xp, yp) – (x, y): END
```

Практические занятия. Планируется выполнение ряда заданий, связанных с составлением несложных программ, которые алгоритмизируют некоторые традиционные для аналитической геометрии задачи вычислительного характера, не предполагающие визуализации, и которые будут необходимы студентам при выполнении ряда проектов. Некоторые практические занятия желательно провести в компьютерном классе, чтобы «рукописную» часть работы можно было совместить с «машинной». Одновременно можно рассмотреть не только эти, но и составленные ранее программы по теме «Векторы». При отсутствии такой возможности студентам предлагается после занятий в индивидуальном порядке самостоятельно проверить составленные ими программы в компьютерном классе.

К такого рода заданиям относятся задачи, в которых требуется вычислить координаты точек, принадлежащих пересечению фигур, например, двух прямых, прямой и окружности, двух окружностей и так далее. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача. Найти координаты общей точки двух непараллельных прямых, каждая из которых задана точкой и направляющим вектором.

Желательно после решения этой задачи составить соответствующую программу на языке Qbasic, поскольку она будет нужна на лабораторном занятии. Пусть одна прямая задана точкой ($x1$, $y1$) и направляющим вектором (xm, ym), другая соответственно точкой ($x2$, $y2$) и направляющим вектором (xn, yn). Составляя канонические уравнения этих прямых и решая соответствующую систему, мы получим следующее решение:

$$x = (xm \cdot Q2 - xn \cdot Q1)/(xm \cdot yn - xn \cdot ym)$$

$$y = (ym \cdot Q2 - yn \cdot Q1)/(xm \cdot yn - xn \cdot ym),$$

где $Q1 = x1 \cdot ym - y1 \cdot xm$ и $Q2 = x2 \cdot yn - y2 \cdot xn$.

Соответствующая программа будет иметь вид:

```
REM программа вычисления координат точки пересечения прямых,
REM каждая из которых задана точкой и направляющим вектором
x1 = 2: y1 = 3: xm = -3: ym = 2
x2 = -2: y2 = 1: xn = 3: yn = 4
q1 = x1 * ym - y1 * xm: q2 = x2 * yn - y2 * xn
t = xm * yn - xn * ym: tx = xm * q2 - xn * q1
ty = ym * q2 - yn * q1
IF t <> 0 THEN
  x = tx / t: y = ty / t: PRINT «прямые пересекаются в точке»; x, y
ELSE
 IF tx ^ 2 + ty ^ 2 = 0 THEN PRINT “прямые совпадают”
 IF tx ^ 2 + ty ^ 2<>0 THEN PRINT “прямые параллельны”
END IF
```

Составленную программу желательно записать на винчестер, чтобы на ближайшем лабораторном занятии не терять время на её составление. Обратим внимание, что эта программа не связана с графическим экраном.

Лабораторные занятия. Предполагается проведение одного лабораторного занятия в дисплейном классе, посвящённого выполнению лабораторной работы № 2.1.

Лабораторная работа № 2.1 «Прямые и окружности».

Организация работы: лабораторная работа проводится в форме учебного проекта № 2.1.1 одновременно всеми студентами подгруппы под руководством преподавателя.

Учебные цели: научиться применять результаты элементарной геометрии, векторный и координатный методы при компьютерном моделировании простейших планиметрических фигур, решении задач элементарной геометрии и выводе соответствующего изображения на экран компьютера.

Учебный проект № 2.1.1 «Треугольник». Треугольник задан координатами своих вершин. На экране компьютера построить изображение этого треугольника, его медианы, высоты и биссектрисы, выходящих из одной вершины, серединного перпендикуляра к стороне, противолежащей этой вершине, вписанной, вневписанной и описанной окружностей.

Выполнение проекта можно разбить на следующие три этапа.

ЭТАП №1. На экране компьютера построить изображение треугольника, его медианы и высоты.

ЭТАП №2. К построенному на предыдущем этапе изображению добавить изображение серединного перпендикуляра к одной из сторон треугольника и описанной окружности.

ЭТАП №3. К построенному на предыдущем этапе изображению добавить изображение биссектрисы, вписанной и вневписанной окружностей и двух лучей, дополняющих стороны треугольника до прямых, которых касается вневписанная окружность.

В качестве примера приведём вариант выполнения первого этапа проекта.

Выполнение ЭТАПА №1. Составим сначала первую часть программы, позволяющую построить на дисплее изображение треугольника с обозначением его вершин. Прокомментируем выполнение этого этапа.

В первых двух строках программы поместим ремарку, зададим графический экран, масштаб m и число π (оно нам понадобится дальше, при изображении окружности по её параметрическому уравнению, и при выполнении первой этапа его можно не задавать).

В третьей строке зададим координаты вершин треугольника ABC относительно некоторой фиксированной прямоугольной системы координат, используя для этого массивы x и y.

В четвёртой строке перейдём к экранным координатам u и v, используя для этой цели составленную на лекции подпрограмму **uv**. Для этого откроем цикл по i, присвоим переменным x и y координаты i-ой вершины треугольника, обратимся к подпрограмме **uv**, занесём эти значения в соответствующие массивы и закроем цикл.

В следующей строке построим изображение треугольника. Сначала изобразим вершину C. Затем, организовав цикл по i, – три стороны треугольника ABC.

В последних трёх строках изобразим на экране ПК буквы, обозначающие каждую вершину треугольника. При этом необходимо учесть, что оператор LOCATE позволяет выводить текст с любой позиции, но не в режиме графического, а текстового экрана (его разрешимость 25×80), причём первый параметр – это номер строки (соответствует второй координате), а второй – номер столбца (соответствует первой координате). Но тогда, если точка имеет координаты (u, v) в графическом экране, то соответствующая ей точка в текстовом экране – ($25 \cdot v/350$, $80 \cdot u/640$) или ($v/14$, $u/8$). Завершим последнюю строку командой SLEEP, которая приостанавливает выполнение программы до нажатия любой клавиши. Приведём эту часть программы:

REM треугольник ABC

```
SCREEN 9: m = 30: pi = 3.142
x(1) = 6: y(1) = -1: x(2) = -1: y(2) = 3: x(3) = -2: y(3) = -1
FOR i = 1 TO 3: x = x(i): y = y(i): GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v: NEXT i
PSET (u(3), v(3)): FOR i = 1 TO 3: LINE -(u(i), v(i)): NEXT i
LOCATE v(1) / 14 + 1, u(1) / 8 + 1: PRINT "A"
LOCATE v(2) / 14, u(2) / 8: PRINT "B"
LOCATE v(3) / 14 + 1, u(3) / 8 - 1: PRINT "C": SLEEP
```

Построим теперь дополнительно изображение медианы *BM*. Для составления соответствующего фрагмента программы студенты должны вспомнить формулы нахождения координат середины отрезка по координатам его концов. К составленной программе добавляются следующие строки:

```
REM построение медианы BM
x(4) = (x(1) + x(3)) / 2: y(4) = (y(1) + y(3)) / 2
x = x(4): y = y(4): GOSUB uv: u(4) = u: v(4) = v
LINE (u(2), v(2))-(u(4), v(4)), 14
LOCATE v(4) / 14 + 1, u(4) / 8 + 1: PRINT «M»: SLEEP
```

В завершение первого этапа осталось построить на дисплее изображение высоты *BH*. Для решения этой задачи потребуется подпрограмма (пометим её **peresml**), вычисляющая координаты точки пересечения двух непараллельных прямых, каждая из которых задана точкой и направляющим вектором (такая подпрограмма составлена на практическом занятии). Проекцию *H* вершины *B* на прямую *AC* найдём как точку пересечения двух прямых. В качестве первой прямой возьмём искомую высоту. Точка *B* принадлежит этой прямой, поэтому положим $x1 = x(2)$ и $y1 = y(2)$. В качестве направляющего вектора первой прямой возьмём нормальный вектор прямой *AC*, например, вектор с координатами $xm = y(3) - y(1)$ и $ym = x(1) - x(3)$. Нахождение координат этого вектора выполняется каждым студентом самостоятельно, и многое зависит от того, как им усвоена соответствующая теория на предыдущих занятиях. В качестве второй прямой возьмём *AC*. В этом случае $x2 = x(1)$, $y2 = y(1)$,

$xn = x(3) - x(1)$, $yn = y(3) - y(1)$. Таким образом, к основному блоку программы добавляются следующие строки:

```
REM построение высоты BH
x1 = x(2): y1 = y(2): xm = y(3) - y(1): ym = x(1) - x(3)
x2 = x(1): y2 = y(1): xn = x(3) - x(1): yn = y(3) - y(1)
GOSUB peresml: x(5) = x: y(5) = y: GOSUB uv: u(5) = u: v(5) = v
LINE (u(2), v(2)) - (u(5), v(5)), 2
LOCATE v(5) / 14 + 1, u(5) / 8 + 1: PRINT "H": SLEEP
```

У каждого студента есть возможность на экране компьютера увидеть построенную им «высоту» и при наличии ошибки, не дожидаясь помощи преподавателя, исправить её. В результате выполнения программы на экране должно появиться следующее изображение, которое представлено на рисунке 8.

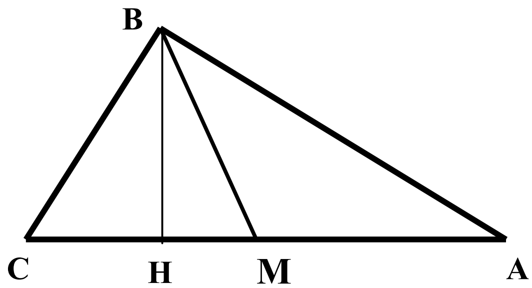


Рис. 8

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой; вычисление координат точки пересечения прямых, каждая из которых задана точкой и направляющим вектором; изображение луча, заданного начальной и любой другой своей точкой; изображение окружности, заданной радиусом и центром.

Программное обеспечение: среда Qbasic.

Самостоятельная работа студентов. Существует целая серия задач элементарной геометрии, которые не ограничиваются только получением численного результата (либо вообще не требуют такового), а предполагают установление факта инцидентности некоторых точек и линий. Такие задачи можно эффективно решать, визуализируя на экране персонального компьютера необходимую инцидентность. Большинство из них можно предложить студентам в качестве учебных проектов для выполнения во внеучебное время.

Особый интерес представляют также задачи элементарной геометрии, связанные с получением различных числовых характеристик, в которых планиметрические фигуры заданы не координатами вершин, а длинами различных отрезков (сторон, медиан, высот и т.д.) и величинами тех или иных углов. Другими словами, представляется целесообразным рассмотреть задачи по содержанию и формулировке, более приближённые к школьным. Однако для большей наглядности (и визуального контроля с помощью компьютера) их можно дополнить требованием построения компьютерной модели фигуры и выводом на экран компьютера необходимой числовой информации.

Приведём некоторые задачи и учебные проекты, которые можно поручить студентам для самостоятельного выполнения.

«Линия ортоцентров треугольников». Построить на дисплее линию ортоцентров треугольников, две вершины которых фиксированы, а третья – перемещается по прямой, параллельной противоположной стороне (см. [104]).

«Окружность девяти точек». Для произвольного треугольника построить на дисплее окружность девяти точек Эйлера, сами эти точки (см. [104], [198]).

«Внешний треугольник Наполеона». Если на сторонах данного треугольника вне его построены равносторонние треугольники, то их центры являются вершинами равностороннего треугольника (внешний треугольник Наполеона). Окружности, описанные около построенных треугольников, имеют общую точку. Построить на дисплее перечисленные выше треугольники и окружности (см. [197]).

«Внутренний треугольник Наполеона». Если на сторонах данного треугольника вовнутрь его построены равносторонние треугольники, то их

центры являются вершинами равностороннего треугольника (внутренний треугольник Наполеона). Центры внутреннего и внешнего треугольников Наполеона совпадают. Построить на дисплее перечисленные выше треугольники и окружности (см. [197]).

«Внешние треугольники». Пусть на сторонах данного треугольника вне его построены треугольники таким образом, что сумма их углов, опирающихся на стороны данного треугольника, равна развёрнутому углу. Тогда: а) окружности, описанные около построенных треугольников, имеют общую точку; б) центры этих треугольников образуют треугольник, углы которого равны углам построенных треугольников, опирающихся на стороны данного треугольника. Построить на дисплее перечисленные выше треугольники и окружности.

«Замечательные точки треугольника». Построить на дисплее треугольник и все его замечательные точки (см. [104], [203]).

«Прямая Эйлера». Изобразить на дисплее треугольник, три точки прямой Эйлера, саму прямую (см. [104]).

«Правильные и звёздчатые многоугольники». Построить на дисплее изображения различных правильных и звёздчатых многоугольников (см. [104]).

«Паркеты из закрученных многоугольников». Построить на дисплее изображения закрученных многоугольников, а также паркеты из семейств закрученных треугольников, квадратов, шестиугольников (см. [104]).

«Построение треугольника по трём сторонам». Заданы три положительных числа. Выяснить, могут ли они быть сторонами треугольника и если да, то, выбрав максимально возможный масштаб, построить на дисплее его изображение.

Рассмотрим, например, выполнение последней задачи «Построение треугольника по трём сторонам». Методическая особенность решения задач такого типа связана с тем, что студент должен сам выбрать некоторую систему координат xy и найти координаты вершин треугольника. Причём сделать это нужно так, чтобы координаты вершин определялись достаточно просто. Например, пусть начало координат совпадает с серединой стороны *BC*, ось абсцисс содержит сторону *BC*, а вершина *A* лежит в положительной полуплоскости относительно оси абсцисс (рис. 9).

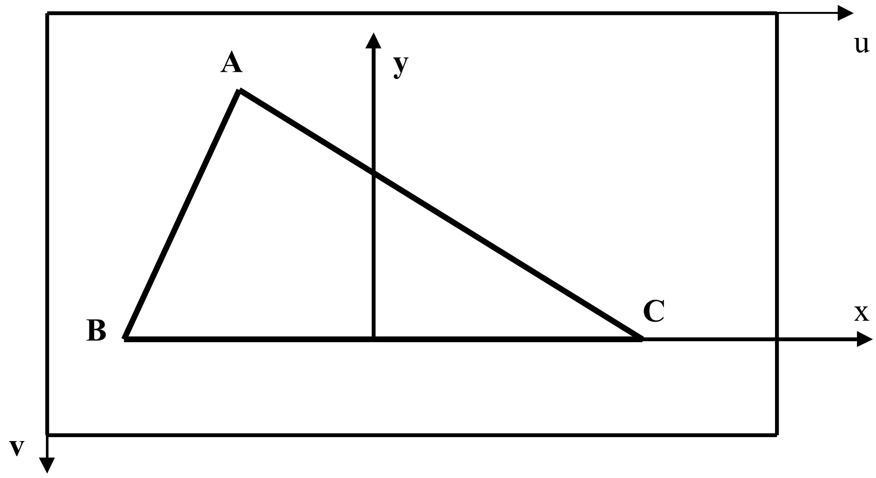


Рис. 9

Зададим сначала стороны треугольника и проверим, могут ли они являться сторонами треугольника?

REM треугольник

SCREEN 9: a = 3: b = 4: c = 2

IF a < b+c AND b < a+c AND c < a+b THEN

Используя теорему косинусов, найдём косинус угла *B*:

co = (a^2 + c^2 – b^2) / (2*a*c)

координаты вершины *A* и максимальное значение maxy модуля ординат вершин треугольника в системе координат *xy*:

x(1) = c*co – a/2: y(1) = c*SQR(1 – co^2): maxy = y(1)

Найдём теперь координаты вершин *B* и *C*:

x(2) = -a/2: y(2) = 0: x(3) = a/2: y(3) = 0

Вычислим максимальное значение maxx модуля абсцисс вершин треугольника:

IF x(1) > = x (2) AND x(1) < = x(3) THEN maxx = x(3) ELSE maxx = ABS (x (1))

Выбрав теперь наибольшее из чисел maxx, maxy, подберём такой масштаб *m*, чтобы изображение треугольника *ABC* было подобно оригиналу и имело максимально возможные размеры на экране компьютера:

```
IF maxx>maxy THEN m=300/(1.25*maxx) ELSE m=300/(1.25*maxy)
```

Отметим здесь, что начало мировой системы координат проектируется в точку с экранными координатами (320, 320). Дальнейшая часть программы стандартна:

```
FOR i=1 to 3
 u(i) = 1.25 * m * x(i) +320: v(i) = - m * y + 320
NEXT i
PSET (u(3), v(3)): FOR j=1 to 3: LINE-(u(j), v(j)): NEXT j
ELSE PRINT "стороны недопустимы"
END IF
```

Рассмотренная задача, позволяет студентам успешно справиться с достаточно большим набором однотипных задач, связанных с решением треугольников и построением их компьютерной модели. Имеются в виду задачи, в которых вместе с данными по условию элементами треугольника находятся, если противное не оговорено, стороны и периметр, углы или их тригонометрические функции, площадь, радиусы описанной, вписанной и вневписанной окружностей, высоты, медианы и биссектрисы, строится на экране ПК изображение треугольника, выводится требуемая информация.

Связь с традиционным материалом курса: на лабораторном занятии решаются задачи элементарной геометрии.

Базовые знания: знание геометрии треугольника, методов векторной алгебры и аналитической геометрии, а также графических средств языка программирования.

Преимущества использования информационных технологий при изучении темы «Прямая и окружность на плоскости». Применение информационных технологий в теме позволяет:

– сконцентрировать внимание студентов при решении целого класса задач на алгоритмах их решения;

– установить связь между аналитическим заданием простейших планиметрических фигур и их изображением;

– рассмотреть большее, чем при традиционном способе обучения, количество задач.

Тема. Линии второго порядка

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: алгебраические линии. Эллипс, каноническое уравнение, исследование канонического уравнения, параметрические уравнения, эллипс как проекция окружности. Гипербола, каноническое уравнение, исследование уравнения, построение гиперболы. Парабола, каноническое уравнение, исследование уравнения, построение параболы. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Методы компьютерного моделирования линий второго порядка и создания анимационного эффекта на экране компьютера.

На изучение темы отводится 8 часов лекций, 8 – практических, 2 – лабораторно-практических и 2 часа лабораторных занятий.

Эта и некоторые последующие темы модуля связаны с изучением плоских кривых. Концепция использования информационных технологий в геометрической подготовке учителя математики позволяет по-новому подойти к методике изложения этих тем. Традиционный подход без использования информационных технологий позволял затронуть изучение лишь небольшого числа кривых, в основном второго порядка. Не устанавливалась их связь с другими кривыми, не рассматривались многие способы образования кривых, другие интересные свойства кривых. Много времени уходило на изображение кривых.

Компьютерно-ориентированная методика преподавания геометрии позволяет каждому студенту на лабораторном занятии стать экспериментатором. Студент может всего за одно занятие самостоятельно построить несколько кривых. Большой простор для фантазии при моделировании кривых. Преподавателю достаточно дать лишь некоторые теоретические сведения и советы в конкретных случаях. При выдаче студентам учебных проектов по этим темам у преподавателя большие возможности. Можно подобрать практически неограниченное число рисунков, в основе которых лежат те или иные кривые. При составлении компьютерной модели такого рисунка студенту необходимо не только знать вывод уравнений кривых, используемых в этом рисунке, но и уметь многое другое, в частности, определять положение новой системы координат, относительно которой кривая задаётся каноническим уравнением.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении.

Лекции. После вывода канонических уравнений конических сечений и параметрических уравнений эллипса желательно составить программу, визуализирующую на экране компьютера эллипс или любой его фрагмент, показать на демонстрационном экране в лекционной аудитории выполнение этой программы. В связи с тем, что гипербола и парабола не принадлежат внутренней области никакого прямоугольника, желательно обсудить особенности изображения этих линий на дисплее. Познакомить студентов с основными методами создания анимационных эффектов.

Практические занятия. Необходимо обсудить вопросы, связанные с использованием точек, отрезков, кривых второго порядка, дуг кривых, а также их аналитических заданий при изображении более сложных фигур (цветов, фигур животных и рыб, лиц людей и т.д.), алгоритмы составления бейсик-программ, визуализирующих эти фигуры. Создание соответствующих программ, их отладка и реализация осуществляются на лабораторном занятии.

Лабораторно-практические занятия. Планируется проведение одного лабораторно-практического занятия, посвященного построению линий второго порядка в одной из систем динамической геометрии.

Лабораторные занятия. Предполагается проведение одного лабораторного занятия в дисплейном классе, посвящённого выполнению лабораторной работы № 2.2.

<u>*Лабораторная работа*</u> *№ 2.2. «Линии второго порядка».*

Организация работы: проводится в форме трёх опорных учебных проектов №№ 2.2.1, 2.2.2, и 2.2.3, выполняемых тремя отдельными творческими студенческими коллективами, на которые разбивается коллектив подгруппы. Преподаватель участвует в проектной деятельности подгрупп в качестве консультанта.

Учебные цели: научиться применять векторный и координатный методы при компьютерном моделировании линий второго порядка, при изображении рисунков, в основе которых лежат комбинации этих линий или их частей, а также при создании анимационных эффектов.

Учебный проект № 2.2.1 «Ромашка». Построить компьютерную модель системы равных между собой эллипсов, центры которых лежат на окружности и делят её на равные части, причём прямые, содержащие большие оси эллипсов, проходят через центр окружности. Создать эффект вращения полученной фигуры вокруг её центра.

Учебный проект № 2.2.2 «Солнышко». Построить компьютерную модель системы равных между собой гипербол, вершины которых лежат на окружности и делят её на равные части, причём прямые, содержащие действительные оси гипербол, проходят через центр окружности. Создать эффект вращения полученной фигуры вокруг её центра.

Учебный проект № 2.2.3 «Подсолнух». Построить компьютерную модель системы равных между собой парабол, вершины которых лежат на окружности и делят её на равные части, причём прямые, содержащие оси парабол, проходят через центр окружности. Создать эффект вращения полученной фигуры вокруг её центра.

Выполнение каждого из этих проектов можно разбить на следующие три этапа:

ЭТАП №1. На экране компьютера построить изображение линии второго порядка (эллипса, гиперболы, параболы) расположенной «канонически» по отношению к системе координат.

ЭТАП №2. На экране компьютера построить изображение линии второго порядка (эллипса, гиперболы, параболы), расположенной произвольно по отношению к системе координат.

ЭТАП №3. На экране компьютера построить изображение фигуры, указанной в проекте. Используя видеостраницы, создать эффект вращения полученной фигуры вокруг её центра.

В качестве примера рассмотрим выполнение второго проекта (варианты выполнения первого и третьего приведены в [104]).

Вариант выполнения проекта № 2.2.2.

Этот проект имеет свои особенности, так как изображаемая линия не является связной и ограниченной.

Выполнение ЭТАПА №1. В процессе реализации этого этапа можно воспользоваться каноническим уравнением гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. В отличие от эллипса, гипербола расположена вне прямоугольника со сторонами 2*а* и 2*в*. В связи с этим у студентов появляются определённые трудности при компьютерном моделировании этой линии. Изображать они должны ту часть гиперболы, которая принадлежит экрану дисплея, причём масштаб подбирается так, чтобы обе вершины гиперболы принадлежали экрану. В первых двух строках программы поместим ремарку и зададим начальные условия:

```
REM гипербола, вещественная ось которой расположена горизонтально
SCREEN 9: m=20: a=3: b=2
```

Выразим одно из неизвестных, допустим x, канонического уравнения гиперболы через другое. Получим следующее соотношение: $x = \pm a\sqrt{1 + y^2/b^2}$. Студенты должны чётко представлять, что знак перед радикалом соответствует одной из ветвей гиперболы. Чтобы для каждой ветви не составлять отдельную подпрограмму можно предложить студентам заменить множители ± 1 перед радикалом на некоторый параметр k и организовать внешний цикл по этому параметру, который будет принимать всего два значения: –1 и +1. Вообще говоря, для студентов первого курса такая процедура может оказаться достаточно сложной. Поэтому они могут обойтись и без неё. Однако после составления собственного варианта программы они должны заметить, что программа содержит два идентичных блока, отличающихся друг от друга лишь одной строкой. Поэтому потребность организовать цикл может появиться у студентов естественным образом. Итак, следующая строка может иметь вид:

```
FOR k = -1 TO 1 STEP 2
```

Изображать каждую ветвь гиперболы можно в два этапа. На первом этапе можно изображать ту часть ветви, которая расположена ниже оси абсцисс. Первый этап должен завершиться после выхода текущей точки за пределы экрана. Отслеживать это событие можно с помощью функции POINT. Затем на втором этапе можно изображать верхнюю часть ветви. Перемещаться по ветви будем с помощью пошагового изменения ординаты, которая в программе реализуется оператором присвоения **y = y - 0.1** на первом этапе и оператором **y = y + 0.1** – на втором. Чтобы сократить программу можно опять предложить студентам организовать внутренний цикл по переменной h, которая будет принимать всего два значения: –1 и +1. В этом случае операторы присваивания можно заменить одним: **y = y + 0.1*h**. Окончательно программа может иметь вид:

```
REM гипербола, вещественная ось которой расположена горизонтально
SCREEN 9
```

```
m = 30: a = 3: b = 2
FOR k = -1 TO 1 STEP 2
 FOR h = -1 TO 1 STEP 2: y = 0
  DO: x = k * a * SQR(1 + y ^ 2 / b ^ 2)
   u = 1.25 * m * x + 320: v = -m * y + 175
   IF y = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE -(u, v)
   y = y + .1 * hy
  LOOP UNTIL POINT(u,v) <0
NEXT h, k:  SLEEP
```

После выполнения программы на экране должно появиться следующее изображение (рис. 10).

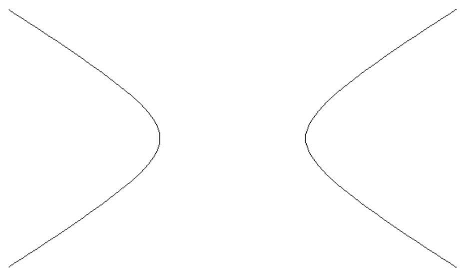


Рис. 10

Выполнение ЭТАПА №2. Для реализации этого этапа достаточно к предыдущей программе добавить значения координат (*x*0, *y*0) нового начала координат и угла поворота *fi*, а также подсчитать координаты точки в новой системе координат. Программа будет иметь следующий вид:

```
REM гипербола, расположенная произвольно
SCREEN 9
m = 30: a = 3: b = 2: fi = 0.1: x0 = 2: y0 = 1
FOR k = -1 TO 1 STEP 2
 FOR h = -1 TO 1 STEP 2: y = 0
  DO: x = k * a * SQR(1 + y ^ 2 / b ^ 2)
   x1 = x * COS (fi) – y * SIN (fi) + x0
   y1 = x * SIN (fi) – y * COS (fi) + y0
   u = 1.25 * m * x1 + 320: v = -m * y1 + 175
   IF y = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE -(u, v)
   y = y + .1 * h
  LOOP UNTIL POINT(u,v) <0
```

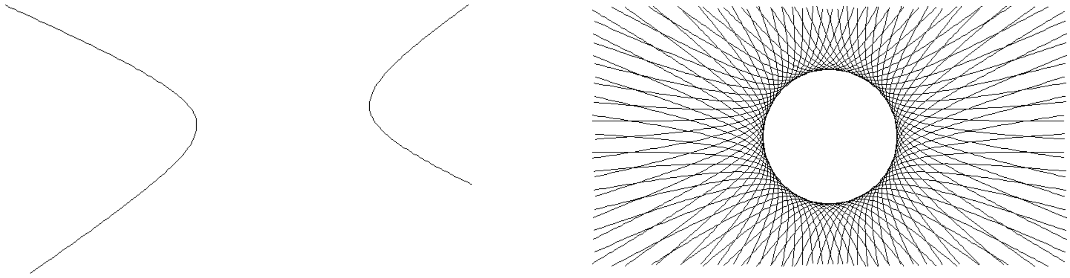
```
NEXT h, k:  SLEEP
```

После выполнения этой программы на экране ПК появится изображение, представленное на рисунке 11 а).

Выполнение ЭТАПА №3. Третий этап завершает выполнение учебного проекта «Солнышко». Студенты должны изобразить n гипербол, вершины которых расположены на окружности с центром в начале координат. Здесь они должны продемонстрировать своё умение использовать составленную программу в качестве тела для внешнего цикла, организованного по переменной *fi*. Поскольку гипербола состоит из двух ветвей, то *fi* достаточно изменять от 0 до π с шагом π/n. Программа может иметь следующий вид:

```
REM семейство гипербол, расположенных по окружности
SCREEN 9
m = 30: a = 3: b = 2: n = 40: pi = 3.142: hfi = pi / n
FOR fi = 0 TO pi STEP hfi
 FOR k = -1 TO 1 STEP 2
  FOR h = -1 TO 1 STEP 2: y = 0
   DO: x = k * a * SQR(1 + y ^ 2 / b ^ 2)
    x1 = x * COS (fi) – y * SIN (fi) + x0
    y1 = x * SIN (fi) – y * COS (fi) + y0
    u = 1.25 * m * x1 + 320: v = -m * y1 + 175
    IF y = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE -(u, v)
    y = y + .1 * hy
   LOOP UNTIL POINT(u,v) <0
 NEXT h, k, hfi:  SLEEP
```

После выполнения этой программы на экране компьютера должно появиться изображение, представленное на рисунке 11 б). Дополнения, которые необходимо сделать к программе для создания эффекта вращения, можно найти в [104].



а) б)

Рис. 11

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой; изображение любой дуги эллипса; изображение любой дуги гиперболы; изображения любой дуги параболы.

Программное обеспечение, необходимое для выполнения лабораторной работы: среда программирования Qbasic.

Самостоятельная работа студентов. Можно предложить задания, связанные с изображением:

– семейства эллипсов с общей большой осью, с общей малой осью, с общим центром (см. задание 7-1 в [104]);

– семейства гипербол с общими вершинами и осями, с общим центром, сопряжённых гипербол (первые три изображения рисунка 12);

– семейства парабол с общей вершиной и осью, с вершинами на окружности (первые три изображения рисунка 13).

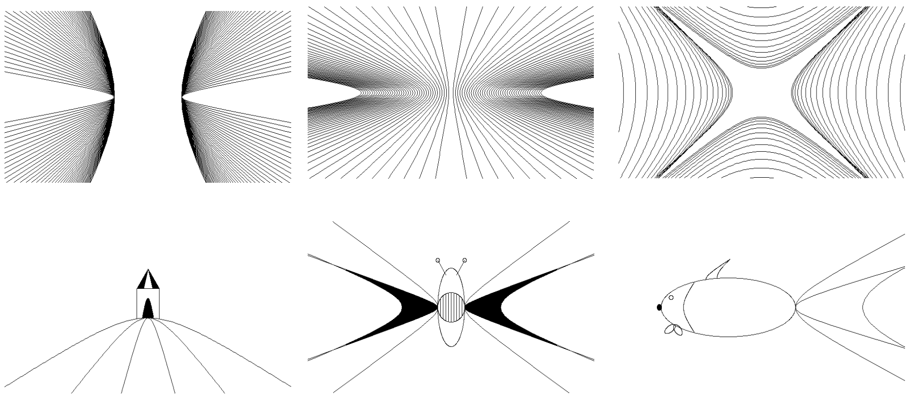


Рис. 12

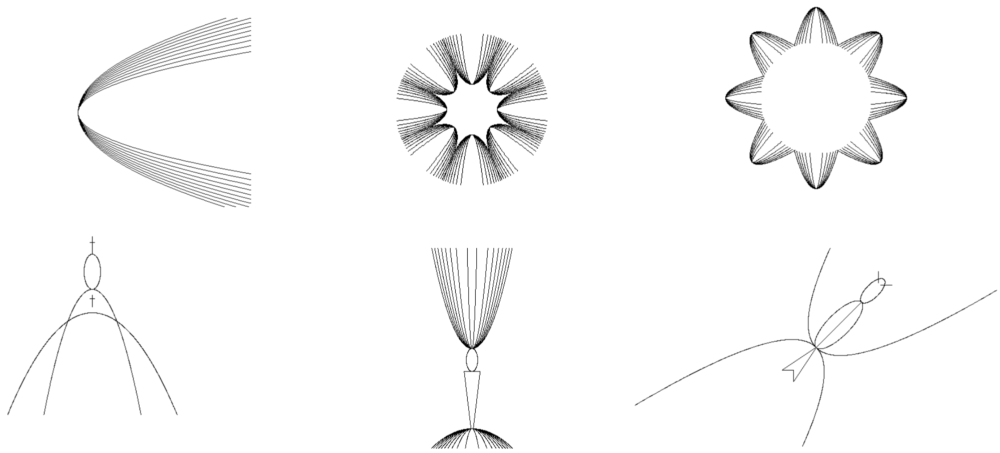


Рис. 13

Целый ряд проектов может быть связан с изображением фигур, состоящих из точек, отрезков, линий второго порядка или их частей: стрекоза, лицо, черепаха (задание 7-2 в [104]), часовня, башня, рыба (последние три изображения рисунка 12), церковь, бокал, мотылёк (последние три изображения рисунка 13).

Связь с традиционным материалом курса геометрии: отрабатываются навыки составления параметрических уравнений кривых второго порядка, формулы поворота и переноса системы координат; выясняется роль параметров при задании дуг, связь изображения фигуры с её аналитическим заданием.

Базовые знания: знание теории линий второго порядка, параметрических способов задания линий; знание способов создания анимационных эффектов с помощью видеостраниц, умение работать с подпрограммами, при обращении к которым необходимо задавать значения всех необходимых параметров, в частности, координат центров линий, полуосей или фокальных параметров, величин углов между большими осями и осью абсцисс, пределов изменения переменных в параметрических и канонических уравнениях линий первого и второго порядка.

Преимущества использования информационных технологий при изучении кривых второго порядка. Информационные технологии позволяют:

– быстро и точно строить статические или динамические модели кривых, семейств кривых на экране компьютера;

– генерировать узоры, орнаменты с использованием некоторых кривых;

– познакомить студентов с различными способами образования кривой;

– моделировать форму кривой варьированием параметров её уравнений.

Тема. Циклоидные и другие кривые

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: параметрические уравнения циклоиды. Построение циклоиды. Циклоидные кривые. Кардиоида. Астроида. Кривая Штейнера. Изображение эпициклоид и гипоциклоид. Компьютерное моделирование циклоидных и других кривых. Пакет символьных преобразований Maple, его графические возможности.

На изучение этой темы можно отвести 4 часа лекций, 4 часа практических занятий и 2 часа лабораторных занятий.

К циклоидным кривым относится большое число кривых, которые могут быть получены одновременно несколькими способами. Например, кардиоиду можно определить как:

1) график уравнения в полярных координатах $\rho = 2r(1-\cos(\varphi))$;

2) траекторию движущейся определённым образом точки;

3) огибающую некоторого семейства линий.

При этом и конструктивные, и аналитические определения указывают способы изучения свойств кривой. Эта методическая особенность отмечена Г. Фройденталем в [210]. Он считает, что «дидактически следует предпочесть многостороннее рассмотрение понятия одностороннему. Если позднее нечто определяют другим способом, то обратная связь с ранее данным генетическим определением не должна опускаться. В конкретном материале должны быть корни последующего логического развития» [210, с.19].

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении.

Лекции. Вывести параметрические уравнения циклоидных кривых, составить программу компьютерного моделирования циклоиды на языке Qbasic. Необходимо познакомить студентов с основными функциями, командами-процедурами и опциями пакета Maple, в первую очередь с теми из них, которые позволяют строить на экране компьютера фигуры двумерной графики. На лекции целесообразно обсудить следующие вопросы:

– основные возможности двумерной графики пакета Maple;
– plot (основная функция двумерной графики);
– построение графиков одной функции;
– построение графиков нескольких функций;
– построение графиков функций, заданных их именами;
– построение графиков функций, заданных процедурами;
– построение графиков функций, заданных параметрически;
– построение графиков функций в полярной системе координат;
– двумерная мультипликация пакета Maple.

Привести пример программы на Maple-языке, продемонстрировать её выполнение. На лекции рекомендуется использовать интерактивную доску.

Практические занятия. Рассмотреть различные частные случаи эпициклоид и гипоциклоид, других плоских кривых, вывести их уравнения, обсудить алгоритмы их визуализации на экране компьютера, построение большинства из них предусмотреть на лабораторном занятии.

Лабораторные занятия. Предполагается проведение одного лабораторного занятия в дисплейном классе, посвящённого выполнению лабораторной работы № 2.3.

<u>Лабораторная работа</u> № 2.3 «Циклоидальные и другие кривые».

Организация работы: фронтальная работа в виде четырёх заданий, выполняемых всем коллективом.

Учебные цели: научиться применять векторный и координатный методы для параметрического задания циклоидальных и других кривых и построения их изображений на экране компьютера с помощью языка Qbasic и пакета Maple.

Задания к лабораторной работе:

1. Построить на экране компьютера изображение циклоиды (включая удлинённую и укороченную), провести компьютерный эксперимент с помощью варьирования параметров. Построения выполнить сначала в среде Qbasic, затем – средствами пакета Maple.

2. Построить на экране компьютера изображение эпициклоиды (включая удлинённую и укороченную), провести компьютерный эксперимент с помощью варьирования параметров. Построения выполнить сначала в среде Qbasic, затем – средствами пакета Maple.

3. Построить на экране компьютера изображение гипоциклоиды (включая удлинённую и укороченную), провести компьютерный эксперимент с помощью варьирования параметров. Построения выполнить сначала в среде Qbasic, затем – средствами пакета Maple.

4. Построить с помощью пакета Maple некоторые специальные кривые, которые используются при решении конструктивных задач, неразрешимых традиционными средствами.

В качестве примера приведём варианты выполнения первых трёх заданий. Начать занятие целесообразно с демонстрационной программы, с помощью которой иллюстрируется динамика происхождения кривой. Такую программу несложно составить на языке Qbasic, с помощью систем динамической геометрии «GeoGebra» или «Живая геометрия», пакета Maple. Причём демонстрационный файл можно создать прямо на занятии (это займёт не более 5 минут). По окончании этого этапа у студентов должно закрепиться сформированное на лекциях и практических занятиях понятие циклоиды, которую описывает фиксированная точка окружности, катящейся без скольжения по прямой. Далее, используя выведенные параметрические уравнения циклоиды и её трохоид, можно составить несложную программу, позволяющую изобразить эти линии на экране ПК. Приведём вариант такой программы сначала на языке QBASIC:

```
REM циклоида (удлинённая при d>r; укороченная при d<r)
SCREEN 9: m = 20: r = 1: d = 1.4: l = 600
FOR t = 0 TO l / (1.25 * m * r) STEP .1
 x = r * t – d * SIN(t): y = r – d * COS(t)
 u = 1.25 * m * x + 10: v = -m * y + 175
 IF t = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE –(u, v)
NEXT t: SLEEP
```

затем на MAPLE-языке:

```
>r:=1: d:=1.4:
>plot ([r*t – d*sin(t), r – d*cos(t), t=0..6*Pi], color=0, title=`Циклоиды`);
```

Используя эти программы, можно изучить форму и свойства циклоиды путём варьирования параметров. Здесь уместно провести компьютерный эксперимент, подбирая параметры уравнения в зависимости от того, лежит точка внутри или вне круга. Таким образом, на этом этапе закрепляется понятие удлинённой и укороченной циклоиды (трохоиды).

При выполнении следующих двух заданий закрепляются сформированные на лекционных и практических занятиях понятия эпициклоиды и гипоциклоиды. Перед тем как перед студентами поставить задачу построения компьютерных моделей этих линий, можно показать демонстрационную программу, имитирующую динамику происхождения кривых. Затем, используя параметрические уравнения эпициклоид:

$$x = (r_1 + r) \cdot \cos(t) - d \cdot \cos((r_1 + r) \cdot t / r)$$

$$y = (r_1 + r) \cdot \sin(t) - d \cdot \sin((r_1 + r) \cdot t / r)$$

и гипоциклоид:

$$x = (r_1 - r) \cdot \cos(t) - d \cdot \cos((r_1 - r) \cdot t / r)$$

$$y = (r_1 - r) \cdot \sin(t) - d \cdot \sin((r_1 - r) \cdot t / r),$$

где r_1 – радиус стационарной (направляющей) окружности, r – радиус подвижной (производящей) окружности, d – расстояние от текущей точки до центра подвижной окружности, t – угол между радиус-вектором центра подвижной окружности и осью абсцисс (параметр), который изменяется от 0 до 2π, составляются соответствующие программы на языке Qbasic. Поскольку при изображении этих линий большую роль играет отношение r/r_1 радиусов этих окружностей, которое называется модулем линии, то в строке, задающей начальные данные, положим $r = p/q$, $r_1 = 1$. Размеры же линии будем регулировать с помощью масштаба m. За основу, как и раньше, возьмём предыдущую программу:

```
REM эпициклоида (удлинённая при d>r; укороченная при d<r)
SCREEN 9: pi = 3.142
m = 80: p = 4: q = 9: r = p / q: r1 = 1: d = r
FOR t = 0 TO 2 * pi * p + .1 STEP .01
 x = (r1 + r) * COS(t) - d * COS(t * (r1 + r) / r)
 y = (r1 + r) * SIN(t) - d * SIN(t * (r1 + r) / r)
 u = 1.25 * m * x + 320: v = -m * y + 175
 IF t = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE -(u, v)
NEXT t: SLEEP
```

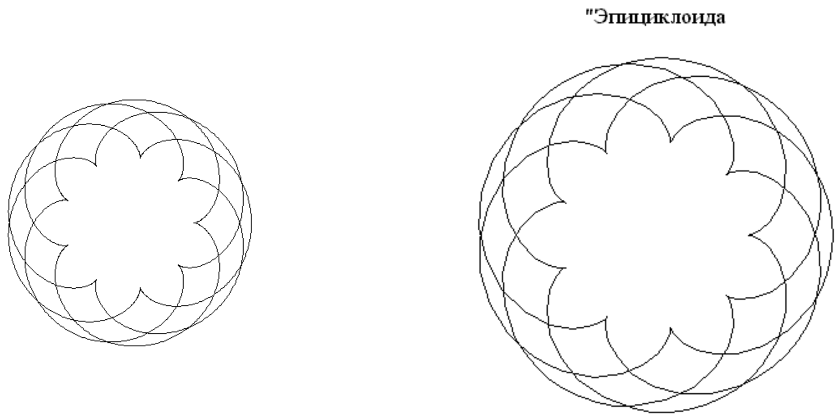
На рисунке 14 а) представлено изображение, которое получается на экране компьютера в результате выполнения этой программы.

Отметим здесь, что верхний предел изменения параметра t в цикле студенты должны установить экспериментально. А именно, для того чтобы текущая точка вернулась в исходную позицию, производящую окружность необходимо «прокатить» по стационарной окружности *p* раз.

На Maple-языке эта программа выглядит следующим образом:

```
>p:=4: q:=9: r:=p/q: r1:=1: d:=r:
>plot ([(r1+r)*cos(t)-d*cos(t*(r1+r)/r), (r1+r)*sin(t)-d*sin(t*(r1+r)/r), t=0..2*Pi*p], color=0, title=`Эпициклоиды`);
```

Получаемое изображение представлено на рисунке 14 б). Оно практически не отличается от предыдущего изображения. Программы для гипоциклоид составляются аналогично.



а) среда Qbasic   Рис. 14   б) Пакет Maple

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой (которая оформлена не как подпрограмма, а в виде отдельной строки цикла программы).

Программное обеспечение: среда программирования Qbasic, пакет Maple.

Самостоятельная работа студентов. Можно предложить студентам задания, связанные с изображением на экране не одной, а целого семейства циклоид, эпициклоид и гипоциклоид. Составить программы, демонстрирующие в динамике построение этих линий.

Кроме циклоидных кривых, можно предложить для построения классы кривых, сгруппированных по смыслу их названия [186, с.4]:

– *по имени исследователя* (квадратриса Динострата, конхоида Никомеда, улитка Паскаля, лемниската Бернулли, локон Аньези, лист Декарта, трисектриса Маклорена, кривая Эйлера, кривая Пеано);

– *по методу построения* (каустики, изоптики, ортооптики, педальные, радиальные, огибающие, эволюты, эвольвенты, циссоиды, конхоиды, рулетты, глисетты, строфоиды);

– *по важному свойству* (трисектрисы, квадратрисы, трактриса, брахистохрона, изохрона, кривые скольжения);

– *по особенности формы* (астроида (звёздная), дельтоида (греческая буква «Δ»), кардиоида (сердцевидная), нефроида (напоминающая почку), розы, восьмёрка, лемнискаты (греч. – украшенные лентами), цепная линия, каппа, жезл, ветряная мельница, бабочка, лист японского клёна, колосья, узорные кривые, овалы, спирали, трёхлистник, трезубец);

– *по строению формулы* (полукубическая парабола, кубическая парабола, логарифмическая спираль, показательная и логарифмическая кривые, интегральный синус (косинус)).

Связь с традиционными разделами курса геометрии: отрабатываются навыки составления уравнений циклоидальных и других кривых, устанавливается зависимость между различными значениями коэффициентов уравнений этих линий и их изображением, знакомство с новым для студентов кинематическим способом построения плоских линий.

Базовые знания: знание методов векторной алгебры и аналитической геометрии, графических средств языка программирования высокого уровня и MAPLE-языка.

Преимущества использования информационных технологий при изучении циклоидных и других кривых. Информационные технологии позволяют:

– быстро и точно построить статическую или динамическую модель кривой, семейства кривых на экране компьютера;

– рассмотреть различные способы построения кривой;

– моделировать форму кривой варьированием параметров её уравнений;

– рассмотреть за одно занятие большое число кривых.

ГЛАВА V. Реализация концепции при изучении фигур в пространстве

Приведем сначала содержание этого модуля и краткие комментарии к нему.

Модуль «Геометрия в пространстве»: Аксиомы стереометрии, геометрические построения в пространстве. Понятия геометрического тела и его поверхности, анализ школьных определений. Изображение пространственных фигур с помощью параллельного проектирования, построение сечений. Аксонометрия. *Вычислительный метод построения изображений пространственных фигур. Методы компьютерного моделирования поверхностей и линий. Задача локальной видимости.*

Правильные многогранники, теорема Эйлера для многогранников, *методы компьютерного моделирования многогранников.* Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения, уравнения этих поверхностей, тор. Поверхности второго порядка, эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие поверхности второго порядка. *Компьютерное моделирование невыпуклых тел, задача глобальной видимости*. Понятие объёма. Способы вычисления объёма, принцип Кавальери. Объём прямой призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара. Вопросы измерения величин. Теоремы существования и единственности измерения площадей и объёмов.

<u>Комментарии к модулю</u>. Для успешной реализации концепции КПГ при изучении фигур в пространстве крайне важно познакомить студентов с методами компьютерного моделирования стереометрических фигур. Поэтому первая тема посвящена методам изображений, основанным на параллельном проектировании: вычислительный метод построения изображений пространственных фигур при параллельном проектировании, методы компьютерного моделирования поверхностей и линий в пространстве, алгебраический и векторный способы решения задачи

локальной видимости. Завершается глава разделом, посвященным многогранникам и поверхностям, в том числе правильным многогранникам и поверхностям второго порядка.

Изучение модуля планируется в третьем семестре. Общее число аудиторных учебных часов – 72. Из них 36 часов лекций, 22 – практических, 6 – лабораторно-практических и 8 – лабораторных занятий.

Рассмотрим теперь возможные пути реализации концепции компьютерной поддержки в теме «Методы изображения» и двух темах раздела «Многогранники и поверхности».

5.1. Тема. Методы изображения

В данной теме рассматриваются следующие вопросы: параллельное проектирование, инварианты параллельного проектирования. Изображение плоских и пространственных фигур с помощью параллельного проектирования, теорема Польке – Шварца. Аксонометрия. Полнота, построение полных чертежей в средней школе. Изображение сечений многогранников. Вычислительный метод построения изображений фигур при параллельном проектировании. Методы компьютерного моделирования поверхностей и линий в пространстве. Алгебраический и векторный способы решения задачи локальной видимости.

На изучение темы отводится 8 часов лекций, по 4 часа практических и лабораторно-практических занятий, 2 часа лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении.

При проведении лекционных и практических занятий необходимо тщательно подготовиться к тому, чтобы лабораторные занятия в дисплейном классе прошли максимально эффективно. Это позволит не только компенсировать частичную потерю часов, связанных с необходимостью изучения некоторых вопросов, относящихся больше к информатике, чем к геометрии, но и получить определённый выигрыш в качестве усвоения сугубо геометрического материала темы.

Лекции. Одним из наиболее важных элементов компьютерного моделирования пространственных фигур является так называемый *вычислительный метод построения изображений*. После рассмотрения традиционных методов построения изображений предполагается познакомить студентов с методом визуализации фигур на дисплее, в основе которого лежит параллельное проектирование. Для этого на лекции необходимо вывести формулы, связывающие координаты точки-оригинала с координатами её проекции на экран компьютера. Остановимся более подробно на выводе этих формул.

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат XYZ, а на плоскости проекции – систему координат UV. Будем считать, что плоскость экрана дисплея совмещена с плоскостью проекции. Каждой точке $A'(x, y, z)$ пространства соответствует её изображение $A(u, v)$ на плоскости проекции. Но тогда координаты u, v являются функциями координат x, y, z. Поскольку параллельное проектирование сохраняет прямолинейность расположения точек и отношение длин параллельных отрезков, то эти функции – линейные (аккуратное доказательство этого факта не выходит за рамки школьного курса математики и может быть приведено на лекции), т.е.

$$u = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \quad v = a_2x + b_2y + c_2z + d_2.$$

Если коэффициенты в формулах задать произвольно (требуется лишь непропорциональность строк из коэффициентов при x, y, z), то изображение может оказаться неудачным. На лекции рекомендуется провести небольшой компьютерный эксперимент, который показывает влияние коэффициентов на наглядность получаемого изображения. Для этого на демонстрационном мониторе сначала можно показать изображение какой-нибудь известной стереометрической фигуры, полученное с помощью языка программирования и с использованием приведённых выше формул со специально подобранными коэффициентами. Затем продемонстрировать изображение этой же фигуры, полученное после замены коэффициентов на произвольные. Изображение будет по-прежнему правильным, однако далеко не всегда наглядным. В результате эксперимента студенты должны убедиться в том, что удобнее сначала выбрать изображение четырёх точек общего положения, а затем вычислить коэффициенты, соответствующие сделанному выбору.

Задача нахождения требуемых коэффициентов сводится к решению восьми линейных уравнений с восемью неизвестными. Такая система всегда будет иметь решение, т.к. её основной определитель отличен от нуля. Чтобы система имела наиболее простой вид, за четыре изображаемые точки удобно взять те точки пространства, координаты которых имеют наиболее простой вид, например, вершины координатного тетраэдра, т. е. точки (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). Обозначим проекции этих точек – O, E_1, E_2, E_3, соответственно.

1. *Кабинетная проекция*. На лекции можно рассмотреть наиболее часто используемый на практике способ расположения точек O, E_1, E_2, E_3 на плоскости, например, такой, как на рисунке 15 (луч OE_1 лежит на биссектрисе тупого угла E_2OE_3, $OE_1 = \frac{1}{2}OE_2 = \frac{1}{2}OE_3$ и равно масштабу изображения m). Соответствующую проекцию в черчении иногда называют кабинетной.

Если теперь на плоскости проекции выбрать систему координат uv так, чтобы её оси соответствовали осям координат графического экрана дисплея (графический режим экрана SCREEN 9 задаёт разрешимость 640×350), точка O совпадала с центром экрана, а ось u была сонаправлена с лучом OE_2 (рис. 16), то точки O, E_1, E_2, E_3 будут иметь, соответственно, следующие координаты: $(320; 175)$, $(320 - m \cdot \cos 45; 175 + m \cdot \sin 45)$, $(320 + 2m; 175)$, $(320; 175 - 2m)$. Решая соответствующую систему, получим следующие формулы:

$$u = m(2y - x/\sqrt{2}) + 320,$$

$$v = -m(2z - x/\sqrt{2}) + 175.$$

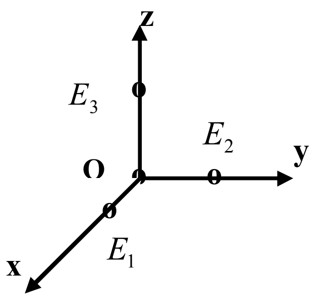


Рис. 15

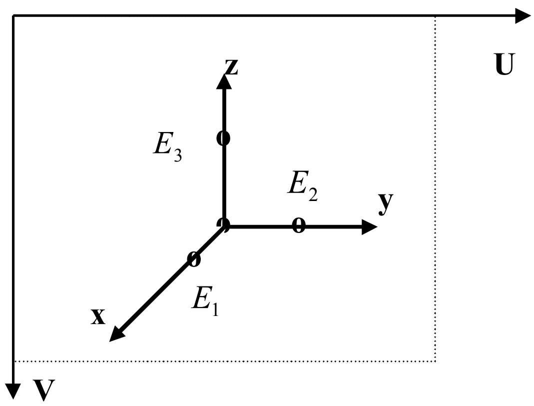


Рис. 16

2. *Ортогональная проекция.* Наиболее наглядны изображения, которые получаются при ортогональном проектировании фигуры на плоскость. В первую очередь это относится к поверхностям вращения, таким, как сфера, тор, цилиндр и другие. Рассмотренная выше кабинетная проекция, очевидно, не является ортогональной. Поэтому на лекции желательно рассмотреть пример ортогональной проекции и вывести соответствующие формулы.

Прямоугольную систему координат в пространстве расположим так, чтобы вектор с координатами (1, 1, 1) оказался перпендикулярным плоскости изображения (обозначим его $\vec{e}$). При ортогональном проектировании этой системы координат на плоскость изображения точки E_1, E_2, E_3 окажутся на окружности с центром в точке O и разделят эту окружность на три равные части (рис. 17).

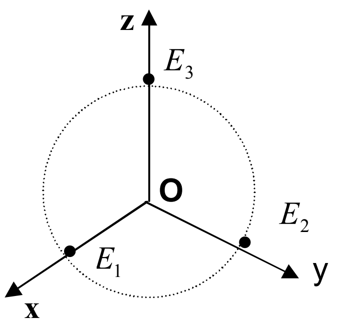


Рис. 17

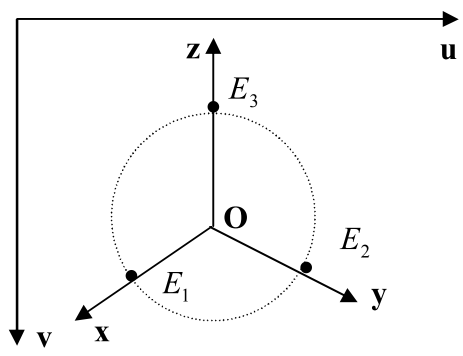


Рис. 18

Систему координат *uv* на плоскости изображения выберем так, чтобы точка O имела координаты (320; 175), а луч OE_3 и ось v имели противоположное направление (рис. 18). В этом случае точки E_1, E_2, и E_3 будут иметь следующие координаты: E_1(320+m·cos150°; 175+m·sin150°), E_2(320+m·cos30°; 175+m·sin30°); E_3(320; 175-m). Решая соответствующую систему, получим следующие формулы для вычисления координат проекции точек при ортогональном проектировании на плоскость с нормальным вектором $\vec{e}\,(1,1,1)$:

$$u = (m\sqrt{3}/2)(y - x) + 320\,;$$

$$v = -(m/2)(2z - x - y) + 175\,.$$

Заметим, что в компьютерной графике более распространён способ, при котором используется ортогональное проектирование на одну из координатных плоскостей, например *XOY*. Находить координаты проекции точек в этом случае действительно проще: достаточно отбросить третью координату (кстати, при использовании современных быстродействующих ЭВМ этот аргумент выглядит не очень весомо). Однако при таком способе проектирования изображение геометрического объекта чаще всего ненаглядно. Чтобы устранить этот недостаток объект (или систему координат) поворачивают. При этом, конечно, нужно использовать соответствующие формулы, которые, как правило, описываются матрицами размерности на единицу больше, чем размерность пространства (связано это с переходом к однородным координатам точек). На наш взгляд, с этим способом можно познакомить лишь тех студентов, которые пожелают заниматься графическим программированием более профессионально, причем сделать это в рамках спецсеминара или курса по выбору. Использовать же его на занятиях по геометрии, на наш взгляд, методически неоправданно, особенно если учесть, что некоторые элементы предлагаемой нами методической системы студенты будут использовать в средней школе.

Кроме вывода формул, связывающих мировые и экранные координаты, на лекции необходимо познакомить студентов с *основными методами компьютерного моделирования поверхностей и линий* в пространстве (точечным, каркасным и полигональным). В качестве примера можно составить программы построения на экране компьютера изображений прямого кругового цилиндра в ортогональной проекции, используя при этом точечный (рис. 19 а)), каркасный (рис. 19 б)) и полигональный (рис. 19 в)) методы моделирования.

а) точечный метод б) каркасный метод в) полигональный метод

Рис. 19

Прокомментируем каждый из этих методов на примере цилиндра.

Точечный метод. При точечном методе компьютерного моделирования поверхность представляется в виде изображения достаточно большого числа точек, находящихся на ней. Такие модели являются одними из простейших. В них описываются только координаты некоторых точек, лежащих на поверхности. Наиболее простой и естественный способ описания координат этих точек – задание поверхности общим уравнением $F(x, y, z) = 0$. Перебирая координаты x, y и z, удовлетворяющие этому уравнению и вычисляя соответствующие им «экранные» координаты u и v, можно достаточно быстро построить требуемое изображение.

Будем считать, что изображаемая цилиндрическая поверхность задана уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Перебирая с определённым шагом значения y и z из прямоугольной области, например $\{(y, z)| -1 \le y \le 1, -1 \le z \le 1\}$, и находя соответствующие им значения x, мы можем построить некоторое множество точек на цилиндрической поверхности. Чтобы не усложнять программу, изображением осей координат можно пренебречь.

Соответствующая программа имеет простой вид, приведём её:

```
REM цилиндр (точечный метод)
SCREEN 9: m = 78
FOR z = -1 TO 1 STEP .02
 FOR y = -1 TO 1 STEP .02
  x = SQR(1 - y ^ 2): GOSUB uv: PSET (u, v)
  x = -SQR(1 - y ^ 2): GOSUB uv: PSET (u, v)
NEXT y, z: GOTO en
uv: u = 1.15 * m * SQR(3) / 2 * (y - x) + 320
   v = -m / 2 * (2 * z - x - y) + 175: RETURN
en: SLEEP
```

Каркасный метод. В каркасных моделях кроме координат точек, лежащих на этой поверхности, описываются и линии (каркасы), соединяющие эти точки.

Каркасное моделирование можно подразделить на два типа:

а) каркасно-линейное моделирование,

б) каркасно-криволинейное моделирование.

В каркасно-линейном моделировании линиями, соединяющими вершины объекта, являются отрезки. Например, изображение линейчатых поверхностей того же цилиндра, в виде семейства прямолинейных образующих представляет собой каркасно-линейную модель.

При каркасно-криволинейном моделировании в качестве линий, соединяющих вершины поверхности, используются кривые дуги. На рисунке 19 б) приведено изображение цилиндра, полученное с помощью каркасно-кругового моделирования (в качестве кривых дуг используются окружности). Приведём листинг соответствующей бейсик-программы:

```
REM цилиндр (каркасный метод)
SCREEN 9: m = 78: pi = 3.142
FOR z = -1 TO 1 STEP .1
 FOR t = 0 TO 2 * pi STEP .01
  x = COS(t): y = SIN(t): GOSUB uv
  IF t = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE -(u, v)
  NEXT t, z: GOTO en
uv: u = 1.15 * m * SQR(3) / 2 * (y - x) + 320
     v = -m / 2 * (2 * z - x - y) + 175: RETURN
en: SLEEP
```

Полигональный метод. При полигональном моделировании геометрические объекты представляются множеством кусков поверхностей: линейных или криволинейных полигонов (граней или элементарных клеток). Эти полигоны, в свою очередь описываются рёбрами, а рёбра – точками. На рисунке 19 в) приведено изображение цилиндра, полученное полигональным методом. В качестве полигонов на этой модели взяты прямоугольники, одна пара противоположных сторон которых – параллельные хорды оснований, другая – соседние прямолинейные образующие цилиндра. Возможный вариант соответствующей программы может выглядеть следующим образом:

```
REM цилиндр (полигональный метод)
SCREEN 9: m = 78: pi = 3.142: ht = pi / 10
FOR t0 = 0 TO 2 * pi - ht STEP ht
 t = t0: z = -1: GOSUB cilindr: u(1) = u: v(1) = v
 t = t0 + ht: z = -1: GOSUB cilindr: u(2) = u: v(2) = v
 t = t0 + ht: z = 1: GOSUB cilindr: u(3) = u: v(3) = v
  t = t0: z = 1: GOSUB cilindr: u(4) = u: v(4) = v
  PSET (u(4), v(4)): FOR i = 1 TO 4: LINE -(u(i), v(i)): NEXT i
```

```
nex: NEXT t0: GOTO en
cilindr: x = COS(t): y = SIN(t)
uv: u = 1.15 * m * SQR(3) / 2 * (y - x) + 320
   v = -m / 2 * (2 * z - x - y) + 175: RETURN
en: SLEEP
```

Следующим важным вопросом, который необходимо обсудить на этой же лекции – решение так называемой задачи *локальной видимости*. Перед тем как её сформулировать, дадим следующее определение.

Определение. Предположим, что в пространстве задан плоский многоугольник (*полигон*) и выбран некоторый порядок обхода его вершин. Будем называть полигон *лицевым* для пользователя, или видимым с внешней стороны (просто *видимым*), если пользователь наблюдает выбранный обход вершин, совершающимся против движения часовой стрелки. В противном случае полигон называется *нелицевым,* или невидимым с внешней стороны (просто *невидимым*).

Задача определения видимости полигона, без учёта заслонения его другими полигонами, называется задачей локальной видимости.

Задача (локальной видимости полигона). Определить видимость многоугольника (полигона) при проектировании последнего на плоскость изображений, если выполнено одно из следующих условий:

а) известны координаты вершин проекции полигона;

б) известны координаты вершин полигона и координаты вектора проектирования.

Мотивировка и решение задачи. Умение решать эту задачу понадобится для создания на экране компьютера реалистических изображений многогранников и поверхностей, поскольку вооружит студентов методом, позволяющим удалять невидимые линии в изображениях выпуклых тел.

Не ограничивая общности, можно считать, что полигон является треугольником, обозначим его $A'B'C'$, а проекцию этого полигона на плоскость изображения – ABC. Согласно данному выше определению треугольник расположен к пользователю лицевой стороной, то есть является видимым, если порядок обхода вершин треугольника совершается против движения часовой стрелки. Рассмотрим два способа определения видимости полигона. В первом из них (алгебраическом) используются координаты вершин проекции полигона. Во втором (векторном) – координаты вершин самого полигона и координаты вектора проектирования:

а) *алгебраический способ*. Очевидно, что если треугольник $A'B'C'$ расположен к пользователю лицевой стороной, то и на плоскости проекции порядок обхода вершин A, B и C также совершается против движения часовой стрелки (считается, что лучи, выходящие из точки наблюдения и проходящие через стороны треугольника, пересекают плоскость проекции). Но тогда определитель d, составленный из координат векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, больше нуля, если система координат на плоскости проекции положительно ориентирует плоскость, и меньше нуля в противном случае. Поскольку оси экранной системы координат uv на экране компьютера отрицательно ориентируют плоскость, условием видимости грани является $d < 0$. Заметим, что при таком способе определения видимости грани совершенно неважно, какое направление имеет вектор проектирования. Более того, этим способом можно пользоваться и при центральном проектировании;

б) *векторный способ*. Рассмотрим вектор $\overline{n}$ равный векторному произведению $\overline{A'B'} \times \overline{A'C'}$ (рис. 20). Пусть α – угол между вектором $\overline{n}$ и вектором $\overline{e}$, задающим направление проектирования. Тогда грань $A'B'C'$ видна с внешней стороны, если угол α – острый, и с внутренней, если α – тупой. Поскольку знак скалярного произведения ненулевых векторов зависит от знака косинуса угла между ними, то

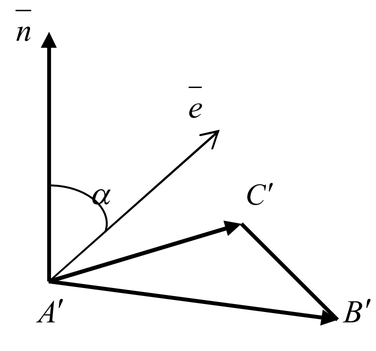


Рис. 20

грань видна с лицевой стороны, если скалярное произведение $\overline{e}\overline{n}$ (или смешанное произведение векторов $\overline{e}$, $\overline{A'B'}$ и $\overline{A'C'}$) больше нуля. В противном случае грань не видна. Необходимо ещё раз обратить внимание студентов на то, что при этом способе определения видимости грани вектор проектирования $\overline{e}$ играет уже существенную роль.

Заметим, что при точечном методе моделирования выпуклых тел также можно определять видимость точки, если имеется возможность вычислять координаты нормального вектора к поверхности в этой точке. Алгоритм простой: если угол между этим вектором и вектором проектирования тупой, то точка не видна (точнее заслонена другими частями поверхности) и, следовательно, не изображается.

В качестве примера, где используется алгебраический метод определения видимости полигона, на лекции можно составить программу, позволяющую построить полигональным методом на экране компьютера *окрашенное изображение цилиндра* с удалением тех частей рёбер его полигонов, которые заслоняются лицевыми полигонами. Эта программа, как и большинство других, получается из предыдущей (имеется в виду программа по изображению цилиндра полигональным методом) добавлением строк или незначительной их корректировкой. Прокомментируем эти строки.

Во второй строке добавляется оператор **ht = pi/10**, с помощью которого определяется шаг в цикле по переменной $t0$ (введён новый параметр, поскольку t «занят» в параметрических уравнениях цилиндра, помещённых в отдельной строке с меткой **cilindr**). Добавлена новая (третья) строка, в которой, во-первых, открыт внешний цикл по переменной **k,** принимающей всего два значения 1 и –1. Это сделано для того, чтобы сначала изображались и окрашивались цветом 8 полигоны, видимые с внутренней стороны (для этой цели в дальнейшем вычисляется определитель **det** и произведение **k*det** сравнивается с нулём), а затем цветом 7 – полигоны видимые с внешней стороны. Благодаря этой процедуре лицевые клетки будут закрашиваться новым цветом и тем самым заслонять невидимые части нелицевых (видимых изнутри) клеток.

Заметим в заключение, что в последней строке тела цикла выполняется повторное изображение рёбер полигона цветом 15. Благодаря этому цвет рёбер полигонов отличается от цвета самих полигонов.

Приведём возможный вариант программы полностью:

```
REM цилиндр окрашенный (полигональный метод)
SCREEN 9: m = 78: pi = 3.142: ht = pi / 10
FOR k = -1 TO 1 STEP 2: IF k = -1 THEN cg = 8 ELSE cg = 7
FOR t0 = 0 TO 2 * pi - ht STEP ht
  t = t0: z = -1: GOSUB cilindr: u(1) = u: v(1) = v
  t = t0 + ht: z = -1: GOSUB cilindr: u(2) = u: v(2) = v
  t = t0 + ht: z = 1: GOSUB cilindr: u(3) = u: v(3) = v
  t = t0: z = 1: GOSUB cilindr: u(4) = u: v(4) = v
  det = (u(2) - u(1)) * (v(4) - v(1)) - (u(4) - u(1)) - (v(2) - v(1))
  IF k * det > 0 THEN GOTO nex
  PSET (u(4), v(4)), cg: FOR i = 1 TO 4: LINE -(u(i), v(i)), cg: NEXT i
  PAINT ((u(1) + u(3)) / 2, (v(1) + v(3)) / 2), cg, cg
  PSET (u(4), v(4)): FOR i = 1 TO 4: LINE -(u(i), v(i)): NEXT i
nex: NEXT t0, k: GOTO en
cilindr: x = COS(t): y = SIN(t)
uv: u = 1.15 * m * SQR(3) / 2 * (y - x) + 320
   v = -m / 2 * (2 * z - x - y) + 175: RETURN
en: SLEEP
```

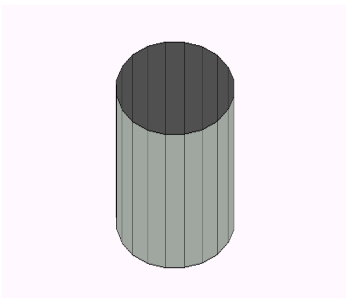


Рис. 21

В результате выполнения программы на экране персонального компьютера должно появиться изображение, представленное на рисунке 21.

Практические занятия. При изучении векторов в пространстве вместе с традиционным материалом на практическом занятии следует обсудить решение *нескольких геометрических задач*, которые в дальнейшем потребуются при компьютерном конструировании стереометрических фигур, а именно – для определения координат внутренних точек конечных геометрических объектов (отрезка, полигона) создания анимационного эффекта. Сформулируем две из них:

Задача 1. Для заданного вещественного числа *k* на прямой *AB* в пространстве найти координаты точки *C*, для которой выполняется векторное равенство $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Задача 2. Найти координаты внутренней точки выпуклого плоского многоугольника *ABCD*.

Умение решать первую задачу потребуется на лабораторных занятиях при компьютерном моделировании прямолинейного перемещения геометрического тела из одной точки пространства в другую (создание анимационного эффекта), при построении компьютерных моделей усечённых многогранников и т. д. Умение решать вторую задачу потребуется при заливке плоского полигона тем или иным цветом. Решение этих задач общеизвестно.

На одном из практических занятий для *закрепления вычислительного метода,* рассмотренного на лекции, можно предложить другой выбор проекций точек O', E_1', E_2', E_3', например, такой, как указан на рисунке 22.

При выбранном проектировании лучи OE_1 и OE_3 перпендикулярны, а луч OE_2 образует с лучом OE_1 угол α, причём $OE_1 = OE_2 = OE_3 = m$ – масштаб изображения. Точки O, E_1, E_2, E_3 однозначно определяют проекции *x*, *y*, *z* пространственных осей координат *X*, *Y*, *Z*. Если экранная система координат *uv* плоскости изображения выбрана так, как это указано на рисунке 23, где *O* (10, 340), оси *u* и *x* сонаправлены, оси *v* и *z* противоположно направлены, то в системе координат *uv* получим: $E_1(10 + m; 340)$; $E_2(10 + m\cos\alpha; 340 - m\sin\alpha)$; $E_3(10; 340 - m)$. Отсюда формулы, связывающие координаты точки оригинала с координатами её проекции, будут иметь вид:

$$u = m(x + y \cdot \cos\alpha) + 10; \; v = -m(z + y \cdot \sin\alpha) + 340.$$

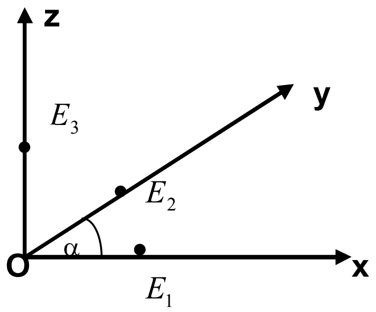


Рис. 22

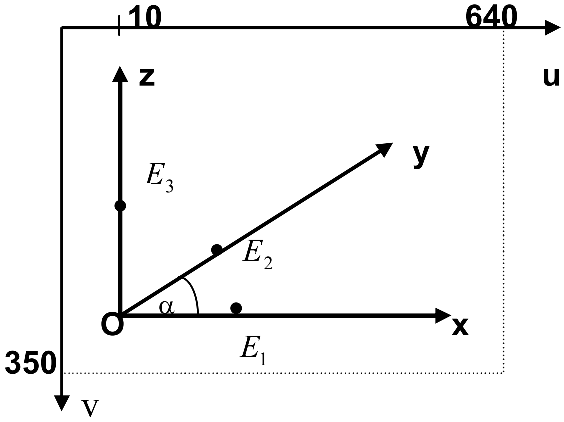


Рис 23

На практическом занятии необходимо *закрепить векторный метод определения видимости грани* (алгебраический метод применялся на лекции при изображении окрашенного цилиндра). Как было отмечено выше, вектор проектирования $\bar{e}$ играет существенную роль в этом методе. Если проекции вершин координатного тетраэдра заданы произвольно, то найти координаты вектора $\bar{e}$ не всегда просто. Однако в некоторых случаях это удаётся сделать без особых усилий. На практическом занятии со студентами можно обсудить способ нахождения координат вектора проектирования, например, для случая кабинетной проекции. Знание координат этого вектора потребуется при выполнении некоторых учебных проектов. Кроме этого, умение вычислять координаты вектора проектирования будет способствовать развитию у студентов умений математически «обрабатывать» сугубо чертёжную ситуацию.

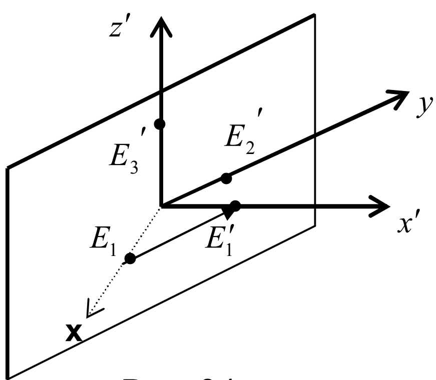


Рис. 24

В качестве плоскости изображения в этом случае можно взять координатную плоскость $y'O'z'$ (рис. 24). Вектор $\overrightarrow{E_1E_1'}$ является одним из векторов проектирования. Найдём его координаты. Точка E_1 в системе $x'y'z'$ имеет координаты $\left(0;\ -m\sqrt{2}/2;\ -m\sqrt{2}/2\right)$, а точка E_1' – координаты $(2m;\ 0;\ 0)$. Но тогда вектор $\overrightarrow{E_1E_1'}$ имеет координаты $\left(2m;\quad m\sqrt{2}/2;\quad m\sqrt{2}/2\right)$. Для простоты в качестве $\bar{e}$ можно взять вектор $\dfrac{\sqrt{2}}{m}\overrightarrow{E_1E_1'}$, имеющий координаты $\left(2\sqrt{2};\quad 1;\quad 1\right)$.

Лабораторные занятия. По этой теме предполагается проведение двух лабораторных занятий, посвящённых выполнению лабораторных работ № 3.1 и № 3.2.

<u>Лабораторная работа</u> № 3.1 «Простейшие поверхности».

Организация работы: лабораторная работа проводится в форме учебного проекта № 3.1.1 под руководством преподавателя.

Учебные цели: научиться применять векторный и координатный методы при компьютерном моделировании простейших поверхностей (на примере сферы) и строить их изображения на экране компьютера. Закрепить полученные на лекции навыки компьютерного моделирования поверхностей.

Учебный проект №3.1.1 «Сфера». Построить на экране персонального компьютера различные изображения сферы, используя последовательно точечный, каркасный и полигональный методы компьютерного моделирования. Изображения получить с помощью среды Qbasic и пакета Maple.

Выполнение проекта можно разбить на следующие три этапа:

ЭТАП №1. Построить на экране персонального компьютера изображения полусферы и сферы, используя точечный метод моделирования.

ЭТАП №2. Построить на экране персонального компьютера изображение сферы, используя каркасный метод моделирования (параллели и меридианы).

ЭТАП №3. Построить на экране персонального компьютера изображение сферы, используя полигональный метод моделирования с удалением невидимых линий и окраской полигонов.

Приведём один из вариантов выполнения этих этапов проекта.

Выполнение ЭТАПА №1. Сфера – одна из первых поверхностей, которая изучается в школьном и вузовском курсах геометрии. Студентам хорошо известно её каноническое уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Желательно, чтобы первая компьютерная модель сферы удовлетворяла следующим двум требованиям: изображение сферы на экране компьютера было достаточно наглядным, а соответствующая этому изображению алгоритмическая программа – максимально простой. Для создания эффекта «глубины» и привязки сферы к «неизображаемой» системе координат построим дополнительно часть плоскости *XOY*, лежащей вне сферы и ограниченной квадратом со стороной 4. Кроме того, будем изображать не всю сферу, а лишь ту её часть, которая расположена выше координатной плоскости *XOY*. Для простоты будем считать, что радиус сферы равен единице (нужные размеры можно получить с помощью выбора подходящего масштаба). Приведём один из вариантов программы на языке Qbasic:

```
REM единичная полусфера и часть координатной плоскости (точечный
метод)
SCREEN 9: m = 60
FOR x = - 2 TO 2 STEP 0.02
 FOR y = - 2 TO 2 STEP 0.02: z0 = 1 – x ^ 2 – y ^ 2
  IF z0 > 0 THEN z = SQR(z0) ELSE z = 0
  u = 1.25 * m * SQR(3) / 2 * ( y – x ) + 320
  v = - m / 2 * (2 * z – x - y) + 175
  PSET (u, v)
NEXT y, x: SLEEP
```

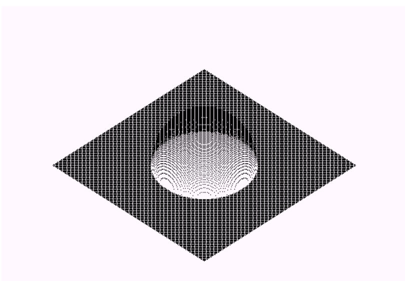


Рис. 25

На рисунке 25 приведено получаемое на дисплее изображение. Заметим, что изображение полусферы можно легко дополнить до изображения всей сферы, если к изображению каждой точки (x, y, z) верхней полусферы добавить изображение симметричной ей точки (x, y, $-z$).

Выполнение ЭТАПА №2. При построении на экране ПК изображения сферы каркасным методом удобнее уже использовать параметрические уравнения сферы:

$$x = COS(t) \cdot COS(s),\ y = SIN(t) \cdot COS(s),\ z = SIN(s),$$

где $0 \le t < 2\pi$; $-\pi/2 \le s \le \pi/2$. Зависимость декартовых координат точки на сфере от параметров t и s без особого труда устанавливается студентами непосредственно на лабораторном занятии. В качестве каркасных линий, лежащих на поверхности сферы, можно использовать параллели. Обозначим через N число изображаемых параллелей. Каждая параллель соответствует некоторому значению параметра s. Тогда радиус R этой параллели равен $R = COS(s)$, а уравнение плоскости, содержащей параллель, будет иметь вид: $z = SIN(s)$. Меняя s от $-\pi/2$ до $\pi/2$ с шагом $H = \pi/N$ и изображая на каждом шаге окружность радиусом r, мы получим так называемое *проволочное* изображение сферы каркасным методом.

Приведём возможный вариант программы:

```
REM сфера: параллели (каркасный метод моделирования)
SCREEN 9: m = 40: N = 20: PI = 3.142: H = PI / N
FOR s = -PI / 2 TO PI / 2 STEP H: R = COS (s): z = SIN (s)
  FOR t = 0 TO 2*PI STEP 0.01
    x = R * COS (t): y = R * SIN (t)
    u = 1.25 * m * (2 * y – x / SQR (2))+320
    v = -m * (2 * z – x / SQR (2)) + 175
    IF t = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE - (u,v)
NEXT t, s: SLEEP
```

Составление такой программы тоже не вызывает особых затруднений у студентов. Чтобы полученное изображение пополнить меридианами, нужно к составленной программе добавить строки, в которых переменной внешнего цикла будет служить параметр t, а внутреннего – s. Кроме того, строки, содержащие вычисление экранных координат точек, удобно оформить в виде подпрограммы (для большей наглядности можно использовать формулы, соответствующие ортогональному проектированию сферы). Приведём возможный вариант такой программы:

```
REM сфера: параллели и меридианы (каркасный метод)
SCREEN 9: m = 40: N = 20: PI = 3.142: H = PI / N
FOR s = -PI / 2 TO PI / 2 STEP H: R = COS (s): z = SIN (s)
  FOR t = 0 TO 2*PI STEP 0.01
    x = R * COS (t): y = R * SIN (t): GOSUB uv
    IF t = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE - (u,v)
NEXT t, s
FOR t = 0 TO 2*PI STEP H: ct = COS (t): st = SIN (t)
  FOR s = -PI / 2 TO PI / 2 STEP 0.01
    x = ct*COS (s): y = st * COS (s): z = SIN(s): GOSUB uv
    IF s = -pi/2 THEN PSET (u, v) ELSE LINE - (u,v)
NEXT s, t: GOTO en
uv: u = 1.25 * m* SQR(3)/2*( y – x )+320
      v = -m * (2 * z – x  - y) + 175: RETURN
en: SLEEP
```

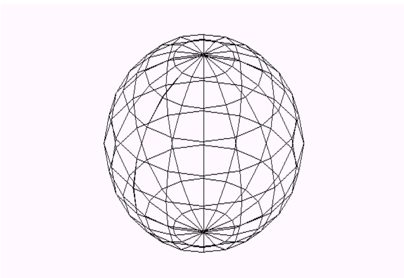


Рис. 26

На экране компьютера появится изображение представленное на рисунке 26. Чтобы удалить невидимые линии необходимо воспользоваться полигональным методом моделирования поверхностей.

Выполнение ЭТАПА №3. При полигональном методе моделирования поверхность представляется в виде объединения небольших фрагментов поверхности (полигонов), представляющих собой, как правило, линейные или криволинейные треугольники или четырёхугольники. Будем изображать сферу в виде полигонов, ограниченных соседними параллелями и меридианами. Это в основном прямолинейные четырёхугольники. Исключение составляют лишь полигоны первого и последнего слоя – прямолинейные треугольники. Если $1'2'3'4'$ – прообраз полигона 1234 (обход вершин совершается против движения часовой стрелки), то его вершины имеют следующие криволинейные координаты $1'(t_0, s_0)$, $2'(t_0 + H, s_0)$, $3'(t_0 + H, s_0 + H)$, $4'(t_0, s_0 + H)$ (рис. 27).

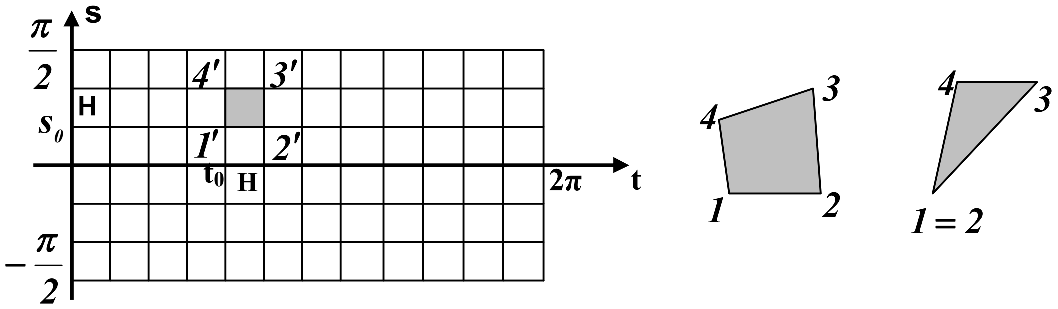


Рис. 27

На лабораторном занятии со студентам можно обсудить следующую схему составления программы.

В первых двух строках поместим ремарку и зададим начальные условия:

```
REM сфера  (полигональный метод моделирования)
SCREEN 9: m = 50: PI = 3.142: N = 20: H = PI / N
```

Откроем внешний и внутренний циклы по t_0 и s_0:

```
5 FOR S0 = - PI/2 TO PI/2 – H STEP H
  FOR T0 = 0 TO 2*PI – H STEP H
```

В следующих строках найдём экранные координаты четырёх вершин полигона 1234:

```
T = T0: S = S0: GOSUB uv: u(1) = u: v(1) = v
T = T0 + H: GOSUB uv: u(2) = u: v(2) = v
S = S0 + H: GOSUB uv: u(3) = u: v(3) = v
T = T0: GOSUB uv: u(4)  = u: v(4) = v
```

Следует заметить, что подпрограмма **uv** должна быть немного изменена по сравнению с первым её вариантом. В неё необходимо добавить строки, позволяющие по криволинейным координатам (T, S) точки находить её декартовы координаты (x, y, z).

При *определении видимости полигона* 1234 рассмотрим два неколлинеарных вектора $\overline{12}$ и $\overline{14}$ (для полигонов первого слоя вместо этих векторов нужно брать векторы $\overline{13}$ и $\overline{14}$, т.к. в этом случае первые две вершины совпадают, рис. 28) и подсчитаем определитель det, составленный из их экранных координат.

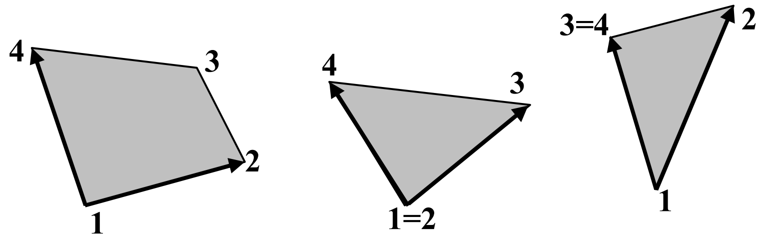


Рис. 28

Поэтому следующие четыре строки будут иметь вид:

```
det1 = (u(3) - u(1))*(v(4) - v(1)) – (u(4) – u(1))*(v(3) - v(1))
det2 = (u(2) - u(1))*(v(4) - v(1)) – (u(4) – u(1))*(v(2) - v(1))
IF S0 = - PI/2 THEN det = det1 ELSE det = det2
IF det >0 THEN GOTO 10
```

Изобразим теперь полигон и закрасим его, приняв за внутреннюю точку полигона его центр тяжести:

```
PSET (u(4), v(4)): FOR i = 1 TO 4: LINE – (u(i), v(i)): NEXT i
PAINT((u(1)+u(2)+u(3)+u(4))/4,((v(1)+v(2)+v(3)+v(4))/4),1,15
```

Закроем оба цикла и составим подпрограмму вычисления экранных координат:

```
10 NEXT t0,s0: GOTO 20
uv: R = COS(s)
x=R*COS(t): y=R*SIN(t): z=SIN(s)
u=1.25*m*SQR(3)/2*(y-x)+320
v=-m/2*(2*z-x-y)+175:RETURN
20 SLEEP
```

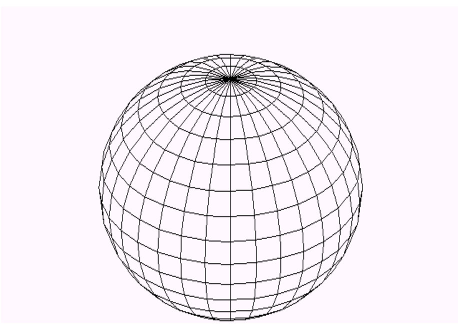


Рис. 29

Полностью программа приведена в учебном пособии [114]. Изображение, получаемое на экране компьютера в результате выполнения этой программы, представлено на рисунке 29.

На сфере можно легко задать мигающую цветную мозаику. Для этого в строке, окрашивающей полигон 1234, цвет 1 надо заменить на RND*15, а последнюю строку – на

IF INKEY$ = “” THEN GOTO 5,

где 5 – номер строки, открывающей цикл по s0.

В завершение занятия со студентами желательно построить изображение сферы с помощью графических средств пакета MAPLE V. На это потребуется совсем немного времени. Например, изображение, аналогичное рисунку 28 можно получить с помощью следующей строки на Maple-языке:

```
> plot3d([cos(t)*cos(s), sin(t)*cos(s), sin(s)], t=0..2*Pi, s=-Pi/2..Pi/2);
```

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой; определение видимости полигона.

Программные средства: среда Qbasic, пакет Maple V.

<u>*Лабораторная работа*</u> *№ 3.2 «Простейшие линии в пространстве».*

Организация работы: лабораторная работа проводится в форме учебного проекта № 3.2.1 под общим руководством преподавателя.

Учебные цели: научиться применять векторный и координатный методы при компьютерном моделировании простейших линий в пространстве (прямая линия, винтовая линия и т.д.) и строить их изображения на экране компьютера. Закрепить основные методы компьютерного моделирования пространственных фигур.

Учебный проект № 3.2.1. «Линии на цилиндре». Построить на экране персонального компьютера изображение прямого кругового цилиндра в ортогональной проекции, винтовой линии и линии пересечения цилиндра со сферой радиусом, равным диаметру цилиндра и центром, лежащим на боковой поверхности цилиндра (кривой Вивиани). «Наклеить» на боковую поверхность цилиндра окружность, эллипс, циклоиду и другие линии. Перечисленные выше изображения получить с помощью среды Qbasic и пакета Maple V.

Традиционное изложение метода координат в пространстве предполагает изучение небольшого числа линий в пространстве, чаще всего – одной прямой. Класс этих важных для формирования у будущих учителей математической культуры геометрических объектов пополняется лишь на старших курсах при изучении элементов дифференциальной геометрии. Однако и там линии изучаются локально средствами анализа бесконечно малых. Как правило, на изучение этой темы отводится недостаточно учебных часов, особенно часов на лабораторно-практические занятия. Многие учащиеся даже после изучения всего курса геометрии имеют слабое представление о том, как устроены простейшие пространственные кривые. Нередко от студентов не только младших, но и выпускных курсов можно услышать, что линия в пространстве задаётся одним уравнением. Многие из них считают, что, например, уравнения $2x-3y+1=0$ и $x^2+y^2=4$ в пространстве задают, соответственно, прямую и окружность.

Чтобы устранить этот пробел нужно не только в дифференциальной, но и аналитической геометрии в пространстве больше уделять внимание изучению линий в пространстве. Причём не ограничиваться только демонстрацией или выводом формул, задающих эти линии и вычислением их основных числовых характеристик, но и построением изображений линий, в том числе на экране компьютера. Кроме того, для развития пространственного воображения целесообразно, по нашему мнению, использовать плоские и пространственные кривые для кинематического моделирования поверхностей, геометрических тел.

В обсуждаемом учебном проекте предлагается рассмотреть простейшие кривые: прямую, окружность, винтовую линию, кривую Вивиани, а также пространственные кривые, полученные, например, при отображении различных плоских кривых на поверхность цилиндра (кривые, «наклеенные» на цилиндр). Каждая из этих линий принадлежит прямому круговому цилиндру. Для того чтобы изображение линий было полным, желательно связать их с изображением цилиндра, тем более, что все основные методы изображения этой поверхности обсуждались на лекции.

Выполнение проекта можно разбить на следующие три этапа:

ЭТАП №1. Построить на экране персонального компьютера изображение цилиндра.

ЭТАП №2. К изображению, полученному на предыдущем этапе, добавить изображение винтовой линии.

ЭТАП №3. К изображению, полученному на предыдущем этапе, добавить изображение кривой Вивиани, других кривых, используя готовые параметрические уравнения этих кривых.

В качестве примера приведём варианты выполнения перечисленных этапов проекта.

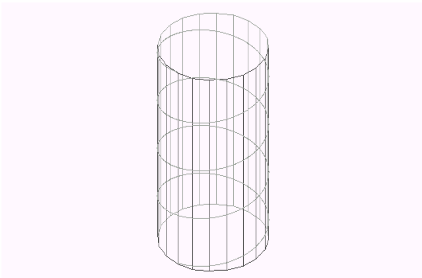
Выполнение ЭТАПА №1. Совершенно естественный путь выполнения этапа – построение любой из компьютерных моделей цилиндрической поверхности, рассмотренных на лекции. На лабораторном занятии можно рассмотреть полигональную модель цилиндра, в которой рёбра лицевых и нелицевых полигонов окрашиваются разным цветом. Внутренние области полигонов можно не окрашивать, для того чтобы на цилиндре были видны изображаемые линии.

Выполнение ЭТАПА №2. Линия, которая рассматривается на этом этапе, в отличие от всех построенных ранее, не является плоской. Для изображения винтовой линии потребуются её параметрические уравнения: $x = a \cdot \cos t$; $y = a \cdot \sin t$; $z = bt$. Их можно вывести непосредственно на лабораторном занятии или на одном из практических занятий, предшествующих ему. Для того, чтобы линия принадлежала поверхности построенного цилиндра, необходимо положить a=R. Подберём параметр b так, чтобы винтовая линия проходила через точки (R; 0; –H) и (R; 0; H). Положим, b=H/2π, $-2\pi \le t \le 2\pi$.

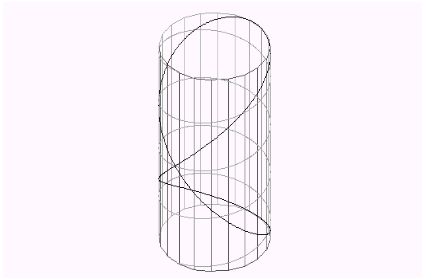
REM винтовая линия

```
a = R: b = H/(2*PI)
FOR t = -2*PI TO 2*PI STEP 0.01
  x = a * COS(t): y = a * SIN(t): z = b * t: GOSUB uv
  IF t = - 2 * PI THEN PSET(u, v) ELSE LINE – (u, v)
NEXT t
```

После выполнения всей программы на экране компьютера появится изображение, представленное на рисунке 30 а).



а)



б)

Рис. 30

Выполнение ЭТАПА №3. Построим теперь изображение кривой Вивиани, которая получается в результате пересечения цилиндра радиусом R со сферой радиусом $2R$ и центром, лежащим на поверхности цилиндра. Параметрические уравнения кривой Вивиани: $x = 2R \cdot \cos^2 t$; $y = 2R \cdot \cos t \cdot \sin t$; $z = 2R \cdot \sin t$, $-\pi \le t \le \pi$. Они даются студентам в готовом виде. При использовании уравнений в таком виде и составлении соответствующего модуля программы учащиеся обнаружат, что линия не лежит на изображённом цилиндре. Чтобы исправить эту ошибку, необходимо выяснить, как расположена мировая система координат по отношению к сфере и цилиндру, задающих кривую Вивиани, в приведённых выше параметрических уравнениях. Студенты должны убедиться в том, что ось аппликат принадлежит поверхности цилиндра, а ось цилиндра пересекает ось абсцисс в точке (R; 0; 0). Так как цилиндр, изображённый на экране компьютера, расположен симметрично относительно оси аппликат, то кривую Вивиани нужно перенести на вектор (R; 0; 0), чтобы она попала на изображённый цилиндр. В этом случае первое из параметрических уравнений кривой будет отличаться от приведённого выше. Окончательно уравнения будут иметь вид: $x = 2R \cdot \cos^2 t - R$; $y = 2R \cdot \cos t \cdot \sin t$; $z = 2R \cdot \sin t$, $-\pi \le t \le \pi$. Приведём соответствующий блок программы:

```
REM кривая Вивиани
a=2*R
FOR t = - PI TO PI STEP 0.01
 x=a*(COS(t))^2 - R: y=a*COS(t)*SIN(t): z=a*SIN(t): GOSUB uv
 IF t=-PI THEN PSET(u, v) ELSE LINE – (u, v)
NEXT t
```

После выполнения всей программы на экране компьютера появится изображение цилиндра с винтовой линией и кривой Вивиани (рис. 30 б)).

Кроме рассмотренных выше кривых, студентам можно предложить на боковой поверхности цилиндра построить изображения других линий, используя для этой цели прямоугольник $ABCD$ – развёртку цилиндра высотой H. Выберем в плоскости прямоугольника систему координат tz так, как это указано на рисунке 31.

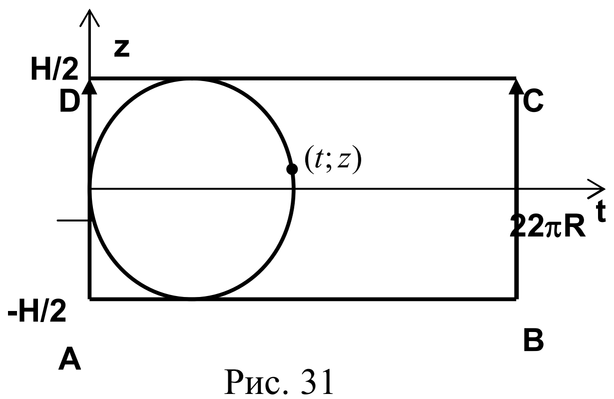


Рис. 31

Зададим отображение точек прямоугольной области $ABCD$ на цилиндр. Для этого рассмотрим вспомогательную прямоугольную область $AB'C'D$, которая получается из $ABCD$ с помощью сжатия f_1 плоскости к оси Oz с коэффициентом $1/R$. При этом сжатии точка $(t;z)$ отображается на точку $(t_1;z)$, где $t_1 = t/R$. Затем прямоугольную область $AB'C'D$ отобразим на поверхность цилиндра с помощью отображения f_2, которое точке $(t_1;z)$ ставит в соответствие точку $(x;y;z)$, где $x = R\cos t_1$, $y = R\sin t_1$. В результате композиции этих отображений мы получим искомое отображение $f = f_1 \circ f_2$, которое прямоугольную область $ABCD$ отображает на боковую поверхность цилиндра. При этом отображении точке $(t;z)$ ставится в соответствие точка $(x;y;z)$, где $x = R\cos(t/R)$, $y = R\sin(t/R)$.

Рассмотрим теперь в области прямоугольника любую плоскую кривую, заданную параметрически: $t = t(s)$; $z = z(s)$; $s_1 \le s \le s_2$, или полярными координатами: $\rho = \rho(\varphi)$; $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$. Используя найденные выше уравнения, мы можем получить на поверхности цилиндра её образ $x = R\cos(t(s)/R)$, $y = R\sin(t(s)/R)$; $z = z(s)$. В частности, если рассмотреть образ наклонного отрезка, то мы получим фрагмент винтовой линии.

На лабораторном занятии можно рассмотреть, например, построение образа окружности радиусом *H*/2, лежащей во внутренней области прямоугольника *ABCD* и касающейся оси *Oz* (рис. 30). Параметрические уравнения такой окружности имеют вид $t = R1 \cdot cos(s) + R1$; $z = R1 \cdot \sin(s)$; $0 \le s \le 2\pi$. Поэтому соответствующий модуль программы может иметь следующий вид:

```
REM окружность, «наклеенная», на цилиндр
R1 = H / 2
FOR  s = 0  TO  2 * PI  STEP  0.01
  t = R1 *COS(s) + R1
  x = R*COS (t / R): y = R*SIN (t / R): z = R1*SIN(s): GOSUB uv
  IF s = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE – (u, v)
NEXT s
```

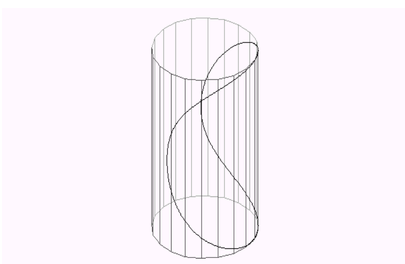


Рис. 32

Если этот модуль добавить к той части программы, с помощью которой строится изображение цилиндра, то на экране компьютера появится фигура, представленная на рисунке 32.

В завершение занятия можно рассмотреть построение линий в пространстве с помощью пакета Maple. Причём желательно рассмотреть не только обычные изображения кривых, полученные в результате выполнения команды spacecurve библиотеки plots (например, чтобы построить винтовую линию, достаточно набрать строку

>with(plots): spacecurve ([cos(t), sin(t), 2*t], t = 0..6*Pi);), но и в виде *трубок* вокруг кривых, которые визуализируются командой tubeplot этой же библиотеки.

Приведём пример такой программы, написанной на Maple-языке:

> cyl: = plot3d([3, x, y], x= - Pi / 4. .5 * Pi / 4, y=0..45, coords = cylindrical, style=wireframe):

> R:=4: X:=R*cos(t): Y:=R*sin(t): Z:=R*t/2:

> with(plots): skew: = tubeplot([X, Y, Z, radius = R*.3], t=0..6*Pi, numpoints = 99, light = [75, 40, .8, .7, .3], ambientlight = [.6,.6,.6]):

> display3d([cyl, skew], orientation = [60,70]);

Прокомментируем составленную программу. После первого знака приглашения ввода «>» задаётся цилиндр **cyl** радиусом 3 с разрезом (каркас). После второго знака приглашения задаются параметрические уравнения винтовой линии на цилиндре радиусом *R*=4. После третьего знака задаётся сама винтовая линия **skew**, помещённая в трубку радиусом 0,3*R*. Наконец, в последней строке строятся все заданные в программе изображения. После выполнения программы на экране появится изображение, представленное на рисунке 33.

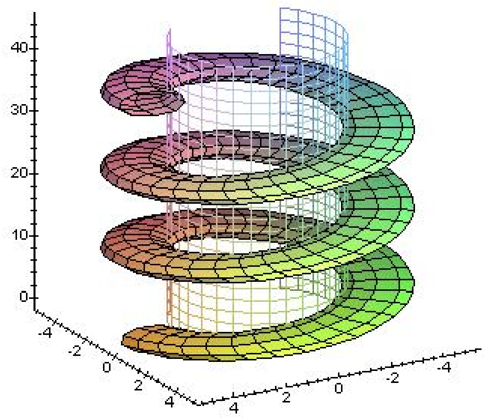


Рис. 33

Программное обеспечение, необходимое для выполнения лабораторной работы: среда программирования Qbasic; пакет Maple.

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой.

Самостоятельная работа студентов. Для самостоятельной работы во внеучебное время студентам можно предложить следующие задачи и учебные проекты:

1. *Простейшие поверхности:*

– построить на экране компьютера изображение плоскости, непараллельной оси аппликат, используя точечный метод моделирования. Для создания эффекта «глубины чертежа» точки плоскости, расположенные ниже координатной плоскости xOy спроектировать на эту координатную плоскость и построить изображения получаемых проекций;

– на экране компьютера построить изображение эллиптического (гиперболического, параболического) цилиндра, используя последовательно точечный, каркасный и полигональный методы моделирования, изображая при необходимости внутреннюю и внешнюю стороны цилиндра разными цветами;

– построить на дисплее цилиндры, у которых в качестве направляющих используются такие линии, как кубическая парабола, эпициклоида, гипоциклоида, кардиоида и т.д.;

– на экране компьютера построить изображение эллиптического (гиперболического, параболического) конуса, используя последовательно точечный, каркасный и полигональный методы моделирования, изображая при необходимости внутреннюю и внешнюю стороны конуса разными цветами;

– построить конусы, у которых в качестве направляющих взяты такие линии, как синусоида, кубическая парабола, эпициклоида, гипоциклоида, кардиоида и т.д;

– построить поверхности вращения, у которых в качестве образующих взяты такие линии, как эллипс, часть параболы, ромб, звёздчатый пятиугольник, кардиоида, 4-лепестковая роза, астроида, трактриса, цепная линия и т.д.;

– построить изображение сферы в виде чередующихся окрашенных полос, заключённых между соседними параллелями, создать эффект вращения такой сферы вокруг оси абсцисс;

– построить изображение сферы в виде чередующихся окрашенных полос между соседними меридианами, создать эффект вращения такой сферы вокруг оси ординат;

– изобразить на сфере цветные полигоны в шахматном или ином порядке, создать эффект вращения сферы вокруг оси аппликат.

2. Простейшие линии в пространстве:

– построить на поверхности цилиндра: семейство эллипсов, кривую бабочка, кривую лист японского клёна, циклоиды, семейство кривых розы, слово «Геометрия»;

– построить на поверхности сферы кривую Вивиани, циклоидные кривые, розы, лист японского клёна и т. д.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: подробно изучаются различные способы задания сферы и методы её изображения, рассматриваются пространственные кривые, проводится пропедевтика раздела «Линии в евклидовом пространстве», темы «Внутренняя геометрия поверхностей», закрепляется параметрический способ задания линий в пространстве, методы их изображений.

Базовые знания: знание геометрии простейших поверхностей и линий в пространстве, методов векторной алгебры и аналитической геометрии, канонического уравнения сферы, методов её компьютерного моделирования, методов определения видимости полигона, параметрических уравнений различных плоских и пространственных кривых, основных законов построения изображений при произвольном и ортогональном проектировании, канонического уравнения цилиндра, методов его компьютерного моделирования, а также графических средств языка программирования и пакета символьных преобразований.

Основные преимущества использования компьютерных технологий при изучении рассматриваемой темы. Применение компьютерных технологий позволяет:

– обучить студентов при построении изображений на основе параллельного проектирования использовать мощные вычислительные методы;

– установить связь между аналитическим заданием простейших стереометрических фигур и их изображением;

– научить студентов быстро и эффективно готовить необходимый демонстрационный материал по геометрии.

5.2. Раздел «Многогранники и поверхности»

Содержание раздела приведено в начале главы V, прокомментируем те его темы, которые тесно связаны с реализацией концепции КПГ.

Комментарии к разделу. При изучении темы «Правильные многогранники» предполагается обсудить различные алгоритмы визуализации не только правильных, но и произвольных многогранников, включая архимедовы, и решение некоторых задач позиционного характера на экране компьютера.

При изучении темы «Поверхности второго порядка», кроме традиционного теоретического материала и обычных методов изображения этих поверхностей, предполагается обсудить методы построения некоторых поверхностей второго порядка на экране компьютера, рассмотреть комбинации этих поверхностей с многогранниками, их плоские сечения.

При изучении темы «Компьютерное моделирование невыпуклых тел» предполагается рассмотреть методы компьютерного моделирования поверхностей невыпуклых тел на примере тора, других поверхностей торического типа. Обсудить возникающую при этом так называемую задачу глобальной видимости, связанную с заслонением одних лицевых клеток другими. Предполагается рассмотреть построение сечения тора семейством параллельных плоскостей.

Рассмотрим теперь возможные пути реализации концепции КПГ в перечисленных выше темах раздела.

Тема. Правильные многогранники

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: правильные многогранники: куб, правильные тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр. Теорема Эйлера для многогранников, классификация правильных многогранников. Методы компьютерного моделирования многогранников.

На изучение темы отводится 4 часа лекций, 4 – практических занятий, 2 – лабораторно-практических и 2 – лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ.

Лекции. Необходимо рассказать о методах изображений правильных многогранников, включая вычислительный метод, познакомить студентов с различными способами получения правильных многогранников из куба.

В качестве примера на лекции можно составить программу *построения проволочного изображения куба* каркасным и полигональным методом.

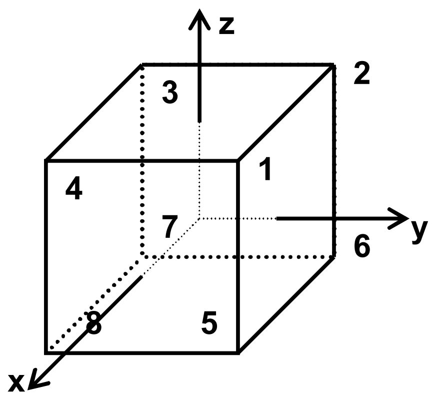


Рис. 34

Сначала необходимо обсудить алгоритм построения каркасной модели куба. Наиболее вероятен, в силу своей естественности и простоты, следующий алгоритм: нахождение пространственных координат вершин куба, вычисление координат проекций вершин куба на экран компьютера и, наконец, изображение рёбер куба. Предложенный алгоритм можно представить в виде следующих пунктов:

1. Строится схематическое изображение куба (чертёж на доске, рис. 34), обозначаются его вершины (например, цифрами от 1 до 8).

2. Выбирается некоторая система координат. Для того чтобы координаты вершин куба имели простой вид и легко вычислялись, оси координат расположим параллельно соответствующим рёбрам куба, а начало координат поместим в центр куба. Будем считать, что длина ребра куба равна двум. При необходимости размеры куба будем регулировать с помощью выбора подходящего масштабного коэффициента m.

3. Определяются мировые координаты вершин куба. В нашем случае вершины куба будут иметь следующие координаты: 1(1,1,1), 2(-1,1.1), 3(-1,-1,1), 4(1,-1,1), 5(1,1,-1), 6(-1,1.-1), 7(-1,-1,-1), 8(1,-1,-1).

4. Вычисляются экранные координаты вершин куба. Для этого можно воспользоваться любыми из выведенных ранее формул, например, $u = m(2y - x/\sqrt{2}) + 320$, $v = -m(2z - x/\sqrt{2}) + 175$ (кабинетная проекция).

5. Определяются пары вершин куба, которые соединяются рёбрами. Описание этих пар можно задать таблицей, которая в нашем случае будет иметь вид (каждый столбец содержит одну из пар):

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4
2	3	4	1	6	7	8	5	5	6	7	8

6. Выбранные пары вершин соединяются отрезками-рёбрами.

После обсуждения алгоритма лектор составляет программу. В качестве языка программирования можно воспользоваться языком Qbasic. В первой части программы создадим массивы u(i),v(i) экранных координат куба:

```
REM проволочное изображение куба (каркасная модель).
SCREEN 9: m = 45
DATA 1,1,1, -1,1,1, -1,-1,1, 1,-1,1, 1,1,-1, -1,1,-1, -1,-1,-1, 1,-1,-1
FOR i = 1 TO 8: read x, y, z
  u(i) = m * 1.25 * ( 2 * y – x / SQR(2) ) + 320
  v(i) = - m *( 2 * z – x / SQR(2) ) + 175
NEXT i
```

В завершающей части программы теперь необходимо несколько раз (это число совпадает с количеством рёбер куба) воспользоваться оператором LINE. Чтобы сделать эту часть программы менее громоздкой, сначала можно создать с помощью оператора DATA массив выбранных пар вершин, затем организовать цикл по некоторой переменной j, обозначающей номер ребра. В теле цикла останется считать оператором READ очередную пару вершин с номерами a, b и построить отрезок, соединяющий эти вершины.

```
DATA 1,2, 2,3, 3,4, 4,1, 5,6, 6,7, 7,8, 8,5, 1,5, 2,6, 3,7, 4,8
FOR j = 1 TO 12: READ a, b
  LINE (u(a), v(a)) – (u(b), v(b))
NEXT j
```

После выполнения программы на экране появится каркасная модель куба (проволочное изображение).

Каркасные модели, однако, имеют следующие два недостатка: практически невозможно решать задачи видимости и строить разрезы и сечения объектов, представленных такими моделями. Это связано с тем, что, например, видимость на такой модели может решаться только при помощи конкурирующих точек, но не все ребра на проекции большинства геометрических фигур имеют эти точки.

В связи с этим рекомендуется рассмотреть более эффективный способ моделирования – полигональный, позволяющий решать проблемы видимости и построения сечений. В нашем случае грани-полигоны куба можно описать следующей таблицей:

1	5	1	2	1	3
2	8	4	6	5	7
3	7	8	7	6	8
4	6	5	3	2	4

В каждом вертикальном столбце таблицы помещены (сверху вниз) номера вершин одной из шести граней куба. Порядок обхода вершин выбирается один и тот же для всех граней куба: против движения часовой стрелки, если смотреть на грань извне куба.

Для того чтобы получить на экране ПК проволочное изображение куба полигональным методом достаточно теперь построить изображение всех его граней. В рассматриваемом нами проекте вторая часть программы будет иметь следующий вид:

```
DATA 1,2,3,4, 5,8,7,6, 1,4,8,5, 2,6,7,3, 1,5,6,2, 3,7,8,4
FOR j = 1 to 6: READ a, b, c, d
  LINE (u(a), v(a)) – (u(b), v(b)): LINE - (u(c), v(c))
  LINE - (u(d), v(d)): LINE - (u(a), v(a))
NEXT j
```

Каждую из составленных программ желательно «прогнать» на компьютере в лекционной аудитории.

Практические занятия. На практических занятиях по этой теме прежде всего необходимо научить студентов строить на листе бумаги, используя обычные чертёжные инструменты, изображения правильных многогранников в параллельной проекции. Затем, привлекая подходящие теоремы и факты элементарной и аналитической геометрии, рассмотреть задачи, связанные с нахождением координат вершин правильных многогранников (в первую очередь икосаэдра и додекаэдра), определить порядок обхода вершин граней многогранников.

Необходимо подготовить студентов к тому, чтобы они могли успешно выполнять учебные проекты повышенной сложности: базовые и комплексные. Среди таких проектов предполагаются задания, связанные с построением на экране компьютера сечений многогранников плоскостью. Поэтому на одном из практических занятий со студентами необходимо обсудить следующую несложную задачу позиционного характера.

Задача. В пространстве задан координатами своих вершин плоский выпуклый многоугольник 123..*N* и непараллельная ему плоскость *p* своим общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Выяснить в каком случае многоугольник и плоскость пересекаются по отрезку, найти координаты его концов.

Решение этой задачи сводится к выполнению следующего алгоритма:

1. Рассмотрим отрезок [1,2] – первую сторону многоугольника.

2. Подставим координаты концов этого отрезка в левую часть уравнения плоскости *p*. Получим два числа, допустим *a* и *b*. Возможен один из следующих четырёх случаев:

а) если $a=b=0$, то отрезок [1,2] принадлежит плоскости и, следовательно, плоскость *p* пересекает многоугольник по этому отрезку (по условию задачи плоскость не параллельна плоскости многоугольника);

б) если равно нулю лишь одно из этих чисел, то плоскость *p* пересекает отрезок [1,2] по точке, совпадающей с одним из концов этого отрезка;

в) если числа *a* и *b* имеют одинаковые знаки, то секущая плоскость не пересекает отрезок [1,2];

г) если числа *a* и *b* имеют разные знаки, то плоскость р пересекается с отрезком [1,2] по внутренней точке, находим координаты этой точки.

3. Рассмотрим отрезок [2,3] – следующую сторону многоугольника. Выполним с координатами его концов процедуру, предусмотренную пунктом 2.

4. Продолжая этот процесс, рассмотрим последнюю сторону многоугольника – отрезок [*N*,1]. Выполним с координатами его концов ту же процедуру, что и в пункте 2.

5. Поскольку многоугольник выпуклый, то мы получим в результате выполнения предыдущих пунктов не более двух точек, а именно: а) ни одной точки; б) одну точку *P*; с) две точки *P* и *Q*. Отсюда секущая плоскость в случае: а) не пересекает многоугольник; б) пересекает многоугольник по точке *P*; в) пересекает многоугольник по отрезку [*P*,*Q*].

Таким образом, предложенный алгоритм нахождения координат точек P и Q предполагает во втором пункте (последний подпункт) решение задачи аналитической геометрии в пространстве, связанной с вычислением координат точки пересечения непараллельных прямой и плоскости. Такие задачи решались в предыдущем модуле. Здесь необходимо их повторить.

Заметим теперь, что для визуализации сечения многогранника секущей плоскостью достаточно перебирать последовательно все грани многогранника (либо только лицевые грани, если не изображать невидимые части сечения) и для каждой из них строить изображение отрезка $[P,Q]$, если таковой существует. Объединение всех таких отрезков и даст искомое сечение.

Лабораторно-практические занятия. На лабораторно-практическом занятии планируется продемонстрировать в одной из систем динамической геометрии методы построения изображений пространственных фигур при параллельном проектировании. В первую очередь будут рассмотрены такие фигуры школьного курса стереометрии как призма, пирамида, цилиндр, конус и сфера. При выборе программных продуктов предпочтительно использовать 3D-версии систем динамической геометрии, например, GeoGebra, начиная с версии 5.0.

Лабораторные занятия. По этой теме предполагается проведение одного лабораторного занятия, посвящённого выполнению лабораторной работы № 4.1.

Лабораторная работа № 4.1 «Правильные многогранники».

Организация работы: проводится в форме пяти учебных проектов №№ 4.1.1 – 4.1.5, каждый из которых выполняется отдельным творческим коллективом, на которые разбивается студенческая подгруппа. Преподаватель участвует в разработке проектов в качестве консультанта.

Учебные цели: научиться применять координатный и векторный методы при каркасном и полигональном моделировании правильных многогранников.

Поскольку формулировки учебных проектов отличаются друг от друга незначительно, то приведём их в одном обобщённом виде:

*Учебные проекты: № 4.1.1 «**Куб**», № 4.1.2 «**Тетраэдр**», № 4.1.3 «**Октаэдр**», № 4.1.4 «**Икосаэдр**», № 4.1.5 «**Додекаэдр**».* Построить на экране персонального компьютера полигональную модель правильного многогранника (куба, тетраэдра, октаэдра, икосаэдра, додекаэдра) с удалёнными невидимыми рёбрами и окрашенными гранями.

Выполнение каждого из пяти проектов можно разбить на следующие три этапа.

ЭТАП №1. На экране персонального компьютера построить проволочное изображение правильного многогранника на основе полигонального метода моделирования.

ЭТАП №2. На построенном проволочном изображении правильного многогранника удалить невидимые рёбра.

ЭТАП №3. На построенном изображении правильного многогранника с удалёнными невидимыми рёбрами выполнить окраску всех лицевых граней.

Для примера рассмотрим вариант выполнения учебного проекта №3.2.1. Остальные четыре проекта выполняются аналогично.

Выполнение ЭТАПА №1. Один из возможных вариантов выполнения этапа рассматривался на лекции. Поэтому творческий коллектив, выполняющий этот проект, может воспользоваться соответствующей программой.

Выполнение ЭТАПА №2. Задача удаления невидимых рёбер для одного выпуклого многогранника относится к задачам локальной видимости. Решается она, как и в случае с поверхностями, с помощью разбиения множества всех граней на лицевые и нелицевые. Если проволочное изображение тела строилось полигональным способом, то невидимое ребро можно удалить, убрав изображения двух граничащих с ним граней. Очевидно, обе удаляемые грани нелицевые. Например, на рисунке 33 ребро (37) можно удалить, не изображая невидимые грани (3784) и (2673).

В предыдущем параграфе рассмотрены два способа определения принадлежности грани к классу лицевых (или видимых): алгебраический и векторный. На лабораторном занятии студентам желательно предложить оба эти способа, но начать лучше с алгебраического. Чтобы воспользоваться этим способом, необходимо найти координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ в экранной системе координат: $\overline{AB}(u(b)\text{-}u(a);\ v(b)\text{-}v(a))$ и $\overline{AC}(u(c)\text{-}u(a);\ v(c)\text{-}v(a))$. Затем вычислить определитель det, составленный из координат этих векторов. Если $\det \geq 0$, то грань не видна, и мы её не изображаем, в противном случае грань изображается. Первая часть программы останется без изменения (следует подкорректировать лишь ремарку в первой строке). Вторая часть программы будет иметь следующий вид:

```
DATA 1,2,3,4, 5,8,7,6, 1,4,8,5, 2,6,7,3, 1,5,6,2, 3,7,8,4
FOR j = 1 to 6: READ a, b, c, d
  det = (u(b) - u(a)) * (v(c) – v(a)) – (u(c) – u(a)) * (v(b) – v(a))
  IF det > = 0 THEN 10
  LINE (u(a), v(a)) – (u(b), v(b)): LINE - (u(c), v(c))
  LINE - (u(d), v(d)): LINE - (u(a), v(a))
10 NEXT j
```

При рассмотрении векторного способа определения видимости грани нужно внести изменения не только во вторую, но и в первую часть программы. Для вычисления смешанного произведения векторов $\bar{e}$, $\overline{A'B'}$ и $\overline{A'C'}$ нам потребуется информация о координатах всех сомножителей, которые в программе не «запоминались». Поэтому в первой части программы нужно заменить переменные x, y и z соответственно на $x(i)$, $y(i)$, $z(i)$. Теперь во второй части программы после открытия цикла по переменной j, подсчитывается определитель det третьего порядка

$$\det = \begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & 1 & 1 \\ x(B)-x(A) & y(B)-y(A) & z(B)-z(A) \\ x(C)-x(A) & y(C)-y(A) & z(C)-z(A) \end{vmatrix},$$

в котором первая строка представляет собой координаты вектора проектирования в кабинетной проекции, а вторая и третья строки – мировые координаты векторов $\overline{A'B'}$ и $\overline{A'C'}$, соответственно. Затем следует оператор условного перехода IF, переключающий выполнение программы на конец цикла, если этот определитель неположителен.

Выполнение ЭТАПА №3. После изображения очередной грани *ABCD* найдём координаты середины диагонали *AC* и воспользуемся оператором PAINT для заливки области, ограниченной сторонами четырёхугольника *ABCD*, цветом 1 (синим). Окончательно программа будет иметь вид:

```
REM окрашенная модель куба
SCREEN 9: m = 45
DATA 1,1,1, -1,1,1, -1,-1,1, 1,-1,1, 1,1,-1, -1,1,-1, -1,-1,-1, 1,-1,-1
FOR i = 1 TO 8: READ x,y,z
  u(i) = m * 1.25 * ( 2 * y – x / SQR(2) ) + 320
  v(i) = - m ( 2 * z – x / SQR(2) ) + 175
NEXT i
DATA 1,2,3,4, 5,8,7,6, 1,4,8,5, 2,6,7,3, 1,5,6,2, 3,7,8,4
FOR j = 1 to 6: READ a, b, c, d
   det = (u(b) - u(a)) * (v(c) – v(a)) – (u(c) – u(a)) * (v(b) – v(a))
   IF det > = 0 THEN 10
   LINE (u(a), v(a)) – (u(b), v(b)): LINE - (u(c), v(c))
   LINE - (u(d), v(d)): LINE - (u(a), v(a))
PAINT((u(a) +u(c))/2, (v(a) + v(c))/2), 1, 15
10 NEXT j
```

Программное обеспечение: среда Qbasic.

Подпрограммы не требуются.

Самостоятельная работа студентов. Для самостоятельной работы во внеаудиторное время студентам можно предложить следующие *учебные проекты и задания*:

– построить на дисплее произвольно расположенный окрашенный правильный многогранник, используя полигональный метод моделирования;

– построить на дисплее вращающийся окрашенный правильный многогранник, в котором невидимые рёбра изображены в виде штриховых линий;

– построить на дисплее различные комбинации пар правильных многогранников, «вписанных» один в другой, с окраской нелицевых граней объемлющего многогранника и лицевых – объемлемого;

– построить на дисплее проволочное изображение куба, внутри которого находится окрашенный октаэдр, вершины которого совпадают с центрами граней куба. После нажатия на любую клавишу вершины октаэдра начинают «разъезжаться» и октаэдр постепенно превращается во вписанный в куб икосаэдр [114];

– построить на дисплее проволочное изображение куба, внутри которого находится окрашенный икосаэдр, вершины которого лежат на средних линиях граней куба. Затем рёбра икосаэдра, лежащие внутри куба, «переламываются» в своих средних точках. Последние начинают перемещаться к ближайшим вершинам куба и тянуть за собой полученные ломаные – бывшие рёбра икосаэдра. Одновременно рёбра икосаэдра, лежащие в гранях куба, начинают «выдвигаться» из куба в направлениях, перпендикулярных граням куба и на расстояния, равные половине ребра икосаэдра. Икосаэдр постепенно превращается в додекаэдр, содержащий внутри себя проволочное изображение куба;

– построить на дисплее окрашенный многогранник, полученный из правильного с помощью отсечения вершин, в частности архимедово тело, задать его вращение;

– построить на дисплее вращающуюся игральную кость, имеющую вид усечённого куба;

– построить на дисплее изображение произвольно расположенного невыпуклого многогранника «звёздчатого» типа (на гранях правильного многогранника построены равные правильные пирамиды или многогранники, «похожие» на них), задать его вращение;

– построить на дисплее изображение икосаэдра, найти объём икосаэдра, площадь его поверхности, радиусы вписанной и описанной сфер, построить изображения этих сфер;

– построить на дисплее сечение правильного многогранника, усечённого многогранника и многогранника «звёздчатого» типа семейством параллельных плоскостей, смоделировать этот процесс в динамике: плоские окрашенные сечения появляются один за другим снизу вверх (как коржи торта);

– смоделировать на дисплее процесс конструирования правильных и некоторых других многогранников из их развёрток: развёртка, медленно деформируясь (поворачиваются грани или группы граней вокруг некоторых рёбер), принимает форму многогранника, и наоборот;

– создать цикл демонстрационных программ динамического характера, позволяющих конструировать с помощью правильного многогранника новые многогранники (например: процесс создания усечённого многогранника с плавным удалением отсечённых пирамид, процесс создания многогранников «звёздчатого» типа);

– составить программу, в которой пользователь выбирает проекции вершин координатного тетраэдра с помощью «мыши» или клавиш управления курсором, передвигающих по экрану ПК светящуюся точку и её проекцию на одну из координатных плоскостей. После «фиксации» всех вершин координатного тетраэдра на экране должно появиться соответствующее изображение правильного многогранника и т.д.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: изучаются правильные многогранники, закрепляются не только традиционные методы их изображения, но и визуализация с помощью персонального компьютера, отрабатывается связь куба с остальными правильными многогранниками, используется в конкретных приложениях векторный и координатный методы.

Базовые знания: знание геометрии правильных многогранников, основных законов построения изображений при ортогональном проектировании, методов компьютерного моделирования многогранников, умение определять видимость грани, а также знание графических средств языка программирования.

Основные преимущества использования информационных технологий при изучении рассматриваемой темы. Применение информационных технологий позволяет:

– обучить студентов при изображении правильных многогранников использовать вычислительные методы;

– закрепить умение устанавливать связь между координатным заданием многогранника и его изображением;

– научить студентов быстро и эффективно готовить необходимый демонстрационный материал по теме многогранники.

Тема. Поверхности второго порядка

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: поверхности второго порядка, эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие поверхности второго порядка.

На изучение темы отводится 6 часов лекций, 4 – практических занятий, 2 – лабораторно-практических и 2 – лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении.

Лекции. Традиционно поверхности второго порядка на лекциях и практических занятиях изучаются по их каноническим уравнениям, основной метод исследования – сечение поверхностей плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Отметим, что на предыдущих занятиях уже рассматривались конические и цилиндрические поверхности, частным случаем которых являются конусы и цилиндры второго порядка. Хорошо знакомы студенты и со сферой – частным случаем эллипсоида. На лекции для некоторых поверхностей можно рассмотреть параметрический способ их задания, кинематический метод построения, методы изображения.

Практические занятия. На практических занятиях, кроме традиционных задач, закрепляющих теорию, необходимо рассмотреть задания, связанные с нахождением координат вершин многогранников, расположенных определённым образом по отношению к заданной поверхности.

Лабораторно-практическое занятие. На лабораторно-практическом занятии предполагается продемонстрировать возможности систем динамической геометрии при решении задач метрического и позиционного характера на комбинацию сферы и многогранника.

Лабораторное занятие. Лабораторное занятие в дисплейном классе предполагается посвятить компьютерному моделированию различных поверхностей второго порядка, причём расположение системы координат по отношению к этим поверхностям, если противное не предусмотрено условием самого проекта, должно быть каноническим. Другими словами, поверхности планируется исследовать по их каноническим уравнениям, т. е. так же, как это делалось на лекциях и практических занятиях. Иное расположение системы координат по отношению к исследуемым поверхностям естественным образом можно рассмотреть в следующем разделе при изучении темы «Геометрические преобразования».

Заметим, что компьютерное моделирование поверхностей уже рассматривалось нами в предыдущем разделе. Несмотря на близость тем, перед этим лабораторным занятием должны стоять несколько иные задачи.

Если ранее ставилась задача лишь познакомить студентов с наиболее простыми методами компьютерного моделирования поверхностей, то сейчас желательно научить студентов не только строить поверхности второго порядка, но и изображать их в комбинации с другими поверхностями и многогранниками, строить простейшие плоские сечения. Кроме того, необходимо показать применимость в этом процессе различных теоретических фактов аналитической и вычислительной геометрий, теории конечных геометрических объектов.

На лабораторном занятии по теме «Поверхности второго порядка» можно опереться на имеющиеся у студентов знания и опыт компьютерного моделирования таких поверхностей, как цилиндр и сфера. Более того, нужно максимально закрепить полученные студентами на лекционных и практических занятиях навыки проведения исследования поверхности с помощью сечений плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Итак, по рассматриваемой теме предполагается проведение одной лабораторной работы.

Лабораторная работа № 4.2 «Поверхности второго порядка и многогранники».

Организация работы: проводится в форме пяти учебных проектов №№ 4.2.1 – 4.2.5, выполняемых отдельными творческими коллективами. Преподаватель участвует в разработке проектов в качестве консультанта.

Учебные цели: научиться применять координатный метод при компьютерном моделировании поверхностей второго порядка (эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды), строить их изображения вместе с изображениями куба или тетраэдра, расположенных определённым образом по отношению к поверхности, на экране персонального компьютера.

Поскольку формулировки первых трёх учебных проектов отличаются друг от друга незначительно, то приведём их в одном обобщённом виде.

*Учебные проекты: № 4.2.1 «**Эллипсоид и куб**», № 4.2.2 «**Однополостный гиперболоид и куб**», № 4.2.3 «**Двуполостный гиперболоид и куб**».* Построить компьютерную модель поверхности второго порядка (эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоидов), а также куба, вершины которого принадлежат поверхности и сечение этой поверхности плоскостями, содержащими некоторые грани куба.

*Учебный проект № 4.2.4 «**Эллиптический параболоид и куб**».* Построить компьютерную модель эллиптического параболоида и куба, одна грань которого касается параболоида, а вершины противоположной грани принадлежат поверхности параболоида. Построить сечение параболоида плоскостью, содержащей одну из вертикальных граней куба.

*Учебный проект № 4.2.5 «**Гиперболический параболоид и тетраэдр**».* Построить компьютерную модель гиперболического параболоида и правильного тетраэдра, вершины которого принадлежат поверхности параболоида. Построить сечение параболоида двумя параллельными плоскостями, содержащими горизонтально расположенные рёбра тетраэдра.

Выполнение каждого из пяти проектов можно разбить на следующие три этапа.

ЭТАП №1. Построить полигональную модель поверхности второго порядка.

ЭТАП №2. К построенному на предыдущем этапе изображению добавить изображение правильного многогранника (куба или тетраэдра), расположенного определённым образом по отношению к поверхности второго порядка.

ЭТАП №3. К построенному на предыдущем этапе изображению добавить изображение сечений поверхности второго порядка плоскостями, расположенными определённым образом по отношению к правильному многограннику.

Отметим, что в конце занятия все поверхности второго порядка желательно получить с помощью пакета Maple и сравнить эти изображения с теми, что получены в результате выполнения учебных проектов.

В качестве примера рассмотрим выполнение второго и пятого проектов.

Вариант выполнения проекта № 4.2.2.

Этот и три оставшихся проекта отличаются от предыдущего тем, что изображаемые поверхности, как и в случае с цилиндром, видны не только с внешней стороны, но и частично с внутренней. Кстати, коллектив, работающий над проектом по эллипсоиду, должен столкнуться с этой же проблемой при выполнении некоторых домашних индивидуальных проектов, связанных с частичным изображением поверхности (такое требование к изображению поверхности вполне оправдано, т. к. при его полной окраске не будут видны многогранники или другие фигуры, находящиеся внутри поверхности).

Выполнение ЭТАПА №1. Изображать элементарные клетки поверхности будем так, чтобы сначала изображались цветом 7 лишь нелицевые или видимые изнутри клетки (причём не будем выяснять, заслоняется изображаемая клетка лицевой или нет), а затем цветом 8 клетки, видимые извне. Для выполнения этого этапа проекта полигональным способом гиперболоид $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=1$ удобно задать параметрическими уравнениями, например:

$$x = A\cdot\sqrt{1+\frac{v^2}{C^2}}\cdot COS(u),\; y = B\cdot\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}\cdot SIN(u)\quad,\; z = v, \text{ где } 0\le u<\infty,\; -\infty\le v<+\infty .$$

В первой части программы организуем внешний цикл по переменной *k*, принимающей всего два значения: -1 (для изображения нелицевых клеток поверхности) и 1 (для изображения лицевых клеток). Нелицевые клетки изображаем цветом 8, лицевые – цветом 7. Эта часть программы может иметь вид:

```
REM однополостный гиперболоид с кубом и плоскими сечениями
SCREEN 9: m = 8: a = 3: b = 3: c = 4: pi = 3.142: hz = c / 3: ht = pi / 10
REM изображение гиперболоида (полигональный метод)
FOR k = -1 TO –1 STEP 2: IF k = -1 THEN cg = 8 ELSE cg = 7
FOR z0 = -2 * c TO 2 * c - hz + .01 STEP hz
 FOR t0 = 0 TO 2 * pi STEP ht
  z = z0: t = t0: GOSUB uvg: u(1) = u: v(1) = v
  t = t0 + ht: GOSUB uvg: u(2) = u: v(2) = v
  z = z0 + hz: GOSUB uvg: u(3) = u: v(3) = v
  t = t0: GOSUB uvg: u(4) = u: v(4) = v
  det = (u(2) - u(1)) * (v(4) - v(1)) - (u(4) - u(1)) * (v(2) - v(1))
  IF k * det > 0 THEN GOTO nex
  PSET (u(4), v(4)), cg: FOR i = 1 TO 4: LINE -(u(i), v(i)), cg: NEXT i
nex: NEXT t0, z0, k: GOTO kub
uvg:  r = a * SQR(1 + z ^ 2 / c ^ 2)
      x = r * COS(t): y = r * SIN(t) * b / a
uv:  u = 1.25 * m * (2 * y - x / SQR(2)) + 320
     v = -m * (2 * z - x / SQR(2)) + 175: RETURN
```

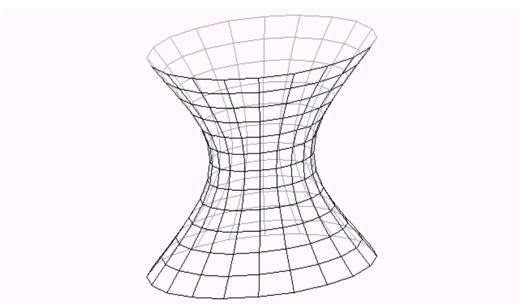


Рис. 35

После выполнения первого этапа проекта на экране персонального компьютера должно появиться проволочное изображенние однополостного гиперболоида, представленное на рисунке 35. Изменяя формулы вычисления экранных координат, размеры клеток, их окраску и значения полуосей гиперболоида, можно построить другие компьютерные модели поверхности.

Выполнение ЭТАПА №2. Выполнение этого этапа отличается от аналогичного этапа предыдущего проекта тем, что такой куб существует не для всех параметров *A*, *B* и *C*. Действительно, если l – половина длины ребра искомого куба, то, подставляя координаты (l, l, l) одной из вершин куба в каноническое уравнение гиперболоида, получим $l^2 \dfrac{B^2C^2 + A^2C^2 - A^2B^2}{A^2B^2C^2} = 1$. Отсюда следует, что куб существует, если выполняется следующее неравенство: $C > AB / \sqrt{A^2 + B^2}$. В этом случае в качестве l необходимо взять число $l = ABC / \sqrt{A^2C^2 + B^2C^2 - A^2B^2}$ и, составив соответствующую программу, построить компьютерную модель куба. Приведём лишь первые две строки модуля **kub,** поскольку в остальном он идентичен аналогичному фрагменту программы предыдущего проекта.

```
kub: IF c <= a * b / SQR(a ^ 2 + b ^ 2) THEN GOTO en
l = a * b * c / SQR(a ^ 2 * c ^ 2 + b ^ 2 * c ^ 2 - a ^ 2 * b ^ 2)
```

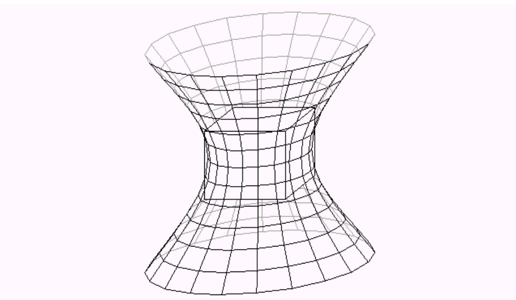


Рис. 36

После выполнения первых двух этапов программы на экране дисплея должно появиться изображение однополостного гиперболоида и куба, вершины которого принадлежат его поверхности. На рисунке 36 приведёно это изображение.

Выполнение ЭТАПА №3. Рассмотрим плоскость, параллельную одной из вертикальных координатных плоскостей. Как известно, в сечении однополостного гиперболоида этой плоскостью должна получиться гипербола или пара пересекающихся прямых. Для некоторых студентов этот факт не является столь очевидным. Поэтому получить его визуальное подтверждение на дисплее будет для них полезно. Изображать гиперболу можно так же, как и в учебном проекте «Солнышко». Однако чтобы сделать эту часть программы максимально простой, можно, не изображая ветви гиперболы, представить сечение в виде семейства отрезков, параллельных оси абсцисс, концы которых лежат на гиперболе (или паре прямых). В поддержку этого алгоритма отметим также, что такой способ построения сечения довольно распространён в чертёжной практике. Подставляя в каноническое уравнение гиперболоида значение $y=H$ и выражая x^2, получим $x^2 = A^2(1 - H^2/B^2 + z^2/C^2)$. Если выражение, стоящее в скобках, обозначить через $H1$, то при $H1 > 0$ можно изобразить отрезок с концами в точках ($A\sqrt{H1}; H$; z) и (- $A\sqrt{H1}$; H; z). Организовав цикл по z ($-z1 \le z \le z1$) с некоторым шагом 0.4, мы получим изображение сечения гиперболоида в виде семейства отрезков. Завершающая часть программы может иметь следующий вид:

```
REM сечение гиперболоида плоскостью y = H
  h = l : y = h
  FOR z = -2 * c TO 2 * c + .1 STEP .4
   h1 = 1 - y ^ 2 / b ^ 2 + z ^ 2 / c ^ 2: IF h1 < 0 THEN GOTO nexz
   x = a * SQR(h1): GOSUB uv: u1 = u: v1 = v
   x = -x: GOSUB uv: LINE (u1, v1)-(u, v), 7
nexz: NEXT z
en: SLEEP
```

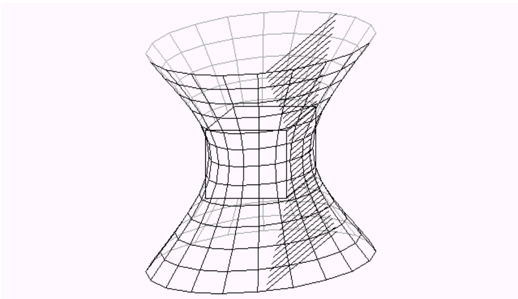


Рис. 37

После выполнения всей программы на экране персонального компьютера должно появиться изображение, представленное на рисунке 37 (на нём изображено лишь сечение одной плоскостью). При проведении исследования проекта и его публичной защите можно рассмотреть другие сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным. Можно предложить студентам продумать вопрос о построении сечения поверхности произвольной плоскостью.

Вариант выполнения проекта № 4.2.5.

Выполнение ЭТАПА №1. Контуры лицевых и нелицевых клеток будем изображать разным цветом. Для выполнения первого этапа воспользуемся следующим уравнением гиперболического параболоида, которое отличается от канонического лишь знаками в левой части:

$-\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=z$, $-x_1 \le x \le x_2; -y_1 \le y \le y_2$. Такое уравнение выберем для того, чтобы изображаемая поверхность была наиболее наглядной. Построим внутри прямоугольной области определения поверхности координатную сетку с ячейками $hx \times hy$. Поверхность представим в виде семейства клеток, являющихся образами ячеек $hx \times hy$, при проектировании последних на поверхность гиперболического параболоида в направлении оси аппликат. Как и выше, с помощью коэффициента k регулируем цвет границы элементарных клеток. Приведём возможный вариант той части программы, которая соответствует первому этапу выполнения проекта.

```
REM гиперболический параболоид, тетраэдр, плоские сечения
SCREEN 9: m = 10: p = 5: q = 5
x1 = 6.3: y1 = 5: hx = x1 / 8: hy = y1 / 8
FOR x0 = -x1 TO x1 - hx STEP hx
  FOR y0 = -y1 TO y1 - hy STEP hy
   x = x0: y = y0: GOSUB uvp: u(1) = u: v(1) = v
   x = x0 + hx: GOSUB uvp: u(2) = u: v(2) = v
   y = y0 + hy: GOSUB uvp: u(3) = u: v(3) = v
   x = x0: GOSUB uvp: u(4) = u: v(4) = v
   det = (u(2) - u(1)) * (v(4) - v(1)) - (u(4) - u(1)) * (v(2) - v(1))
   IF det > 0 THEN cg = 8 ELSE cg = 7
   PSET (u(4), v(4)), cg: FOR i = 1 TO 4: LINE -(u(i), v(i)), cg: NEXT i
NEXT y0, x0: GOTO tetraedr
uvp:  z = -x ^ 2 / p + y ^ 2 / q
uv:  u = 1.25 * m * (2 * y - x / SQR(2)) + 320
     v = -m * (2 * z - x / SQR(2)) + 130: RETURN
```

После выполнения первого этапа проекта на экране дисплея персонального компьютера у студенческого творческого коллектива должно появиться изображение представленное на рисунке 38.

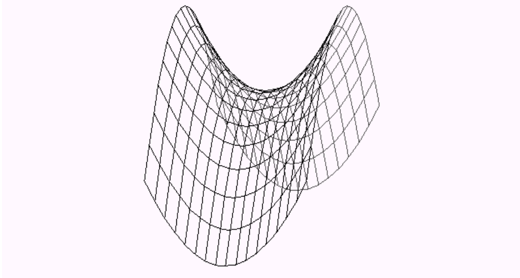


Рис. 38

Поскольку на втором этапе должно строиться изображение тетраэдра, вершины которого принадлежат поверхности параболоида, то окрашивать элементарные клетки нецелесообразно.

Выполнение ЭТАПА №2. Из соображения симметрии вершины тетраэдра *ABCD* будут расположены в координатных плоскостях *xOz* и *yOz*. Рассмотрим куб, четыре вершины которого совпадают с вершинами искомого тетраэдра, а рёбра последнего совпадают с диагоналями граней куба. Обозначим через l – половину длины ребра этого куба. Поскольку такое расположение куба отличается от традиционного (с гранями, параллельными координатным плоскостям) поворотом последнего вокруг оси аппликат на угол $\pi/4$, то вершины тетраэдра будут иметь следующие координаты: $A(l\sqrt{2}/2;0;-l)$, $B(-l\sqrt{2}/2;0;-l)$, $C(0;l\sqrt{2}/2;l)$, $D(0;-l\sqrt{2}/2;l)$. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению $-\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=z$ лишь при условии $p=q=2l$. Отсюда $l=p/2$. Приведём один из вариантов второй части программы, который может быть составлен студентами на этом этапе выполнения проекта:

```
tetraedr: l = p / 2: IF p <> q THEN GOTO en
DATA -1,0,-1, 1,0,-1, 0,1,1, 0,-1,1
DATA 2,3, 2,1, 3,1, 4,2, 4,3, 4,1
FOR i = 1 TO 4: READ x, y, z: x = x * l: y = y * l: z = z * l
 IF i <= 2 THEN x = x * SQR(2) ELSE y = y * SQR(2)
 GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v
NEXT i
FOR j = 1 TO 6
READ a, b: LINE (u(a), v(a))-(u(b), v(b)): NEXT j
```

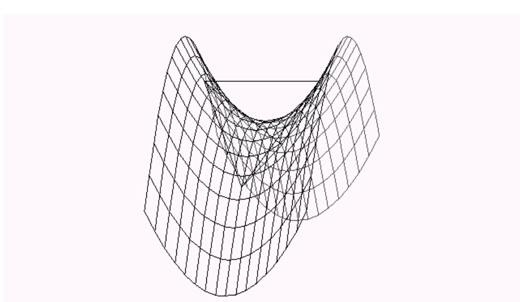


Рис. 39

После выполнения обоих этапов программы на экране дисплея должно появиться изображение гиперболического параболоида и тетраэдра, вершины которого принадлежат поверхности. параболоида. На рисунке 39 приведён один из возможных вариантов этого изображения.

Выполнение ЭТАПА №3. Рассмотрим плоскость $z = h$. Подставим в уравнение $-\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = z$ гиперболического параболоида значение $z = h$ и выразим оттуда x^2. Получим $x^2 = p(y^2/q - h)$. Обозначим выражение, стоящее в правой части через H1. Если H1 неотрицательно, находим экранные координаты сначала точки $(\sqrt{H1}; y; H)$, а затем точки $(-\sqrt{H1}; y; H)$ и соединяем их отрезком. Организовав цикл по *y*, мы получим требуемое сечение. Для того чтобы построить оба сечения можно рассмотреть цикл по переменной *H*, которая принимает всего два значения: 1 и –1. Окончательно программа примет следующий вид:

```
sech: FOR h = -l TO l STEP 2 * l: z = h
 FOR y = -y1 TO y1 STEP .2
  h1 = (y ^ 2 / q - h) * p: IF h1 < 0 THEN GOTO nexy
  x = SQR(h1): GOSUB uv: u1 = u: v1 = v
  x = -x: GOSUB uv: LINE (u1, v1)-(u, v), 8
nexy: NEXT y, h: RETURN
en: SLEEP
```

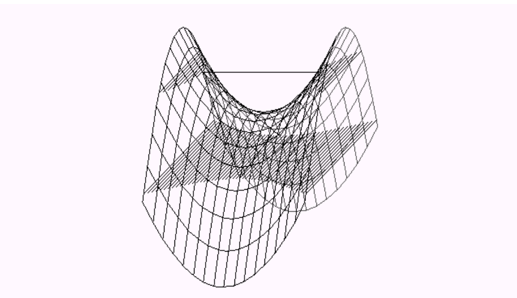


Рис. 40

После выполнения всех этапов проекта на экране персонального компьютера должно появиться изображение, представленное на рисунке 40.

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой; определения видимости полигона; построения сечений плоскостями, параллельными координатным плоскостям; изображения куба, изображения тетраэдра.

Программное обеспечение: среда Qbasic, пакет Maple.

Самостоятельная работа студентов. Для самостоятельной работы во внеучебное время студентам можно предложить следующие *учебные проекты и задания*:

– построить на дисплее прямой круговой цилиндр, диаметр основания которого совпадает с высотой; сферу, описанную около него; сечение цилиндра плоскостью, проходящей через центр сферы и образующей угол в 45 градусов с осью цилиндра; вывести на экран следующую информацию: а) площадь сечения, б) объём шара, в) объём тела, заключённого между сферой и боковой поверхностью цилиндра;

– изобразить на дисплее прямой круговой конус, высота которого совпадает с диаметром основания; вписанную в него сферу и сечение сферы плоскостью, проходящей через точки касания конуса и сферы; вывести на экран следующую информацию: а) объём конуса, б) объём шара, в) площадь сечения;

– построить на дисплее поверхность второго порядка (эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды) в виде окрашенных горизонтальных полос-параллелей с окрашенным правильным тетраэдром, вершины которого лежат на изображаемой поверхности;

– построить на дисплее эллипсоид в виде окрашенных вертикальных полос-меридиан со вписанной в него окрашенной правильной четырёхугольной призмой;

– построить на дисплее сферу с удалённой четвертью и вписанный в неё эллипсоид, вершины которого совпадают с полюсами сферы;

– построить на дисплее усечённый эллипсоид вращения (отсечены горизонтальными плоскостями части эллипсоида при вершинах, лежащих на оси аппликат) с удалённой четвертью, вертикальная полуось которого меньше горизонтальных полуосей, вписанную в неё усечённую сферу, причём окружности, ограничивающие одну поверхность, совпадают с соответствующими окружностями второй поверхности;

– построить на дисплее однополостный гиперболоид с удалённой четвертью и вписанный в него эллипсоид, экваториальное сечение которого совпадает с соответствующим сечением гиперболоида;

– построить на дисплее поверхность второго порядка (эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды, конус или цилиндр) в виде сечения его семейством параллельных плоскостей, расположенных произвольно;

– построить на дисплее двуполостный и однополостный гиперболоиды, полученные в результате вращения двух сопряжённых гипербол;

– построить на экране дисплея эллиптический параболоид вращения в виде окрашенных вертикальных полос-меридиан с правильной шестиугольной пирамидой, вершина которой совпадает с вершиной параболоида, а вершины основания принадлежат поверхности;

– построить на экране дисплея однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид в виде семейства прямолинейных образующих;

– построить на экране дисплея башню Шухова;

– построить компьютерную модель окрашенного усечённого эллипсоида $\frac{x^2}{a_1^{\,2}}+\frac{y^2}{b_1^{\,2}}+\frac{z^2}{c_1^{\,2}}=1; -h \le z \le h$, $(0<h<c_1)$ с удалённой четвертью (для частичного обзора внутренней области удобно удалить точки поверхности, имеющие одновременно положительные абсциссы и ординаты) и вписанного в него усечённого однополостного гиперболоида, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; $-h \le z \le h$ (рис. 41).

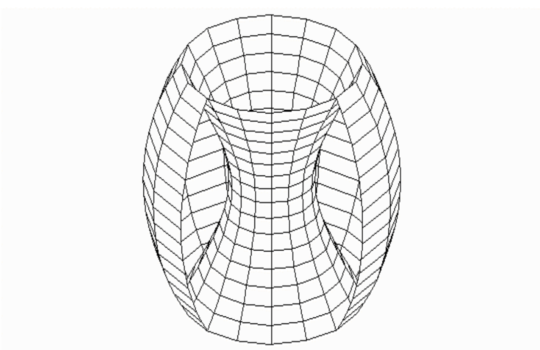


Рис. 41

Рассмотрим выполнение последнего проекта.

Составление программы, позволяющей построить на экране персонального компьютера указанную в проекте комбинацию поверхностей, можно начать с формирования подпрограмм. Первая подпрограмма **uv** – перевод пространственных координат в экранные, которую предваряет ремарка и переход к основной программе:

```
REM усечённые эллипсоид и однополостный гиперболоид
GOTO START
uv:  u = 1.25 * m * SQR(3) / 2 * (y - x) + 320
v = -m / 2 * (2 * z - x - y) + 175: RETURN
```

Вторая подпрограмма **uve** – это вычисление декартовых координат точки эллипсоида по её криволинейным координатам, а после обращения к подпрограмме **uv**, – экранных координат той же точки:

```
uve:  x = a1 * COS(s) * COS(t): y = b1 * COS(s) * SIN(t)
      z = c1 * SIN(s): GOSUB uv: RETURN
```

Аналогичная подпрограмма **uvg** составляется для однополостного гиперболоида:

```
uvg: x = a * SQR(1 + z ^ 2 / c ^ 2) * COS(t)
     y = b * SQR(1 + z ^ 2 / c ^ 2) * SIN(t)
     GOSUB uv: RETURN
```

В следующей подпрограмме **poligon** изображается (при $k = 1$) или не изображается (при $k = -1$) элементарная клетка-полигон с вершинами в точках 1, 2, 3 и 4, видимая с внешней или с внутренней стороны. Сначала подсчитывается определитель видимости det, составленный из координат векторов $\overrightarrow{12}$ и $\overrightarrow{14}$ (заметим, что в нашем проекте все полигоны будут иметь форму четырёхугольника). Изображение полигона будет зависеть теперь от знака выражения k·det. При $k = -1$ неравенство $\det \cdot k > 0$ эквивалентно неравенству $\det < 0$ и, следовательно, не изобразится лицевой полигон. При $k = 1$ уже не изобразится нелицевой полигон. Границу полигона будем изображать цветом cg, внутреннюю область заливать цветом ci.

Приведём возможный вариант подпрограммы:

```
poligon:  det = (u(2) - u(1)) * (v(4) - v(1)) - (u(4) - u(1)) * (v(2) - v(1))
```

```
IF det * k > 0 THEN RETURN
PSET (u(4), v(4)), CG: FOR i = 1 TO 4: LINE -(u(i), v(i)), CG: NEXT i
PAINT ((u(1) + u(3)) / 2, (v(1) + v(3)) / 2), CI, CG
RETURN
```

Составим теперь подпрограмму **ellipsoid** построения изображения эллипсоида:

```
ellipsoid: FOR s0 = -s1 TO s1 - hs + .01 STEP hs
 FOR t0 = pi / 2 TO 2 * pi - ht STEP ht
  t = t0: s = s0: GOSUB uve: u(1) = u: v(1) = v
  t = t0 + ht: GOSUB uve: u(2) = u: v(2) = v
  s = s0 + hs: GOSUB uve: u(3) = u: v(3) = v
  t = t0: GOSUB uve: u(4) = u: v(4) = v: GOSUB poligon
NEXT t0, s0: RETURN
```

При обращении к этой подпрограмме необходимо задать угол s_1, $0 < s_1 < \pi / 2$, который определяет границы изменения параметра s_0; шаги hs и ht изменения параметров s_0 и t_0, соответственно; коэффициент k, коды цвета cg и ci (они необходимы в подпрограмме “poligon”).

Аналогично составляется подпрограмма построения изображения гиперболоида:

```
giperboloid: FOR z0 = -h TO h - hz + .01 STEP hz
  FOR t0 = 0 TO 2 * pi - ht + .01 STEP ht
   z = z0: t = t0: GOSUB uvg: u(1) = u: v(1) = v
   t = t0 + ht: GOSUB uvg: u(2) = u: v(2) = v
   z = z0 + hz: GOSUB uvg: u(3) = u: v(3) = v
   t = t0: GOSUB uvg: u(4) = u: v(4) = v: GOSUB poligon
NEXT t0, z0: RETURN
```

Теперь основная часть программы будет иметь простой вид. Как и обычно, вначале задаётся графический экран, масштаб m и число π. Затем определим полуоси эллипсоида: a_1, b_1 и c_1. Поскольку при $z = h$ обе поверхности пересекаются по одной линии (эллипсу), то полуоси a_1 и b_1 эллипсоида получаются из полуосей a и b гиперболоида умножением на некоторый множитель g, допустим $g = 3$ (гиперболоид находится внутри эллипсоида, поэтому $g > 1$). Начало рабочей части программы может иметь следующий вид:

```
start: SCREEN 9: m = 33:  pi = 3.142
a = 1: b = 1: c1 = 5: g = 3: a1 = g * a: b1 = g * b
```

Для того чтобы определить третью полуось с гиперболоида, зададим сначала верхнюю границу изменения параметра s_0 – угол s_1, затем найдём соответствующее этому углу значение h аппликаты, которое ограничивает изменение параметра z_0 в подпрограмме **giperboloid**. Кроме того, зададим шаги hs, ht и hz циклов. Соответствующая строка программы может иметь следующий вид:

```
s1 = pi / 4: h = c1 * SIN(s1): hz = h / 8: hs = s1 / 8: ht = pi / 8
```

Определим теперь коэффициент c. Для этого в канонические уравнения обеих поверхностей подставим $z=H$: $\frac{x^2}{a_1^{\ 2}}+\frac{y^2}{b_1^{\ 2}}+\frac{h^2}{c_1^{\ 2}}=1$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=1$. Так как $a_1 = a \cdot g$ и $b_1 = b \cdot g$, то перепишем оба уравнения в виде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=g^2-\frac{h^2 g^2}{c_1^{\ 2}}$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$. Приравняем правые части этих равенств и найдём c^2: $c^2=\frac{h^2 \cdot c_1^{\ 2}}{g^2 \cdot c_1^{\ 2}-g^2 \cdot h^2-c_1^{\ 2}}$. Очередная строка может иметь следующий вид:

```
c = h * c1 / SQR(ABS(g ^ 2 * c1 ^ 2 - g ^ 2 * h ^ 2 - c1 ^ 2))
```

После задания начальных условий в следующих четырёх строках изображаем последовательно внутреннюю сторону эллипсоида, внутреннюю сторону гиперболоида, внешнюю сторону гиперболоида и, наконец, внешнюю сторону эллипсоида. Каждая последующая поверхность заслоняет некоторую часть предыдущей поверхности, создавая тем самым эффект удаления невидимых частей моделируемой конфигурации объектов:

```
k = -1: ci = 9 cg = 7: GOSUB ellipsoid
k = -1: ci = 10 cg = 6: GOSUB giperboloid
k = 1: ci = 11 cg = 8: GOSUB giperboloid
```

k = 1: ci = 12 cg = 15: GOSUB ellipsoid

После выполнения программы на экране монитора персонального компьютера должно появиться изображение, представленное на рисунке 40 (cg = 15, ci = 12). Отметим, что при некотором значении масштабного коэффициента *m* краска для некоторых полигонов может вылиться за их границу. Однако всегда можно подобрать такое значение этого коэффициента, что краска будет заливать лишь внутренние области всех полигонов обеих поверхностей.

Проекты такого типа аналогичны учебным проектам, рассмотренным нами в теме «Линии второго порядка», однако в отличие от последних они предполагают более высокий уровень геометрической подготовки и пространственного воображения студентов.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: в рассмотренной теме подробно изучаются поверхности второго порядка, закрепляются не только традиционные методы их изображения, но и изображения, в основе которых лежит вычислительный метод, закрепляется метод сечений, используемый при изучении поверхностей второго порядка, отрабатывается умение определять длину ребра куба или тетраэдра, особым образом расположенного по отношению к поверхности, проводится пропедевтика раздела «Поверхности в евклидовом пространстве».

Базовые знания: знание основных положений темы «Линии второго порядка», методов построения изображений при ортогональном проектировании, способов компьютерного моделирования поверхностей, умение определять видимость полигона, а также знание простейших графических возможностей языка программирования Qbasic.

Основные преимущества использования компьютерных технологий при изучении рассматриваемой темы. Использование компьютерных технологий в теме «Поверхности второго порядка» позволяет:

– разработать и применить в учебном процессе систему учебных проектов и задач, позволяющих устанавливать связь между аналитическим заданием поверхности второго порядка и изображением этой поверхности;

– научить студентов применять компьютер при проверке правильности параметрического задания поверхности, использовать уравнения поверхностей второго порядка при компьютерном конструировании более сложных фигур;

– научить студентов быстро и эффективно готовить необходимый демонстрационный материал по теме «Поверхности».

Тема. Компьютерное моделирование поверхностей невыпуклых тел

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: тор, общее и параметрические уравнения тора, методы компьютерного моделирования поверхностей невыпуклых тел, плоские сечения поверхностей на экране компьютера, алгоритмы удаления невидимых линий и поверхностей, решение задачи глобальной видимости методом закраски.

На изучение темы отводится по 2 часа лекционных, практических и лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который связан с реализацией концепции КПГ.

Лекции. На лекции необходимо обсудить задачу глобальной видимости, связанную с заслонением лицевых полигонов другими полигонами, расположенными ближе к пользователю и принадлежащими этой или другим поверхностям. Впервые с этой задачей студенты сталкиваются при изображении невыпуклых тел, поскольку всегда существует направление проектирования, при котором одни лицевые клетки поверхности такого тела будут заслоняться другими лицевыми клетками этой же поверхности. Необходимо рассказать о решении этой задачи простейшим способом, основанным на методе «сортировки по глубине» и последовательной закраски полигонов, об основных алгоритмах построения плоского сечения поверхности на экране компьютера. На лекции желательно составить программу построения на дисплее изображения простейшего невыпуклого тела – тора (впервые с этой фигурой студенты встречаются при изучении поверхностей вращения), сечение тора произвольной плоскостью. На лекции преподаватель формулирует и приводит вариант решения следующей задачи.

Задача. Построить на дисплее полигональную модель окрашенного тора с удалёнными невидимыми линиями, изобразить сечение тора произвольной плоскостью.

Для экономии учебного времени при выполнении первой части задачи можно воспользоваться составленной ранее программой построения полигональной модели сферы. Создаваемая нами программа будет лишь незначительно отличаться от неё прежде всего параметрическими уравнениями: $x=(a+rCOS(s))COS(t)$, $y=(a+rCOS(s))SIN(t)$, $z = rSIN(s)$, где r – радиус порождающей окружности, a – расстояние от центра этой окружности до оси тора. Во-вторых, тем, что каждый полигон тора, включая полигоны первого и последнего слоёв, представляет собой окрашенный четырёхугольник, ограниченный соседними параллелями и меридианами. Последнее обстоятельство даже упрощает алгоритм определения видимости полигона, так как отпадает необходимость вычисления двух определителей. Приведём один из вариантов программы:

```
REM тор окрашенный (полигональный метод)
SCPEEN 9: m = 30: a = 2: PI = 3.142: H = PI/20
FOR t0 = 0 TO 2 * PI – H STEP H
  FOR s0 = 0 TO 2 * PI – H STEP H
  t = t0: s = s0: GOSUB uv: u(1) = u: v(1) = v
  t = t0 + H: GOSUB uv: u(2) = u: v(2) = v
  s = s0 + H: GOSUB uv: u(3) = u: v(3) = v
  t = t0: GOSUB uv: u(4) = u: v(4) = v
  det = (u(2)-u(1))*(v(3)-v(1))-(u(3)-u(1))*(v(2)-v(1))
```

```
  IF det >=0 THEN GOTO nex
  PSET (u(4), v(4)): FOR i = 1 TO 4: LINE – (u(i), v(i)): NEXT i
  PAINT((u(1)+u(3))/2,((v(1)+v(3))/2),1,15
nex: next s0, t0: GOTO en
uv: x = (a+COS(s))*COS(t): y=(a+COS(s))*SIN(t): z=SIN(s)
   u = 1.25 * m * SQR(3) / 2 * (y-x) + 320
   v=- m / 2 * (2 * z – x - y) + 175: RETURN
en: SLEEP
```

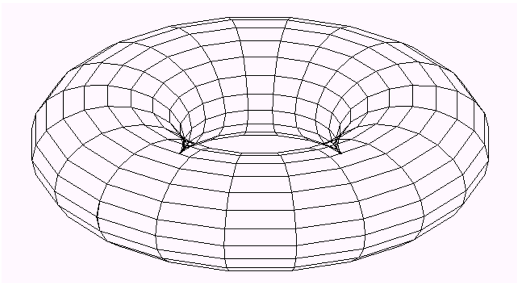


Рис. 42

На экране компьютера появится изображение, представленное на рисунке 42.

Для удаления невидимых линий в программе использовался проверенный на выпуклых телах алгоритм, при котором нелицевые полигоны не изображались. При внимательном изучении чертежа на дисплее студенты должны заметить, что на некоторых полигонах видны изображения не принадлежащих им линий. Особенно это заметно в случае, когда направление параллельного проектирования образует совсем небольшой угол с плоскостью экватора тора (можно продемонстрировать такое изображение). Чтобы удалить эти линии, нужно знать их происхождение. Обсуждение со студентами этой проблемы должно привести к мысли о том, что появление этих линий связано с неправильным порядком изображения конкурирующих лицевых полигонов. Для рассматриваемого нами частного случая расположения тора её можно решить просто: сначала изобразить ту половину тора, которая расположена дальше от пользователя (для этого достаточно начать цикл по t_0 не с 0, а с 3*PI/4), и лишь после этого – оставшуюся часть (это произойдёт

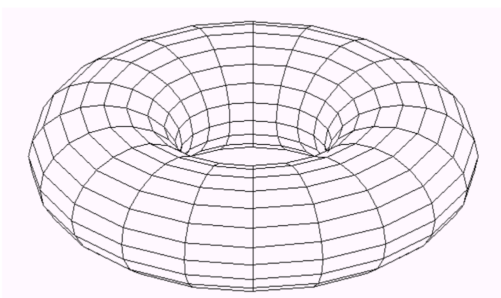


Рис. 43

автоматически, если цикл завершить значением t_0=11*PI/4-H). Такой порядок изображения полигонов тора позволит удалить все лишние линии (рис. 43; правда, перед окраской каждого полигона нам придётся ещё один раз дополнительно изображать его контур и заливать внутреннюю область новым для экрана цветом, что связано с особенностями команды PAINT).

После реализации этого алгоритма следует обратить внимание студентов на то, что при произвольном расположении тора найти первоначальное значение параметра t_0 не всегда просто. Чтобы подготовить их к успешному выполнению очередной лабораторной работы, необходимо дать им следующую рекомендацию: перед изображением колец произвольно расположенного тора следует создать массив их номеров а затем, переупорядочить этот массив в зависимости от величины угла, который образует радиус-вектор центра произвольного кольца с вектором проектирования.

При выполнении второй части задачи необходимо воспользоваться известным студентам алгоритмом построения плоского сечения многогранника, грани которого – выпуклые многоугольники. В качестве такой грани при изображении тора выступает полигон – выпуклый четырёхугольник.

Чтобы составить такую программу, достаточно внести небольшие изменения в предыдущую программу. Прежде всего, в первых строках программы необходимо задать коэффициенты общего уравнения секущей плоскости. Например,

A1 = 3: B1 = 1: C1 = 18: D1 = -12

Кроме того, в той части программы, где создаются массивы для экранных координат вершин полигона, необходимо сформировать массивы и для мировых координат этих вершин: **X(I), Y(I), Z(I), I = 1, 2, 3, 4, 5,** где для удобства считаем **X(5) = X(1), Y(5) = Y(1), Z(5) = Z(1).**

Теперь для завершения программы достаточно между строкой с меткой **nex,** в которой закрываются циклы по S_0 и T_0, и предшествующей ей строкой вставить следующий модуль:

```
REM построение сечения тора произвольной плоскостью
L = 0: FOR I = 1 TO 4
W1 = A1 * X(I) + B1 * Y(I) + C1 * Z(I) + D1
W2 = A1 * X(I + 1) + B1 * Y(I + 1) + C1 * Z(I + 1) + D1
IF W1 = 0 THEN L = L + 1: U1(L) = U(I): V1(L) = V(I)
IF W1 * W2 < 0 THEN 90 ELSE 100
90 L = L + 1: T = W1 / (W1 – W2)
X = X(I) + T * (X(I + 1) – X(I))
Y = Y(I) + T * (Y(I + 1) – Y(I))
Z = Z(I) + T * (Z(I + 1) – Z(I))
GOSUB uv1: U1(L) = U: V1(L) = V
100 NEXT I
IF L > 1 THEN LINE (U1(1), V1(1))-(U1(2), V1(2)), 8?
```

где метку **uv1** имеет строка **u = 1.3 * m * SQR(3) / 2 * (Y – X) + 320,** входящая в состав подпрограммы вычисления экранных координат.

Прокомментируем кратко этот модуль. С помощью параметра L ведётся подсчёт количества точек пересечения секущей плоскости с полигоном (первоначально этот параметр обнуляется). Затем открывается цикл по i для перебора вершин полигона. В уравнение секущей плоскости подставляются координаты i-й и $(i+1)$-й вершин, соответствующие значения присваиваются параметрам w_1 и w_2. Если i-я вершина принадлежит плоскости, то L увеличивается на единицу и «запоминаются»

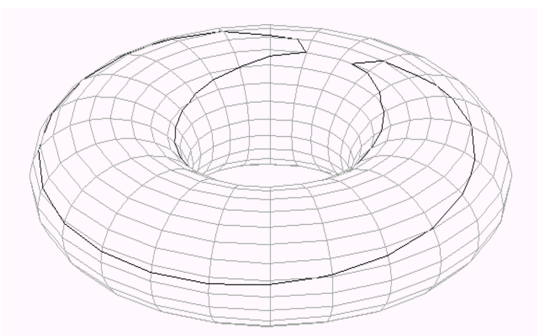


Рис. 44

экранные координаты этой вершины. Если i-я и $(i+1)$-я вершины лежат по разные стороны плоскости, то находятся мировые и экранные координаты точки пересечения секущей плоскости с прямой, содержащей эти вершины. В противном случае выполняется переход на конец цикла по i. Наконец, осталось закрыть цикл по i и в случае, если найдено более одной точки пересечения, соединить их отрезком. После выполнения всей программы на экране компьютера появится изображение, представленное на рисунке 44. На лекции студентам желательно продемонстрировать действие этой программы.

Практические занятия. На практическом занятии необходимо обсудить алгоритм сортировки по глубине при компьютерном моделировании произвольно расположенного тора, рассмотреть задачу построения сечения произвольно расположенного тора плоскостью.

Кроме этого, на практическом занятии можно рассмотреть некоторые другие поверхности, которые похожи на тор (поверхности торического типа). Например, можно рассмотреть так называемый пережатый тор, «тор», у которого радиус образующей окружности меняется в процессе её вращения, а также поверхности торического типа, у которых образующая окружность заменена на линию, близкую по форме к окружности.

Лабораторные занятия. По этой теме предполагается проведение одного лабораторного занятия, посвящённого выполнению лабораторной работы № 4.3 «Невыпуклые тела и их сечения плоскостями».

*Лабораторная работа № 4.3 «*Невыпуклые тела и их сечения плоскостями*»*.

Организация работы: проводится в форме одного учебного проекта № 4.3.1 под руководством преподавателя.

Учебные цели: научиться применять векторный и координатный методы при компьютерном моделировании тора, строить его изображение на экране компьютера в случае произвольного его расположения по отношению к системе координат. Отработать основные методы решения позиционных задач на экране компьютера.

Учебный проект № 4.3.1 «Тор». Построить компьютерную модель произвольно расположенного окрашенного тора. Изобразить тор в виде сечения его поверхности семейством параллельных плоскостей.

Выполнение проекта можно разбить на следующие три этапа.

ЭТАП №1. Построить на экране персонального компьютера окрашенный тор, ось которого совпадает с осью аппликат.

ЭТАП №2. Построить на экране персонального компьютера окрашенный тор, ось которого не совпадает с осью аппликат.

ЭТАП №3. Изобразить на дисплее поверхность тора в виде сечения семейством параллельных плоскостей.

Обсудим лишь отдельные вопросы, связанные с выполнением этих этапов проекта.

Выполнение ЭТАПА №1. Этот этап, по сути дела, был выполнен на лекции преподавателем, студентам нужно лишь реализовать его на своём компьютере.

Выполнение ЭТАПА №2. Как отмечалось выше, основная трудность в выполнении второго этапа – это изменение порядка изображения полигонов тора. Здесь преподаватель должен оказать помощь студенческой группе в составлении соответствующего модуля программы. Прежде всего, незначительно изменяется подпрограмма **uv**:

```
uv: REM вычисление координат точки
X = (A + R * COS(S)) * COS(T): Y = (A + R * COS(S)) * SIN(T) : Z = R * SIN(S)
L = Y * CQ - Z * SQ: X1 = X * CP - L * SP
Y1 = X * SP + L * CP: Z1 = Y * SQ + Z * CQ
U = 1.3 * M * SQR(3) / 2 * (Y1 - X1) + 320
V = M / 2 * (X1 + Y1 - 2 * Z1) + 175: RETURN
```

В этой подпрограмме после вычисления мировых координат (x, y, z) точки тора предусматривается нахождение координат (x_1, y_1, z_1) её образа при выполнении композиции двух поворотов пространства: сначала вокруг оси аппликат на угол в P радиан, а затем вокруг оси абсцисс на угол в Q радиан (SP, SQ и CP, CQ – их синусы и косинусы, соответственно). В первых строках необходимо задать величины этих углов и значения соответствующих тригонометрических функций.

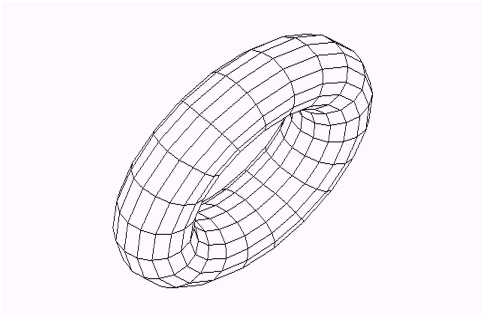
Основные изменения коснутся лишь формирования внешнего цикла, с помощью которого устанавливается порядок изображения колец тора, каждое из которых состоит из одного слоя полигонов, заключённых между двумя соседними меридианами. Остановимся на описании алгоритма, более подробное изложение приведено в учебном пособии [114]. Основная идея алгоритма заключается в том, что на i-м кольце тора находятся пространственные координаты точки (обозначим её M_i), равноудалённой от сторон кольца и находящейся на максимальном расстоянии $A + R$ от оси тора. Рассматривается массив $R(i)$ скалярных произведений радиус-векторов этих точек и вектора ортогонального проектирования (1, 1, 1). Чем меньше $R(i)$, тем больше угол между радиус-вектором точки и вектором проектирования и, следовательно, тем дальше расположены точка M_i и содержащее её кольцо от пользователя.

Используя этот массив, создаётся новый массив $G(i)$, первому элементу $G(0)$ которого присваивается номер наименьшего элемента из массива $R(i)$, следующему, $G(1)$, – номер наименьшего из оставшихся элементов этого же массива и так далее. При этом используется известный из программирования метод «забивания» в массиве $R(i)$ очередного найденного элемента достаточно большим числом. Приведём начальный фрагмент программы, включая две строки, в которых формируются циклы по изображению полигонов тора:

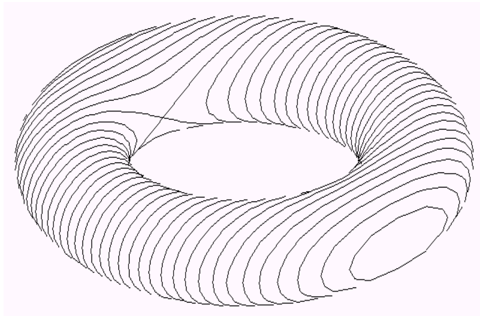
```
    REM тор окрашенный, произвольно расположенный
SCREEN 9: A = 6: R = 2: M = 17: PI = 3.142: HT = PI / 10: HS = PI / 8
    P = 0: Q = 1.3: N = 2 * PI / HS: DIM R(N), G(N)
CP = COS(P): SP = SIN(P): CQ = COS(Q): SQ = SIN(Q)
T = HT / 2: S = 0
FOR I = 0 TO N - 1: GOSUB uv
 R(I) = X1 + Y1 + Z1: T = T + HT: NEXT I
 FOR J = 0 TO N - 1: B = R(0): G(J) = 0
```

```
FOR I = 0 TO N - 1
IF R(I) <= B AND R(I) < 10000 THEN B = R(I): G(J) = I
NEXT I: R(G(J)) = 10000: NEXT J
FOR J = 0 TO N - 1: T0 = G(J) * HT
FOR S0 = 0 TO 2 * PI - HS + .1 STEP HS
```

Остальная часть программы не изменена. После выполнения программы на дисплее появится изображение, представленное на рисунке 45 а).



а)



б)

Рис. 45

Выполнение ЭТАПА №3. Основной элемент этого этапа был выполнен преподавателем на лекции: построено сечение тора произвольной плоскостью. Теперь достаточно в этой программе организовать дополнительный цикл по свободному члену общего уравнения плоскости, чтобы получить искомое сечение тора семейством параллельных плоскостей. Как и на лекции, для большей наглядности можно рассматривать сечение плоскостями лишь лицевых полигонов. При достаточно большом количестве секущих плоскостей отпадает необходимость изображать сами полигоны. На рисунке 45 б) представлено одно из таких изображений для случая, когда ось тора совпадает с осью аппликат. Чтобы не изображать невидимые линии сечений при произвольном расположении тора, необходимо сохранить в программе изображение лицевых полигонов, однако сделать их невидимыми. Для этого достаточно, например, при повторном окрашивании полигона его внутреннюю область залить цветом фона. После этого контур полигона также изобразить этим же цветом.

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой; пересчёта координат точек при повороте системы координат вокруг осей координат; определения видимости полигона; пересечения прямой и плоскости; пересечения полигона и плоскости; пересчёта координат точек при повороте системы координат вокруг осей координат.

Программные средства: среда программирования Qbasic.

Самостоятельная работа студентов. Для самостоятельной работы во внеучебное время студентам можно выдать следующие опорные, базовые и комплексные учебные проекты:

– построить на дисплее изображение произвольно расположенного тора, поверхность которого окрашена цветной мигающей мозаикой;

– пусть задано расстояние от центра образующей окружности тора до его оси. Найти радиус этой окружности так, чтобы на поверхности полученного тора можно было расположить вершины некоторого куба и притом единственным (с точностью до поворота вокруг оси тора) способом. Построить на дисплее этот тор, куб, вершины которого лежат на поверхности тора и сечение тора плоскостями, проходящими через некоторые грани куба; вывести на экран следующую информацию: а) радиус образующей окружности; б) объём куба; в) площадь полосы, заключённой между двумя концентрическими окружностями, полученными в результате сечения тора плоскостью, проходящей через горизонтальную грань куба;

– построить на дисплее изображение вращающегося вокруг своей оси тора;

– построить на дисплее изображение пережатого тора;

– построить на дисплее частичные изображения тора с видимыми лицевыми и нелицевыми полигонами в виде: а) чередующихся окрашенных колец, расположенных вертикально, б) чередующихся окрашенных колец, расположенных горизонтально, в) окрашенных полигонов, расположенных в шахматном порядке;

– построить на дисплее поверхности «похожие» на тор, в которых образующая окружность в процессе вращения меняет радиус по различным законам (например, так, что в результате получается «огибающая семейства сфер»);

– построить на дисплее «разрезанный» по некоторому меридиану тор и с разнесёнными вдоль оси аппликат началом (ниже горизонтальной координатной плоскости) и концом (выше этой плоскости);

– построить на дисплее изображение «рожка» – поверхности с равномерно увеличивающейся и одновременно не только вращающейся вокруг оси аппликат, но и перемещающейся вдоль неё образующей окружности.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: в теме подробно изучаются торические поверхности, рассматриваются не только традиционные методы их изображения, но и изображения, в основе которых лежит вычислительный метод, закрепляется метод сечений произвольной плоскостью и даже семейством параллельных плоскостей, рассматриваются аналитические методы решения позиционных задач.

Базовые знания: знание геометрии тора, методов построения изображений при ортогональном проектировании, способов компьютерного моделирования поверхностей, а также простейших графических возможностей языка программирования QBASIC.

Основные преимущества использования компьютерных технологий при изучении рассматриваемой темы. Использование компьютерных технологий в теме «Компьютерное моделирование невыпуклых тел» позволяет:

– разработать и применить в учебном процессе систему учебных проектов и задач, позволяющих устанавливать связь между аналитическим заданием тора и изображением этой поверхности;

– научить студентов применять компьютер при проверке правильности параметрического задания поверхности, использовать уравнения тора и методы его визуализации при компьютерном конструировании более сложных фигур;

– обучить студентов самостоятельно готовить демонстрационный материал для изучения различных поверхностей, в том числе поверхностей торического типа.

ГЛАВА VI. Реализация концепции при изучении геометрических преобразований

Приведём сначала содержание модуля «Геометрические преобразования» и краткие комментарии к нему.

Модуль «Геометрические преобразования»: понятие геометрического преобразования, примеры. Композиция преобразований, группа преобразований. Движения плоскости и пространства. Классификация движений плоскости. Симметрии фигур. Подобия плоскости и пространства, гомотетии. Аффинные преобразования, родство. Инверсия, свойства инверсии. *Компьютерная визуализация движений, подобий, аффинных преобразований и инверсий.* Использование геометрических преобразований при решении задач, *в том числе с применением компьютерно-ориентированной методики*. Теоретико-групповой подход к классификации геометрий. Эрлангенская программа Ф. Клейна.

<u>Комментарии к модулю</u>. Модуль «Геометрические преобразования» представляет собой один из тех разделов курса геометрии, при обучении которых предлагаемая нами концепция КПГ реализуется наиболее эффективно. Связано это в первую очередь с тем, что на экране персонального компьютера, используя его анимационные возможности, можно без особого труда создать эффект перемещения фигуры под действием того или иного преобразования плоскости или пространства. Поскольку «оживить» картинку графическими средствами языка программирования невозможно без применения формул, задающих соответствующее преобразование, то появляется возможность заинтересовать студентов в мотивированном, осмысленном выводе этих формул, более глубоком усвоении таких понятий, как композиция преобразований, обратное преобразование, различные виды перемещений, подобий, аффинных преобразований, инверсий плоскости и пространства.

На лабораторных занятиях возможна не только визуализация этих преобразований, но и компьютерное моделирование с их помощью новых геометрических объектов, построение развёрток многогранников, манипулирование геометрическими объектами.

При решении конструктивных задач, связанных с применением геометрических преобразований плоскости, предполагается на лабораторно-практических занятиях использовать системы динамической геометрии, а на лабораторных занятиях при разработке учебных проектов – компьютерно-ориентированную методику.

Изучение модуля планируется в четвертом семестре. Общее число аудиторных учебных часов – 72. Из них 36 часов лекций, 14 – практических, 10 – лабораторно-практических, 12 – лабораторных занятий.

Рассмотрим возможные пути реализации концепции КПГ в некоторых темах модуля.

6.1. Тема. Движения плоскости и пространства

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: движения плоскости и пространства: перенос и поворот плоскости, осевая и скользящая симметрии, перенос и поворот пространства, винтовое движение пространства, отражение пространства относительно плоскости, скользящее и поворотное отражения пространства. Основные инварианты движений. Группа движений. Классификация движений плоскости, теорема Шаля. Аналитическое задание движений. Симметрии фигур. Строение конечной группы симметрий плоской фигуры. Компьютерная визуализация движений. Использование движений плоскости при решении задач, в том числе с применением компьютерно-ориентированной методики.

На изучение темы отводится 12 часов лекций, 6 – практики, 6 – лабораторно-практических занятий, 6 – лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который связан с реализацией концепции КПГ.

Лекции. На лекциях рекомендуется составить подпрограммы вычисления координат образа точки при различных перемещениях плоскости и пространства. Необходимо обсудить алгоритмы создания эффекта непрерывной деформации фигур под действием движений, привести примеры таких программ. Рассказать о компьютерно-ориентированной методике решения конструктивных задач на применение движений плоскости. Остановимся подробнее на некоторых вопросах, рассматриваемых на лекциях.

Подпрограммы вычисления координат точек при движениях плоскости. После вывода формул, аналитически задающих перемещения, необходимо составить подпрограммы вычисления координат образа точки при воздействии на последнюю движений плоскости. Каждой подпрограмме будем давать своё название (ставить метку в первой строке), чтобы в дальнейшем её можно было использовать в других программах и подпрограммах.

1. Параллельный перенос плоскости на вектор $\vec{a}$. Обозначим это перемещение плоскости через $T_{\vec{a}}$. Если вектор переноса имеет координаты (*ax*; *ay*), то формулы, связывающие координаты образа и прообраза имеют вид: $x' = x + ax$; $y' = y + ay$. Но тогда подпрограмму вычисления координат образа точки при параллельном переносе плоскости на вектор $\vec{a}$ можно записать следующим образом:

```
perenos2d: x = x + ax: y = y + ay: RETURN
```

В этой подпрограмме, как и во всех последующих, вновь вычисленные координаты присваиваются тем же переменным.

2. Поворот плоскости вокруг некоторой точки. Это перемещение иногда обозначают R_A^{φ}, где A – центр поворота, φ – угол поворота. Если центр поворота совпадает с началом координат, то формулы, задающие этот поворот, имеют вид:

$$x' = x \cdot COS(\varphi) - y \cdot SIN(\varphi)$$

$$y' = x \cdot SIN(\varphi) + y \cdot COS(\varphi)\ .$$

Соответствующую им подпрограмму можно записать следующим образом:

```
povorotO: xx = x * COS(fi) – y * SIN(fi):
            yy = x * SIN(fi) + y * COS(fi): x = xx: y = yy: RETURN
```

Пусть центр поворота *A* расположен произвольно по отношению к системе координат и имеет координаты $(x_0; y_0)$. В этом случае при выводе формул, задающих преобразование R_A^φ, предоставляется дополнительная возможность ещё раз обсудить со студентами понятие композиции преобразований. Поворот R_A^φ в этом случае можно представить в виде следующей композиции: $R_A^\varphi = T_{\overline{AO}} \circ R_O^\varphi \circ T_{\overline{OA}}$ (порядок выполнения – слева направо). Но тогда соответствующая подпрограмма будет иметь вид:

```
povorotA: ax=-x0: ay=-y0: GOSUB perenos2d: GOSUB povorotO
            ax=x0: ay=y0: GOSUB perenos2d: RETURN
```

Можно составить подпрограмму иначе, если предварительно композицию $R_A^\varphi = T_{\overline{AO}} \circ R_O^\varphi \circ T_{\overline{OA}}$ представить в аналитической форме:

$$x' = (x - x_0) \cdot COS(\varphi) - (y - y_0) \cdot SIN(\varphi) + x_0$$
$$y' = (x - x_0) \cdot SIN(\varphi) + (y - y_0) \cdot COS(\varphi) + y_0$$

Соответствующая подпрограмма будет иметь вид:

```
povorotB: xx = (x - x0) * COS(fi) - (y - y0) * SIN(fi) + x0
            yy = (x - x0) * SIN(fi) + (y - y0) * COS(fi) + y0: x = xx: y = yy: RETURN
```

В случае, если значения тригонометрических функций будут вычисляться в основном блоке программы, в виде:

```
povorotC: xx = (x - x0) * CO - (y - y0) * SI + x0
            yy = (x - x0) * SI + (y - y0) * CO + y0: x = xx: y = yy: RETURN
```

3. *Осевая симметрия плоскости.* Осевая симметрия, или симметрия относительно прямой *AB* (обозначают это перемещение в виде S_l, где $l=AB$ – ось симметрии), является движением второго рода и относится к одному из основных видов движений плоскости, поскольку с помощью композиции подходящих осевых симметрий можно получить любое

перемещение плоскости. Аналитическое задание этого перемещения существенным образом зависит от того, как расположена система координат по отношению к оси симметрии. Со студентами необходимо обсудить не только случай, когда ось симметрии совпадает с одной из осей координат, но и случай произвольного расположения оси симметрии по отношению к системе координат.

Если ось симметрии совпадает с осью абсцисс, то формулы, аналитически задающие это преобразование, имеют простой вид: $x' = x$, $y' = -y$. Соответствующая подпрограмма будет иметь вид:

simmOX: y = -y: RETURN

Если ось симметрии расположена произвольно по отношению к системе координат, то формулы и соответствующая подпрограмма выглядят уже иначе. Со студентами желательно обсудить по крайней мере два способа вычисления координат образа точки.

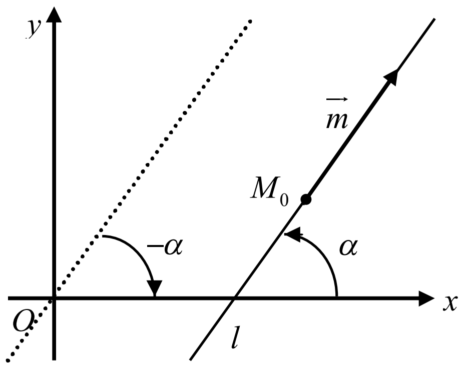


Рис. 46

Первый из них связан с представлением S_l в виде композиции переносов, поворотов вокруг начала координат и симметрии относительно оси *OX*. Действительно, если ось l задана точкой $M_0(x_0, y_0)$ и направляющим вектором $\vec{m}(mx, my)$, то осевая симметрия S_l представима в виде композиции $S_l = T_{\overline{M_0O}} \circ R_O^{-\alpha} \circ S_{OX} \circ R_O^{\alpha} \circ T_{\overline{OM_0}}$. Здесь через α обозначен ориентированный острый или прямой угол между осью l и осью абсцисс (рис. 46). Очевидно, $\alpha = \pi / 2$, если $mx = 0$, в противном случае $\alpha = arctg(my / mx)$. Поскольку для каждого сомножителя композиции известна подпрограмма, вычисляющая координаты образа произвольной точки, то составить соответствующую программу несложно. Приведём вариант такой подпрограммы:

simmAB: ax = -x0: ay = -y0: GOSUB perenos2d

```
IF mx = 0 THEN fi = -pi / 2 ELSE fi = -ATN(my / mx)
GOSUB povorotO: GOSUB simmOX: fi = - fi: GOSUB povorotO
ax = x0: ay = y0: GOSUB perenos2d:  RETURN
```

Второй способ нахождения координат точки, симметричной данной относительно некоторой прямой часто используется на практических занятиях при решении задач аналитической геометрии на плоскости. Если прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$, то формулы, позволяющие вычислить координаты образа точки через координаты прообраза, имеют следующий вид:

$$x' = x - 2A\frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}; \qquad y' = y - 2B\frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}.$$

Если ось симметрии задана точкой $M_0(x_0, y_0)$ и направляющим вектором $\vec{m}(mx; my)$, то соответствующая подпрограмма имеет следующий вид (в первой строке вычисляются коэффициенты общего уравнения оси симметрии):

```
simmABC: A = my: B = -mx: C = mx*y0 - my*x0
         tt = -(A*x + B*y + C) / (A^2 + B^2)
         x = x + 2*tt*A: y = y + 2*tt*B: RETURN
```

4. *Скользящая симметрия плоскости.* Поскольку скользящая симметрия $S_l^{\vec{a}}$ представляет собой композицию параллельного переноса $T_{\vec{a}}$ и осевой симметрии S_l относительно оси, коллинеарной вектору параллельного переноса (для простоты будем считать, что вектор переноса одновременно является и направляющим вектором оси симметрии), то соответствующая подпрограмма будет иметь вид:

```
skolzsimm: GOSUB perenos2d: mx=ax: my=ay
           GOSUB simmABC:  RETURN
```

<u>Подпрограммы вычисления координат точек при движениях пространства</u>. При изучении перемещений пространства роль персонального компьютера существенно возрастает. Так, если для иллюстрации действия перемещений плоскости на фигурах вполне можно

ограничиться лишь традиционными средствами обучения, то при переходе к пространству этих средств будет явно недостаточно.

Отметим одну особенность перехода от преобразований плоскости к преобразованиям пространства, несколько усложняющую процесс визуализации. Дело в том, что для создания полноты чертежа на экране компьютера необходимо строить дополнительно изображение мировой системы координат либо некоторой вспомогательной пространственной фигуры, с которой легко можно связать эту систему. В этом случае изображаемые точки должны быть естественным образом соотнесены с этой вспомогательной фигурой (лежать на рёбрах многогранника или осях системы координат). Иначе необходимо строить не только саму точку, но и её вторичную проекцию. В качестве фигуры-привязки чаще всего будем использовать куб. Если изображаемые точки не будут принадлежать рёбрам куба, то в некоторых случаях будем дополнительно изображать проекцию точки на плоскость основания куба.

На одной из лекций, предшествующих второму лабораторному занятию, необходимо рассмотреть способы аналитического задания перемещений пространства, и, в первую очередь, параллельного переноса, поворота вокруг произвольной оси и отражения относительно плоскости. Многие рассуждения здесь аналогичны рассуждениям, связанным с преобразованиями плоскости.

1. *Параллельный перенос $T_{\vec{a}}$ пространства на вектор $\vec{a}$*. Если вектор переноса $\vec{a}$ имеет координаты (*ax*; *ay*; *az*), то подпрограмма, вычисляющая координаты образа точки при параллельном переносе, будет иметь вид:

```
perenos3d: x = x + ax: y = y + ay: z = z + az: RETURN
```

2. *Поворот R_{AB}^{φ} пространства вокруг оси AB на угол φ* – один из трёх типов перемещений пространства, не меняющих его ориентацию. Это перемещение, как и параллельный перенос пространства, наиболее часто встречающийся вид преобразований. Переход от поворота плоскости к повороту пространства, несмотря на их большую схожесть, сопряжён с

определёнными математическими и методическими трудностями и требует от обучаемых прочных знаний метода координат в пространстве, высокий уровень пространственного воображения. Далеко не каждый студент может мысленно провести через точку-оригинал плоскость, перпендикулярную оси вращения, затем рассмотреть поворот этой плоскости вокруг точки её пересечения с осью вращения на требуемый угол, соблюдая при этом правило правого винта. Трудности возникают и при нахождении образа конкретной фигуры при конкретном повороте пространства. На лекции рекомендуется рассмотреть отдельно случай совпадения оси вращения с одной из осей координат.

Пусть первоначально *ось вращения совпадает с одной из осей координат*. Рассмотрим, например, поворот пространства на угол φ вокруг оси аппликат. При таком выборе оси поворота третья координата точки-образа будет такой же, как и у точки-оригинала, а первые две координаты будут изменяться по тем же законам, что и при повороте плоскости *XOY* вокруг начала координат. Соответствующая подпрограмма будет иметь вид:

```
povorotOZfi: xx = x * COS(fi) - y * SIN(fi)
             yy = x * SIN(fi) + y * COS(fi)
             x = xx: y = yy: RETURN
```

В некоторых случаях перед обращением к подпрограмме мы будем в самой программе определять косинус и синус угла поворота (присваивая соответствующие значения параметрам *CO* и *SI*), не находя угол *fi*. В этом случае подпрограмма будет выглядеть несколько проще:

```
povorotOZ: xx = x * CO - y * SI: yy = x * SI + y * CO: x = xx: y = yy: RETURN
```

Аналогичный вид имеют и другие подпрограммы, которые позволяют по координатам точки вычислить координаты её образа при вращении пространства вокруг двух оставшихся осей координат: *OX* и *OY*.

Пусть теперь *ось вращения AB расположена произвольно по отношению к системе координат* (положим *AB* = *l*). В этом случае нахождение образа точки при повороте пространства вокруг оси *l* усложняется. Выберем на оси l некоторую точку M_0, обозначим через $\vec{m}$ вектор, задающий ориентацию оси. Предположим, что известны координаты точки M_0 и вектора $\vec{m}$ в некоторой мировой системе координат. На лекции необходимо обсудить выполнение следующей задачи:

Задача. Представить поворот пространства на ориентированный угол вокруг оси, заданной точкой и вектором, в виде композиции параллельных переносов и поворотов вокруг осей координат.

Похожая задача уже рассматривалась при замене поворота плоскости вокруг произвольной точки на композицию переносов и поворота вокруг начала координат. Поэтому основная идея решения рассматриваемой задачи будет состоять в том, чтобы, используя лишь параллельные переносы пространства и повороты вокруг осей координат, совместить ось вращения l с одной из осей координат, допустим OZ. Затем совершить поворот пространства вокруг этой оси на заданный угол φ и, наконец, вернуть ось вращения в исходное положение. Если $\vec{m} = (mx; my; mz)$, то обозначим: через $\overrightarrow{m_1}$ его вектор-проекцию с координатами (mx; my; 0), через α, $(-\pi < \alpha \leq \pi)$ – ориентированный угол между вектором $\overrightarrow{m_1}$ и осью ординат. Если $\overrightarrow{m_1}$ нулевой вектор, то будем считать, что $\alpha = 0$. Угол между вектором $\vec{m}$ и осью аппликат обозначим через β $(0 \leq \beta \leq \pi)$ (рис. 47).

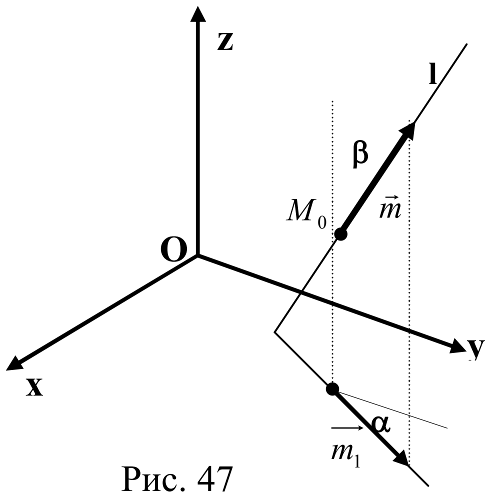


Рис. 47

Обсуждая со студентами решение задачи, можно предложить следующую последовательность выполнения перемещений:

– параллельным переносом $T_{\overrightarrow{M_0O}}$ ось l отобразить на ось l_1, проходящую через начало координат;

– поворотом R_{OZ}^{α} отобразить ось l_1 на ось l_2, лежащую в координатной плоскости YOZ, причём положительный луч этой оси будет лежать в той части плоскости YOZ, для которой $y \geq 0$;

– поворотом R_{OX}^{β} отобразить ось l_2 на ось l_3, совпадающую с осью OZ и одинаково с ней ориентированную;

– выполнить поворот R_{OZ}^{φ} пространства на угол φ вокруг оси l_3, совпадающей с осью OZ;

– поворотом $R_{OX}^{-\beta}$ вернуть ось вращения из положения l_3 в положение l_2;

– поворотом $R_{OZ}^{-\alpha}$ вернуть ось вращения из положения l_2 в положение l_1;

– параллельным переносом $T_{\overline{OM_0}}$ вернуть ось вращения из положения l_1 в исходное положение l.

Таким образом, интересующий нас поворот R_{AB}^{φ} можно представить в виде следующей композиции:

$$R_l^{\varphi} = T_{\overline{M_0O}} \circ R_{OZ}^{\alpha} \circ R_{OX}^{\beta} \circ R_l^{\varphi} \circ R_{OX}^{-\beta} \circ R_{OZ}^{-\alpha} \circ T_{\overline{OM_0}}$$

Для составления требуемой подпрограммы необходимо найти косинусы (cosA и cosB) и синусы (sinA и sinB) углов α и β. Так как α – угол между векторами (mx; my; 0) и (0; 1; 0), то в случае (mx; my; 0) ≠ (0; 0; 0) имеем $\cos A = my / \sqrt{mx^2 + my^2}$, $\sin A = mx / \sqrt{mx^2 + my^2}$. Если же вектор ($mx$; my; 0) является нулевым, то ось поворота совпадает с осью аппликат и, следовательно, можно положить α =0. Но тогда cosA = 1 и sinA = 0. Аналогично находится косинус угла β между векторами (mx; my; mz) и (0; 0; 1): $\cos B = mz / \sqrt{mx^2 + my^2 + mz^2}$. Поскольку угол β неотрицателен, то для вычисления синуса этого угла можно воспользоваться равенством $\sin B = \sqrt{1 - \cos B^2}$.

Отметим, что иногда при вычислении sinA используют основное тригонометрическое тождество, считая, как и в предыдущем случае, что sinA ≥ 0. Однако в этом случае для некоторых расположений оси l образ этой оси при повороте R_{OZ}^{α} не попадёт в плоскость *YOZ*. К ошибке может привести и неаккуратное использование функции y=arctg(x) при нахождении углов поворотов.

Отметим, что при данном алгоритме построения образа точки иногда нецелесообразно находить непосредственно сами углы α и β, так как при обращении к подпрограммам **povorotOZfi** и **povorotOXfi** вновь будут вычисляться косинусы и синусы этих углов. Поэтому в основной программе можно ограничиться вычислением косинусов и синусов углов α и β, затем присвоить эти значения соответственно переменным *CO* и *SI* и обратиться к подпрограммам **povorotOZ и povorotOX**. Приведём один из возможных вариантов подпрограммы:

```
povorotAB: SQ = SQR(mx ^ 2 + my ^ 2)
 IF SQ = 0 THEN cosA = 1: sinA = 0 ELSE cosA = my / SQ: sinA = mx / SQ
 cosB = mz / SQR(mx ^ 2 + my ^ 2 + mz ^ 2): sinB = SQR(1 - cosB ^ 2)
 ax = -x0: ay = -y0: az = -z0: GOSUB perenos3d
 CO = cosA: SI = sinA: GOSUB povrotOZ
 CO = cosB: SI = sinB: GOSUB povorotOX
 CO = COS(fi): SI = SIN(fi): GOSUB povorotOZ
 CO = cosB: SI = -sinB: GOSUB povorotOX
 CO = cosA: SI = -sinA: GOSUB povorotOZ
 ax = x0: ay = y0: az = z0: GOSUB perenos3d:  RETURN
```

3. *Винтовое движение пространства.* Винтовое движение f пространства представимо в виде композиции поворота R_l^{φ} и переноса $T_{\vec{m}}$ на вектор $\vec{m}$, параллельный оси поворота l. В связи с этим ось поворота l удобно задавать произвольной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{m}$, совпадающим с вектором параллельного переноса.

Соответствующая подпрограмма имеет следующий вид:

```
vintovoe: GOSUB povorotAB
 ax=mx: ay=my: az=mz: GOSUB perenos3d: RETURN
```

4. *Отражение пространства относительно плоскости.* Отражение (симметрия) S_{Π} пространства относительно плоскости П (зеркальное

отражение) занимает одно из центральных мест при изучении группы всех перемещений пространства. Связано это с тем, что любое перемещение пространства можно представить в виде композиции не более четырёх отражений. Поэтому на лекциях предполагается уделить особое внимание этому типу преобразований и, в частности, вопросам его аналитического задания и построения образов точек. Как и в других типах преобразований, аналитическое задание существенно зависит от того, как расположена система координат по отношению к плоскости симметрии. Возможны два случая.

Плоскость отражения совпадает с координатной плоскостью. Для определённости будем считать, что координатная плоскость XOY является плоскостью отражения. В этом случае отражение S_{XOY} аналитически задаётся весьма просто: $x' = x$; $y' = y$; $z' = -z$. Соответствующая подпрограмма будет иметь вид:

otrXOY: z = -z: RETURN

Аналогичный вид имеют подпрограммы, аналитически задающие симметрии относительно двух оставшихся координатных плоскостей.

Плоскость симметрии расположена произвольно по отношению к системе координат. Нахождение координат точки $M'(x';y';z')$, симметричной точке $M(x;y;z)$ относительно плоскости П, – часто встречающаяся задача в аналитической геометрии. Если плоскость П задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то $x' = x + 2\cdot t_0 \cdot A$; $y' = y + 2\cdot t_0 \cdot B$; $z' = z + 2\cdot t_0 \cdot C$, где $t_0 = -(Ax + By + Cz + D)/(A^2 + B^2 + C^2)$. В этом случае подпрограмма вычисления координат образа точки будет иметь вид:

```
otrABCD: tt = -(A*x + B*y + C*z + D) / (A^2 + B^2 + C^2)
         x = x + 2*tt*A: y = y + 2*tt*B: z = z + 2*tt*C: RETURN
```

Если плоскость задана точкой $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и параллельными ей неколлинеарными векторами $\vec{a}(xa;ya;za)$ и $\vec{b}(xb;yb;zb)$, то перед тем, как вычислить координаты симметричной точки, необходимо найти коэффициенты общего уравнения плоскости симметрии. Подпрограмма **otrABCD** в этом случае немного увеличится:

```
otrMab: A = ya * zb - yb * za: B = xb * za - xa * zb
 C = xa * yb - xb * ya: D = -A * x0 - B * y0 - C * z0
 tt = -(A*x + B*y + C*z + D) / (A^2 + B^2 + C^2)
 x = x + 2*tt*A: y = y + 2*tt*B: z = z + 2*tt*C: RETURN
```

Со студентами желательно обсудить и второй способ нахождения координат образа точки. Связан он с представлением отражения пространства в виде композиции простейших перемещений: параллельных переносов, поворотов относительно осей координат и симметрии относительно координатной плоскости. Пусть, как и выше, плоскость симметрии П задана точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и двумя неколлинеарными векторами, параллельными плоскости П: $\vec{a}(xa;ya;za)$ и $\vec{b}(xb;yb;zb)$. В качестве нормального вектора плоскости П можно взять векторное произведение $\vec{n}(nx;ny;nz)$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рисунок 48).

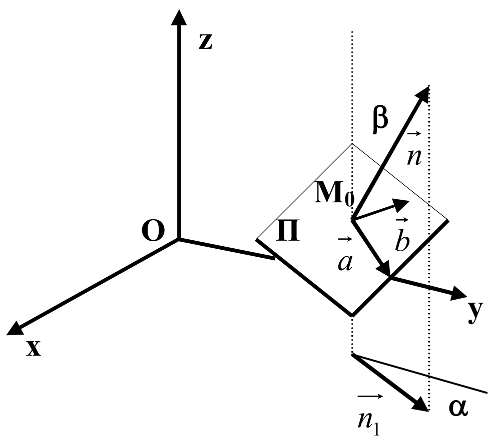


Рис. 48

Обозначим через $\overrightarrow{n_1}$ вектор-проекцию вектора $\vec{n}$ на плоскость z=0. Пусть α – ориентированный угол между вектором $\overrightarrow{n_1}$ и осью ординат $(-\pi < \alpha \leq \pi)$, β – угол между вектором $\vec{n}$ и осью аппликат $(0 \leq \beta \leq \pi)$. Как и в случае с поворотом пространства вокруг произвольной оси, отражение пространства относительно плоскости П можно представить в виде следующей композиции: $S_{П} = T_{\overrightarrow{M_0O}} \circ R_{OZ}^{\alpha} \circ R_{OX}^{\beta} \circ S_{XOY} \circ R_{OX}^{-\beta} \circ R_{OZ}^{-\alpha} \circ T_{\overrightarrow{OM_0}}$

Чтобы построить на экране ПК образ M' произвольной точки M под действием симметрии относительно плоскости П, нужно подействовать на M указанной композицией, используя для этого соответствующие подпрограммы. Приведём возможный вариант такой подпрограммы, где плоскость отражения задана точкой (x_0; y_0; z_0) и нормальным вектором (nx; ny; nz):

```
otrMn: SQ = SQR(nx ^ 2 + ny ^ 2)
  IF SQ = 0 THEN cosA = 1: sinA = 0 ELSE cosA = ny / SQ: sinA = nx / SQ
  cosB = nz / SQR(nx ^ 2 + ny ^ 2 + nz ^ 2): sinB = SQR(1 - cosB ^ 2)
  ax = -x0: ay = -y0: az = -z0: GOSUB perenos3d
  CO = cosA: SI = sinA: GOSUB povorotOZ
  CO = cosB: SI = sinB: GOSUB povorotOX
  GOSUB otrXOY
  CO = cosB: SI = -sinB: GOSUB povorotOX
  CO = cosA: SI = -sinA: GOSUB povorotOZ
  ax = x0: ay = y0: az = z0: GOSUB perenos3d: RETURN
```

5. *Скользящее отражение пространства.*

Поскольку скользящее отражение пространства представимо в виде композиции отражения и параллельного переноса на вектор параллельный плоскости отражения, то при составлении соответствующей подпрограммы, достаточно воспользоваться подпрограммами, приведёнными выше.

6. *Поворотное отражение пространства.* Поворотное отражение представляет собой композицию поворота пространства и отражения от плоскости, перпендикулярной оси поворота. Поэтому при составлении подпрограммы, позволяющей вычислить координаты образа точки, можно также воспользоваться полученными выше подпрограммами.

Алгоритмы и программы, позволяющие создавать на дисплее эффект непрерывного перемещения точек на плоскости и в пространстве. На лекции необходимо обсудить алгоритмы создания на экране компьютера эффекта непрерывного перемещения точки под действием движений плоскости и пространства.

Основная идея визуализации перемещения первого рода заключается в «измельчении» этого перемещения на элементарные сомножители-компоненты и построении на одной из двух поочерёдно меняющихся видеостраницах образа точки при воздействии на эту точку некоторой композиции сомножителей. Проиллюстрируем эту идею при составлении программы, визуализирующей на дисплее непрерывное перемещение точки при повороте (1) и переносе (2) плоскости:

1. Параллельный перенос плоскости на вектор $\vec{a}$. Предположим, что перенос плоскости задан вектором $\vec{a} = (ax; ay)$. Разделим этот вектор на некоторое, достаточно большое, натуральное число k. Затем, используя цикл по переменной s, меняющейся с шагом один от 1 до k, поочерёдно на каждую из двух видеостраниц (ap – номер активной видеостраницы, vp – номер визуальной видеостраницы) выводим образ точки $M(x1; y1)$ под действием параллельного переноса на элементарный вектор $s \cdot (\vec{a}/k)$. Через k шагов мы получим изображение искомого образа. Приведём один из возможных вариантов программы, реализующей этот алгоритм, в котором через (u_1,v_1) обозначены экранные координаты точки-оригинала (она так же будет изображаться на всех видеостраницах), через (p_1,q_1) – координаты перемещаемой точки:

```
REM непрерывное перемещение точки при движениях плоскости
SCREEN 9: m = 20: pi = 4 * ATN(1): k = 150: ap = 0: vp = 1
DATA 0,2 ‘ мировые координаты точки оригинала
READ x1, y1: x = x1: y = y1: GOSUB uv
u1 = u: v1 = v: p1 = u: q1 = v: GOTO start
REM подпрограммы: uv, perenos2d, perenos2danimacA, 2tochki
start: mx = 6: my = 4: GOSUB perenos2danimac
en: GOSUB 2tochki: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

В завершающей строке этой программы на экран выводится последний стоп-кадр анимации. С первыми двумя подпрограммами, упомянутыми в шестой строке, студенты знакомы, прокомментируем две последних. В подпрограмме **2tochki** строится изображение двух точек: точки-оригинала и точки, являющейся её образом при параллельном переносе на вектор $s \cdot (\vec{a}/k)$ (эта точка будет изображена при появлении s-ого стоп-кадра). Чтобы на экране не возникал эффект мигания, перед изображением точек установлен пустой цикл. Приведём эту подпрограмму:

```
2tochki: FOR i=1 TO 1000: NEXT i: PSET (u1, v1): PSET (p1,q1),14: RETURN
```

Эффект анимации создаётся операторами языка Qbasic в подпрограмме **perenos2danimacA**:

```
perenos2danimacA: ax = mx / k: ay = my / k
FOR s = 1 TO k: GOSUB 2tochki
 x = x1: y = y1: GOSUB perenos2d
 x1 = x: y1 = y: GOSUB uv: p1 = u: q1 = v
 SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s: RETURN
```

В этой подпрограмме сначала находятся координаты элементарного вектора переноса, затем в теле цикла по переменной s происходит пошаговое перемещение точки на этот вектор и вывод соответствующего изображения на активную видеостраницу.

2. Поворот плоскости вокруг произвольной точки. По аналогии с параллельным переносом создадим на дисплее эффект непрерывного перемещения точки под действием поворота плоскости. Для этого к блоку подпрограмм, составленной выше программы, добавим подпрограмму **povorotC** и следующую подпрограмму, создающую эффект анимации поворота:

```
povorotCanimacA: CO = COS(fi / k): SI = SIN(fi / k)
FOR s = 1 TO k: GOSUB 2tochki
 x = x1: y = y1: GOSUB povorotC
  x1 = x: y1 = y: GOSUB uv: p1 = u: q1 = v
 SWAP ap, vp:  SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s: RETURN
```

Добавим теперь к рабочей части программы, начинающейся с метки **start,** всего одну строку (ниже приведены все строки рабочей части, добавленная строка находится на второй позиции):

```
start: mx = 6: my = 4: GOSUB perenos2danimacA
x0 = -1: y0 = 1: fi = pi / 3: GOSUB povorotCanimacA
```

```
en: GOSUB2tochki: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

После запуска программы мы увидим на дисплее сначала параллельный перенос точки на вектор с координатами (6, 4), а затем поворот вокруг точки (-1, 1) на угол шестьдесят градусов.

3. Осевая симметрия плоскости. Идею визуализации перемещения второго рода рассмотрим на примере осевой симметрии (этот же алгоритм легко распространяется на скользящую симметрию и на отражение пространства относительно плоскости). Очевидно, способ, который использовался нами для визуализации перемещений первого рода, применить в этой ситуации нельзя, так как процедура «измельчения» осевой симметрии и представления её в виде композиции большого числа «маленьких» осевых симметрий лишена всякого смысла. Более того, поскольку осевая симметрия – это перемещение, меняющее ориентацию плоскости, то, находясь в плоскости (обозначим её через П), нельзя никакую фигуру F, содержащую по крайней мере три неколлинеарные точки, совместить некоторым движением первого рода с симметричной ей фигурой F'. Поэтому выйдем за пределы плоскости П. Начнём поворачивать в пространстве фигуру F вокруг оси симметрии l, одновременно проектируя её на плоскость П. После поворота на 180 градусов фигура F совместится с фигурой F'. На плоскости П мы получим семейство проекций. Выводя эти проекции поочерёдно на две видеостраницы, мы сможем создать на экране персонального компьютера эффект непрерывного отображения фигуры F на фигуру F'.

В блок подпрограмм, составленной выше программы, добавим подпрограмму **simmABC** и следующую подпрограмму, создающую эффект анимации при отображении точки на симметричную ей точку:

```
simmABCanimacA: x = x1: y = y1: GOSUB simmABC
ax1 = (x – x1) / k: ay1 = (y – y1) / k
FOR s = 1 TO k: GOSUB 2tochki
 x = x1: y = y1: ax = ax1: ay = ay1: GOSUB perenos2d
  x1 = x: y1 = y: GOSUB uv: p1 = u: q1 = v
```

```
SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s: RETURN
```

Отметим, что в приведённой подпрограмме вначале мы находим координаты точки M', симметричной точке M относительно оси l, затем – координаты элементарного вектора $\frac{1}{k}\overrightarrow{MM'}$ и, наконец, организовав цикл по s, моделируем на экране персонального компьютера процесс непрерывного перемещения точки M на вектор $\overrightarrow{MM'}$.

В результате изменения рабочей части программы точка после переноса и поворота дополнительно плавно переместится в свой образ при осевой симметрии относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов:

```
start: mx = 6: my = 4: GOSUB perenos2danimacA
x0 = -1: y0 = 1: fi = pi / 3: GOSUB povorotCanimacA
x0 = 0: y0 = 0: mx = 1: my = 1: GOSUB simmABCanimacA
en: GOSUB 2tochki: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

После составления программы лектор на компьютере, установленном в лекционной аудитории, может продемонстрировать действие композиции всевозможных движений плоскости на выбранной точке (желательно вместо точки рассмотреть более крупную фигуру, например, окрашенную окружность небольшого радиуса).

Компьютерно-ориентированная методика решения некоторых конструктивных задач. На лекции необходимо рассказать студентам о методике, которая позволяет использовать персональный компьютер при решении некоторых задач на построение циркулем и линейкой.

Как известно, существует много пакетов, как удачных, так и не очень, с помощью которых на дисплее можно выполнять все необходимые построения, предусмотренные соответствующими аксиомами конструктивной геометрии. На наш взгляд, использовать такие программные средства в высшей школе для решения конструктивных задач не совсем разумно, поскольку на занятиях по геометрии студенты должны научиться применять реальные инструменты при выполнении геометрических построений, уметь при необходимости проводить все этапы решения задач такого типа.

Существует большое число геометрических задач на построение циркулем и линейкой, которые решаются с использованием того или иного преобразования плоскости. Найти подходящее преобразование – достаточно сложная задача, причём не только для новичков, но иногда и для людей, искушённых в решении задач такого типа. Именно на этом этапе решения конструктивной задачи можно использовать персональный компьютер. Причём эта помощь заключается не в отыскании самим компьютером нужного для решения задачи преобразования, а в том, чтобы с помощью компьютера подтвердить или опровергнуть гипотезу о том, что с помощью выбранного вспомогательного преобразования можно построить искомую фигуру. Кроме этого, ПК может помочь учащемуся и при проведении заключительного этапа в решении задачи - исследования.

Отметим, что предлагаемая методика не является универсальной, хотя и охватывает достаточно большой класс задач. Остановимся на ней более подробно. Как и при традиционной методике, рассматривается четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование.

При проведении *анализа*, как и обычно, предполагается, что задача решена. На листе бумаги от руки строится схематический чертёж, на котором изображаются искомые и данные фигуры. Затем в плоскости чертежа выбирается некоторая система координат. После этого любой элемент чертежа становится аналитически заданным. Для того чтобы большинство изображённых на чертеже точек (концов отрезков, центров окружностей и т.д.) имело целые координаты, удобно вначале выбрать систему координат, а затем уже изображать данные и искомые фигуры. Следующий шаг этого этапа связан с построением аналогичного чертежа на дисплее. Составить соответствующую программу несложно, поскольку все фигуры в таких задачах конструируются из прямых, окружностей или их частей. Заметим, что окружности лучше изображать не с помощью оператора CIRCLE, а используя параметрические уравнения этой линии. Для простоты оформления программы мировые и экранные координаты точек фигур удобно задавать массивами. При создании соответствующей базы координаты точек данной и искомой фигур желательно не смешивать. Кроме традиционной подпрограммы вычисления экранных координат точек, в программу включаются подпрограммы вычисления координат образов точек под действием основных движений плоскости: переноса, поворота вокруг произвольной точки и осевой симметрии (без анимации).

Следующий самый важный шаг первого этапа связан с выбором *вспомогательного преобразования f* плоскости и нахождением ключевых точек, соответствующих этому преобразованию. Отметим, что среди различных преобразований плоскости, которые могут быть выбраны в качестве вспомогательных, рекомендуется рассматривать лишь только те, которые определяются данными по условию задачи элементами. Дадим определение ключевых точек.

Две точки плоскости называются ключевыми точками конструктивной задачи, соответствующими преобразованию f, если выполнены следующие три условия: 1) обе точки принадлежат данным по условию задачи фигурам; 2) с помощью ключевых точек и данных фигур, не содержащих эти точки, можно построить искомую фигуру; 3) одна из ключевых точек получается из другой с помощью преобразования f.

Другими словами, ключевые точки представляют собой пару прообраз – образ, которые принадлежат данным фигурам (не обязательно разным) и с помощью которых можно построить искомую фигуру. Подбор преобразования и нахождение соответствующих ему ключевых точек – два тесно взаимосвязанных процесса.

Предположим, что в результате анализа задачи у студента появляется гипотеза о том, что точки A и B являются ключевыми точками, соответствующими преобразованию f. Установить принадлежность этих точек данным в условии задачи фигурам и проверить возможность построения с их помощью искомой фигуры, как правило, не представляет труда. Для проверки же условия $f(A) = B$ (или $f(B) = A$) можно воспользоваться компьютером. К составленной выше программе добавляется строка, в которой находятся координаты образа A' точки A. Затем строится изображение этого образа. Если точки A' и B совпадают, то с большой долей вероятности можно считать, что преобразование f выбрано удачно, а точки A и B являются ключевыми.

На следующем шаге первого этапа ищется способ построения оной из ключевых точек, допустим В. Одновременно проверяется предположение, связанное с выбором преобразования f. Предположим, что первая ключевая точка A принадлежит данной фигуре F_1, а вторая ключевая точка B – данной фигуре F_2. Вносятся небольшие изменения в рабочую часть программы. Вместо изображения образа точки A строится образ F_1' фигуры F_1 под действием преобразования f. Если построенная фигура F_1' будет содержать вторую ключевую точку B, то можно уже уверенно переходить к следующему этапу – построению искомых фигур.

Второй этап решения задачи (*построение)* является основным и выполняется так, как этого требует традиционная методика решения задач такого типа. Однако кроме «ручного» построения искомых фигур, составляется и машинный вариант. Соответствующая программа получается в результате незначительной корректировки имеющейся. Перечислим эти изменения. Во-первых, удаляются изображения искомых фигур. Во-вторых, составляется подпрограмма, вычисляющая координаты точки пересечения двух фигур (двух прямых, двух окружностей, прямой и окружности). Такие подпрограммы студенты уже составляли при выполнении одного из проектов во втором разделе. В-третьих, в основном блоке программы, используя построенную фигуру F_1' и данную фигуру F_2, находятся координаты ключевой точки B, принадлежащей пересечению этих фигур. Программа завершается построением искомых фигур.

На третьем этапе решения задачи (*доказательство*) доказывается, что построенная на втором этапе фигура удовлетворяет всем условиям задачи. Этот этап выполняется без применения компьютера.

На последнем четвёртом этапе решения задачи проводится *исследование*. Здесь можно опять воспользоваться ПК, точнее компьютерным вариантом построения искомой фигуры. При «машинном» исследовании рассматриваются различные случаи взаимного расположения данных фигур. Для этой цели вносятся изменения в те строки программы, которые содержат начальные данные. Координатам точек, задающих данные фигуры, поочерёдно присваиваются всевозможные значения (чаще всего это делается не вслепую, а в ходе проверки той или иной гипотезы). Благодаря такому методу удаётся визуально наблюдать за тем, как изменяются на экране ПК искомые фигуры. Такой метод помогает учащемуся ответить на многие вопросы, возникающие при исследовании. В частности, при любом ли наборе данных фигур искомая фигура может быть построена и, наконец, сколько различных фигур может быть построено при всяком допустимом наборе данных фигур?

На лекции желательно рассмотреть пример применения этой методики при решении конкретной конструктивной задачи, используя для этого подготовленные заранее программы.

Практические занятия. На практических занятиях в дополнение к тому, что было сделано на лекции, необходимо рассмотреть некоторые примеры применения компьютера в задачах конструктивной геометрии, решаемых с помощью конкретных движений плоскости (подготовить студентов к третьему лабораторному занятию).

На одном из практических занятий, посвящённых обсуждению алгоритмов вычисления координат точек при повороте пространства вокруг произвольной оси, необходимо рассмотреть ещё один эффективный алгоритм, который тесно связан с отражением пространства относительно плоскости.

Алгоритм вычисления координат образа точки при повороте пространства вокруг произвольно расположенной оси, основанный на представлении поворота пространства в виде композиции двух отражений, и соответствующая ему подпрограмма. Известно, что любой поворот пространства R_l^{φ} представим в виде композиции $S_{\Pi_1} \circ S_{\Pi_3}$ двух плоскостных симметрий, плоскости которых пересекаются по оси вращения и образуют двугранный угол φ /2. Для того, чтобы по заданным оси поворота и углу поворота подобрать требуемые плоскости симметрии, необходимо научиться решать следующие две задачи.

ЗАДАЧА 1. *Прямая l задана точкой и направляющим вектором. Найти уравнения двух плоскостей Π_1 и Π_2, пересекающихся по этой прямой.*

ЗАДАЧА 2. *Даны две плоскости Π_1 и Π_2 своими общими уравнениями, пересекающиеся по некоторой прямой l. Найти третью плоскость Π_3, содержащую эту прямую и образующую заданный угол с плоскостью Π_1 (рис. 49).*

На практическом занятии с учащимися желательно обсудить решение этих задач.

Схема решения задачи №1. Если ось вращения l задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\vec{m}(mx; my; mz)$, то в качестве второго вектора, коллинеарного плоскости Π_1 и не параллельного $\vec{m}$, можно взять вектор (обозначим его через $\vec{k}$), который либо совпадает с вектором (0; 0; 1), если $mz = 0$, либо – с вектором (1; 0; 0), если $mz \neq 0$. В качестве второй плоскости можно взять плоскость Π_2, содержащую ось l и параллельную векторному произведению $\vec{m} \times \vec{k}$. Зная точку и два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости, несложно написать уравнение последней.

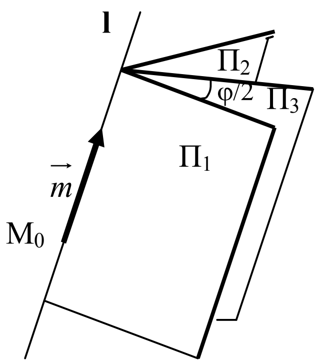


Рис. 49

Схема решения задачи №2.

Если плоскости П$_1$ и П$_2$ заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то уравнение плоскости П$_3$, содержащей l и образующей заданный угол $\psi \neq 0$ с плоскостью П$_1$, удобно искать в виде $t(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Поскольку $\overrightarrow{n_1}(A_1; B_1; C_1)$ и $\overrightarrow{n_3}(tA_1 + A_2; tB_1 + B_2; tC_1 + C_2)$ – нормальные векторы плоскостей П$_1$ и П$_3$, то $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_3} = |\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_3}| \cdot COS(\psi)$.

Возводя обе части этого уравнения в квадрат и переходя к координатам векторов, после несложных тождественных преобразований получим следующее квадратное уравнение относительно параметра t:

$$(P_1^2 \cdot SIN^2(\psi)) \cdot t^2 + 2(P_1Q_1 \cdot SIN^2(\psi)) \cdot t + (Q_1^2 - P_1R_1 \cdot COS^2(\psi)) = 0,$$

где $P_1 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2$, $Q_1 = A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2$, $R_1 = A_2^2 + B_2^2 + C_2^2$.

Каждому из корней t_1 и t_2 этого уравнения соответствует плоскость, образующая угол ψ с плоскостью П$_1$ и содержащая прямую l. В зависимости от выбора корня мы получим разные направления вращения вокруг прямой l.

Подпрограмма вычисления коэффициентов $A(1)$, $B(1)$, $C(1)$, $D(1)$ общего уравнения первой плоскости и коэффициентов $A(2)$, $B(2)$, $C(2)$, $D(2)$ общего уравнения второй плоскости, пересекающихся по прямой, заданной точкой $(x0; y0; z0)$ и вектором $(mx; my; mz)$, и образующих двугранный угол величины ψ, может иметь следующий вид:

```
REM вычисление коэффициентов уравнений плоскостей
IF mz = 0 THEN kx = 0: ky = 0: kz = 1
IF mz <> 0 THEN kx = 1: ky = 0: kz = 0
A1 = my * kx - mz * ky: B1 = mz * kx – mx * kz
C1 = mx * ky - my * kx: D1 = -x0 * A1 – y0 * B1 – z0 * C1
A2 = my * C1 - mz * B1: B2 = mz * A1 - mx * C1
C2 = mx * B1 - my * A1: D2 = -x0 * A2 – y0 * B2 – z0 * C2
```

```
P1 = A1 ^ 2 + B1 ^ 2 + C1 ^ 2:Q1 = A1 * A2 + B1 * B2 + C1 * C2
R1 = A2 ^ 2 + B2 ^ 2 + C2 ^ 2: P = (P1 ^ 2) * (SIN(psi)) ^ 2
Q = P1 * Q1 * (SIN(psi)) ^ 2: R = Q1 ^ 2 - P1 * R1 * (COS(psi)) ^ 2
t1 = (SQR(Q ^ 2 - P * R) - Q) / P
A(1) = A1: B(1) = B1: C(1) = C1: D(1) = D1
A(2) = t1 * A1 + A2: B(2) = t1 * B1 + B2: C(2) = t1 * C1 + C2: D(2) = t1 * D1 + D2
RETURN
```

Несмотря на достаточно большие вычисления при нахождении коэффициентов уравнений плоскостей, этот алгоритм нередко более эффективен, чем многие другие. Для вычисления координат образа точки при повороте пространства вокруг произвольной оси теперь достаточно лишь обратиться к подпрограмме **povorotBC**:

```
povorotBC: FOR j = 1 TO 2
    t = -(A(j) * x + B(j) * y + C(j) * z + D(j)) / (A(j) ^ 2 + B(j) ^ 2 + C(j) ^ 2)
    x = x + 2 * t * A(j): y = y + 2 * t * B(j): z = z + 2 * t * C(j)
  NEXT j: RETURN
```

Отметим, что приведённая подпрограмма легко распространяется на случай любого числа плоскостей, причём произвольно взаимно расположенных.

Лабораторно-практические занятия. Предполагается проведение трех лабораторно-практических занятий, посвященных решению задач на построение циркулем и линейкой методом движений в одной из систем динамической геометрии.

Лабораторные занятия. По этому разделу предполагается проведение трёх лабораторных работ **–** №№ 5.1, 5.2 и 5.3.

Лабораторная работа № 5.1 «Движения плоскости».

Организация работы: Проводится в форме учебного проекта сначала под общим руководством преподавателя, затем – тремя творческими коллективами и в заключение – опять всей группой.

Учебные цели: научиться применять векторный и координатный методы при компьютерной визуализации перемещений плоскости, закрепить в процессе практической деятельности понятия движения плоскости, композиции движений плоскости и теорему о представлении движений плоскости композицией не более трёх осевых симметрий.

Учебный проект № 5.1.1 «Путешествия по плоскости». Построить на экране компьютера изображение некоторой фигуры плоскости. Используя анимационные возможности компьютера, смоделировать на дисплее процесс непрерывного перемещения этой фигуры под действием композиции параллельного переноса, осевой симметрии и, наконец, поворота.

Выполнение проекта можно разбить на следующие три этапа:

ЭТАП №1. Изобразить перемещаемую фигуру. Составить подпрограммы вычисления координат образа точки при различных движениях плоскости (всем студенческим коллективом).

ЭТАП №2. Используя анимационные возможности компьютера, смоделировать на дисплее процесс непрерывного перемещения этой фигуры под действием:

а) параллельного переноса (1-й творческий коллектив);

б) поворота (2-й творческий коллектив);

с) осевой симметрии (3-й творческий коллектив).

ЭТАП №3. Смоделировать на дисплее процесс непрерывного перемещения этой фигуры под действием композиции параллельного переноса, осевой симметрии и поворота (вся группа). Рассмотреть другие композиции.

Приведём один из вариантов выполнения этих этапов проекта.

Выполнение ЭТАПА №1. Выполнение первого этапа заключается в совместном обсуждении проекта и составлении общей части программы. Эта часть программы содержит начальные данные, в частности, координаты вершин перемещаемого многоугольника, изображение этого многоугольника и некоторые подпрограммы, которые составлялись на лекции преподавателем. К ним относятся: подпрограмма **uv** вычисления экранных координат**,** подпрограмма вычисления координат образа точки при параллельном переносе на заданный вектор (метка **perenos2d**), подпрограмма вычисления координат образа точки при повороте плоскости вокруг заданной точки на ориентированный угол (метка **povorotC**), подпрограмма вычисления координат образа точки при осевой симметрии относительно прямой, заданной точкой и направляющим вектором (метка **simmABC**).

Чтобы на завершающем этапе проекта по дисплею перемещался один и тот же объект, необходимо всему студенческому коллективу выбрать общую геометрическую фигуру и составить соответствующую подпрограмму (присвоим ей метку **figura**). Для простоты на занятии можно рассмотреть выпуклый четырёхугольник. Мировые координаты его i-й вершины обозначим $(x(i), y(i))$, экранные координаты его начального положения – $(u(i); v(i))$, текущие экранные координаты (то есть экранные координаты одного из промежуточных положений перемещаемого четырёхугольника) – $(p(i); q(i))$. В подпрограмме **figura** предусмотрим изображение не только оригинала, но и той промежуточной фигуры, в которую он отображается в процессе перехода из положения оригинала в положение образа. Приведём её:

```
figura:  PSET (u(4), v(4)), 7: FOR j = 1 TO 4: LINE -(u(j), v(j)), 7: NEXT j
 PAINT ((u(1) + u(3)) / 2, (v(1) + v(3)) / 2), 2, 7 ‘ четырёхугольник оригинал
 PSET (p(4), q(4)): FOR j = 1 TO 4: LINE -(p(j), q(j)): NEXT j
 PAINT ((p(1) + p(3)) / 2, (q(1) + q(3)) / 2), 1, 15 ‘ четырёхугольник образ
 RETURN
```

Приведём ту часть программы, которая составляется студентами на первом этапе под руководством преподавателя:

```
REM непрерывное перемещение фигуры при движениях плоскости
SCREEN 9: m = 20: pi = 4 * ATN(1): k = 150: ap = 0: vp = 1
DATA 0,2, 2,4, 4,0, 0,0 ‘ мировые координаты вершин оригинала
FOR i = 1 TO 4: READ x(i), y(i): x = x(i): y = y(i): GOSUB uv
u(i) = u: v(i) = v: p(i) = u: q(i) = v: NEXT i: GOTO start
REM подпрограммы uv, perenos2d, povorotC, simmABC, figura
```

start:

…..

GOSUB figura: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP

После выполнения этой части программы на дисплее должно появиться изображение двух совмещённых четырёхугольников.

Выполнение ЭТАПА №2. Дальнейшая работа выполняется каждым из трёх мини-коллективов самостоятельно. Составляются подпрограммы, позволяющие под действием переноса, поворота или осевой симметрии непрерывно перемещать по экрану ПК выбранную фигуру. Все подпрограммы аналогичны составленным на лекции и отличаются лишь тем, что изображается не точка, а четырёхугольник. Приведём эти подпрограммы:

а) непрерывное перемещение четырёхугольника по экрану компьютера при параллельном переносе плоскости:

```
perenos2danimacB: ax = mx / k: ay = my / k
FOR s = 1 TO k: GOSUB figura
 FOR i = 1 TO 4: x = x(i): y = y(i): GOSUB perenos2d
  x(i) = x: y(i) = y: GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v
 NEXT i: SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s: RETURN
```

б) непрерывное перемещение четырёхугольника по экрану компьютера при повороте плоскости:

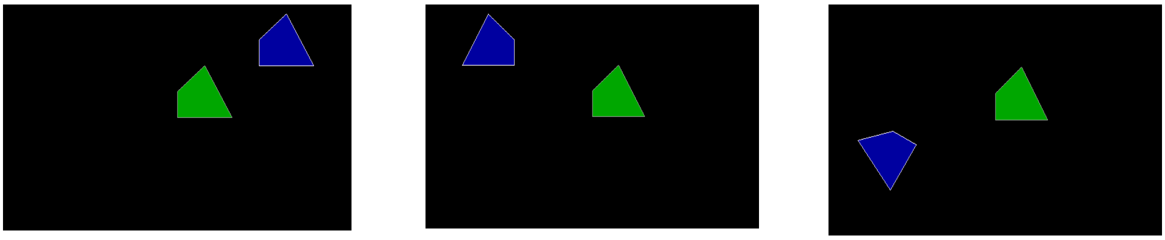
```
povorotCanimacB: CO = COS(fi / k): SI = SIN(fi / k)
FOR s = 1 TO k: GOSUB figura:
 FOR i = 1 TO 4: x = x(i): y = y(i): GOSUB povorotC
  x(i) = x: y(i) = y: z(i) = z: GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v
 NEXT i: SWAP ap, vp:  SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s: RETURN
```

с) непрерывная деформация четырёхугольника на экране компьютера при осевой симметрии плоскости:

```
simmABCanimacB: FOR i = 1 TO 4: x = x(i): y = y(i)
GOSUB simmABC:  ax(i) = (x - x(i)) / k: ay(i) = (y - y(i)) / k: NEXT i
```

```
FOR s = 1 TO k: GOSUB figura
 FOR i = 1 TO 4: x = x(i): y = y(i)
  ax = ax(i): ay = ay(i): GOSUB perenos2d
  x(i) = x: y(i) = y: GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v
 NEXT i: SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s: RETURN
```

После составления подпрограммы и включения в рабочую часть строки-обращения к ней, каждый мини-коллектив демонстрирует своим коллегам то изображение, которое получается на дисплее при её реализации.



а) б) в)

Рис. 50

Выполнение ЭТАПА №3. Для выполнения третьего этапа проекта мини-коллективы должны обменяться между собой по локальной сети составленными подпрограммами. После окончательной компоновки программы преподаватель предлагает создать на дисплее эффект перемещения четырёхугольника под действием той или иной композиции движений. Для этого в рабочем блоке программы достаточно обратиться к соответствующим подпрограммам, например:

```
start: mx = 6: my = 4: GOSUB perenos2danimacB
x0 = 0: y0 = 0: mx = 0: my = 1: GOSUB simmABCanimacB
x0 = -1: y0 = 1: fi = pi / 3: GOSUB povorotCanimacB
GOSUB figura: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

При выполнении программы на экране ПК последовательно будут возникать изображения, представленные на рисунке 50.

Отметим, что при необходимости на экране можно сохранить изображения любых промежуточных положений фигуры, можно изобразить систему координат и координатную сетку. Рабочую часть программы можно продолжить, действуя на образ четырёхугольника другими перемещениями. Можно предусмотреть возможность изображения на экране персонального компьютера (в подпрограмме **figura**) таких вспомогательных фигур, как направленного отрезка, соответствующего вектору параллельного переноса, центра и угла поворота, оси симметрии. На самом занятии изображать вспомогательные фигуры стоит лишь в том случае, если позволит время. Кроме того, можно определить обход вершин четырёхугольника и окрашивать его разным цветом в зависимости от направления этого обхода.

В оставшееся время на лабораторном занятии можно с помощью составленной программы провести некоторые исследования, рассмотреть серию компьютерных упражнений, позволяющих «увидеть своими глазами» действие композиции различных преобразований, в том числе осевых симметрий, на ту или иную фигуру. В частности, можно рассмотреть композицию разного числа осевых симметрий с разным взаимным расположением осей симметрии. Приведём примеры таких *упражнений*:

1. Построить образ данной фигуры под действием композиции двух осевых симметрий с параллельными осями.
2. Дополнить задание упражнения 1 подбором такого параллельного переноса, который бы отображал построенный образ в исходную фигуру.
3. Построить образ фигуры под действием композиции двух осевых симметрий с пересекающимися осями.
4. Дополнить задание упражнения 3 подбором такого поворота, который бы отображал построенный образ в исходную фигуру.
5. Построить образ фигуры под действием композиции параллельного переноса и осевой симметрии относительно прямой, параллельной вектору переноса.

6. Дополнить задание упражнения 5 подбором трёх осевых симметрий, композиция которых отображала бы построенный образ в исходную фигуру.

7. Построить образ фигуры под действием композиции параллельного переноса и поворота.

8. Дополнить задание упражнения 7 подбором одного поворота, который отображал бы построенный образ в исходную фигуру.

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой (для случая плоскости), подпрограммы вычисления координат образа точек при различных движениях плоскости, подпрограммы визуализации непрерывного перемещения фигуры при различных движениях плоскости.

Программное обеспечение: среда Qbasic.

Лабораторная работа № 5.2 *«Движения пространства».*

Организация работы: лабораторная работа проводится в форме учебного проекта № 5.2.1 сначала под общим руководством преподавателя, затем – тремя творческими коллективами и в заключение – всей группой.

Учебные цели: научиться применять векторный и координатный методы при компьютерной визуализации перемещений пространства, закрепить в процессе практической деятельности понятие движения пространства, композиции движений пространства, представление движений пространства композициями плоскостных симметрий.

Учебный проект № 5.2.1 «Путешествия около куба». Построить на экране компьютера изображение куба и некоторого тетраэдра, три ребра которого принадлежат рёбрам куба. Используя анимационные возможности компьютера, смоделировать на дисплее процесс непрерывного перемещения тетраэдра под действием композиции различных движений пространства.

Выполнение проекта можно разбить на следующие три этапа:

ЭТАП №1. Изобразить куб и перемещаемый тетраэдр, три ребра которого принадлежат рёбрам куба. Эта часть программы должна содержать начальные данные, в частности, координаты вершин неподвижного куба и перемещаемого тетраэдра, массивы пар вершин куба и тетраэдра, которые соединяются общими рёбрами (выполняется всем студенческим коллективом).

ЭТАП №2. Используя анимационные возможности компьютера, смоделировать на дисплее процесс непрерывного перемещения тетраэдра под действием:

а) поворота пространства вокруг произвольно расположенной оси поворота (первый творческий коллектив);

б) переноса пространства на некоторый вектор (второй творческий коллектив);

с) отражения пространства относительно произвольно расположенной плоскости (третий творческий коллектив).

ЭТАП №3. Смоделировать на дисплее процесс непрерывного перемещения тетраэдра по кубу (или вокруг него) под действием композиции поворота вокруг некоторой оси, параллельного переноса, и, наконец, плоскостной симметрии (выполняется всей группой).

Рассмотрим один из вариантов выполнения этих этапов.

Выполнение ЭТАПА №1. На этом этапе составляется первая часть программы, которая содержит начальные данные, в частности, координаты вершин неподвижного куба и перемещаемого тетраэдра, массивы пар вершин куба и тетраэдра, которые соединяются рёбрами, и некоторые стандартные подпрограммы, рассмотренные преподавателем на лекции. К ним относятся подпрограммы:

1) вычисления экранных координат точки (кабинетная проекция) по заданным её мировым координатам (метка **uv**);

2) вычисления координат образа точки при параллельном переносе пространства на заданный вектор (метка **perenos3d**);

3) вычисления координат образа точки при повороте пространства вокруг оси абсцисс (метка **povorotOX**);

4) вычисления координат образа точки при повороте пространства вокруг оси аппликат (метка **povorotOZ**);

5) вычисления координат образа точки при повороте пространства вокруг произвольной оси (метка **povorotAB**);

6) подпрограмма вычисления координат образа точки при отражении пространства относительно плоскости, заданной точкой и двумя неколлинеарными векторами, параллельными плоскости (метка otrMab);

7) подпрограмма изображения стационарно расположенного куба и перемещаемого тетраэдра (метка **kubtetr**).

Все подпрограммы, кроме последней, знакомы студентам. Алгоритм составления подпрограммы **kubtetr** также не является для них новым. Приведём эту подпрограмму:

```
kubtetr: RESTORE rkub: FOR t = 1 TO 1000: NEXT t
 FOR j = 1 TO 9: READ A, B: LINE (u(A), v(A))-(u(B), v(B)): NEXT j
 FOR j = 10 TO 12: READ A, B: LINE (u(A), v(A))-(u(B), v(B)), , , 110: NEXT j
 FOR j = 1 TO 6: READ A, B: LINE (p(A), q(A))-(p(B), q(B)), 8: NEXT j
RETURN
```

В этой подпрограмме вначале идёт обращение к строке, содержащей пары номеров вершин куба и тетраэдра, которые соединяются отрезками-рёбрами. В следующих двух строках изображаются все рёбра куба: сначала 9 видимых, затем, пунктирными линиями – 3 невидимых ($(u(i);v(i))$ – экранные координаты i-й вершины куба). В последней строке изображаются рёбра тетраэдра ($(p(i);q(i))$ – экранные координаты i-й вершины тетраэдра, $(x(i);y(i);z(i))$ – их мировые координаты).

Первая часть программы может иметь следующий вид:

```
REM путешествия тетраэдра около куба
SCREEN 9: m = 50: pi = 4 * ATN(1): k = 100: ap = 0: vp = 1
DATA 1,1,1, -1,1,1, -1,-1,1, 1,-1,1, 1,1,-1, -1,1,-1, -1,-1,-1, 1,-1,-1
FOR i = 1 TO 8: READ x, y, z: GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v: NEXT i
```

```
DATA -1,1,-1, -0.5,1,-1, -1,0.2,-1, -1,1,-0.3
FOR i = 1 TO 4: READ x(i), y(i), z(i): x = x(i): y = y(i): z = z(i)
GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v: NEXT i
rkub: DATA 1,2, 2,3, 3,4, 4,1, 8,5, 5,6, 4,8, 1,5, 2,6, 3,7, 8,7, 6,7
rtetr: DATA 1,2, 2,3, 3,1, 4,1, 4,2, 4,3: GOSUB kubtetr: SLEEP: GOTO start
REM подпрограммы: uv-кабинетная, perenos3d, povorotOX,
povorotOZ, povorotAB, otrMab
```

После выполнения этой части программы на дисплее появятся каркасные изображения куба и находящегося в правом нижнем дальнем углу куба тетраэдра.

Выполнение ЭТАПА №2. Этот этап выполняется каждым творческим коллективом самостоятельно.

Первым коллективом составляется подпрограмма, которая позволяет по некоторой оси поворота l (ось задаётся точкой (x_0, y_0, z_0) и направляющим вектором (mx, my, mz) и некоторому углу поворота φ создать компьютерную имитацию непрерывного поворота тетраэдра вокруг оси l на угол φ. Приведём возможный вариант подпрограммы:

```
povorotABanimac: fi = fi/k
FOR s = 1 TO k: GOSUB kubtetr
FOR i = 1 TO 4: x = x(i): y = y(i): z = z(i): GOSUB povorotAB
x(i) = x: y(i) = y: z(i) = z: GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v
 NEXT i: SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s: RETURN
```

Студентами второго творческого коллектива составляется подпрограмма, позволяющая по заданному вектору $\vec{m}(mx;my;mz)$ создать компьютерную имитацию непрерывного перемещения тетраэдра из начального положения «тетраэдр-прообраз» в конечное положение «тетраэдр-образ». Приведём один из возможных вариантов подпрограммы:

```
perenos3danimac: ax = mx / k: ay = my / k: az = mz / k
FOR s = 1 TO k: GOSUB kubtetr
 FOR i = 1 TO 4: x = x(i): y = y(i): z = z(i): GOSUB perenos3d
  x(i) = x: y(i) = y: z(i) = z: GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v
```

```
 NEXT i: SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s: RETURN
```

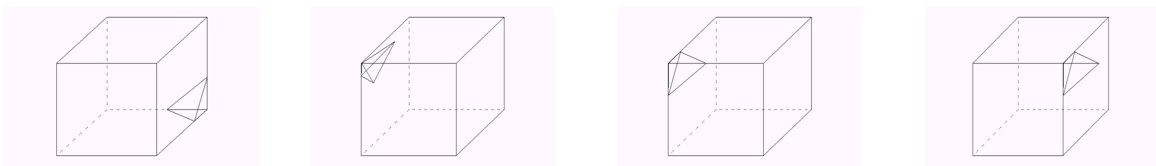
Третьим творческим коллективом составляется подпрограмма, которая позволяет по заданной плоскости П (плоскость задаётся точкой (x_0,y_0,z_0) и неколлинеарными векторами (*xa*, *ya*, *za*) и (*xb*, *yb*, *zb*)) создать компьютерную имитацию непрерывной деформации тетраэдра из начального положения «тетраэдр-оригинал» в положение «тетраэдр-образ» при отражении пространства относительно плоскости П. В самом начале подпрограммы для каждой *i*-й вершины тетраэдра (*i*=1,2,3,4) находятся координаты симметричной ей относительно плоскости П точки. Затем вектор, определяемый *i*-й вершиной и её образом, делится на *k* равных частей, и находятся координаты (*ax*(*i*), *ay*(*i*), *az*(*i*)) элементарного вектора переноса *i*-ой вершины. Завершающая часть подпрограммы посвящена созданию компьютерной имитации, внешне похожей на параллельный перенос фигуры. Однако, в отличие от него, каждая вершина тетраэдра будет переноситься на свой собственный элементарный вектор. Приведём один из возможных вариантов подпрограммы:

```
otrMabanimac:
FOR i = 1 TO 4: x = x(i): y = y(i): z = z(i): GOSUB otrMab
 ax(i) = (x - x(i)) / k: ay(i) = (y - y(i)) / k: az(i) = (z - z(i)) / k
NEXT i
FOR s = 1 TO k: GOSUB cubtetr
 FOR i = 1 TO 4: x = x(i): y = y(i): z = z(i)
  ax = ax(i): ay = ay(i): az = az(i): GOSUB perenos3d
  x(i) = x: y(i) = y: z(i) = z: GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v
 NEXT i: SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s: RETURN
```

Выполнение ЭТАПА №3. После того как каждый коллектив выполнит свою часть второго этапа проекта, всей группе необходимо объединить усилия и составить, используя локальную сеть, интегрированную программу. После этого можно организовать длительное путешествие тетраэдра по кубу, обращаясь при необходимости к одной из трёх последних подпрограмм. Ниже приведены примеры трёх таких обращений.

```
start:
x0=0: y0=0: z0=0: xa=0: ya=1: za=1: xb=-1: yb=0: zb=1: GOSUB otrMabanimac
x0 =-1: y0=1: z0 =-1: mx=1: my=-1: mz=1: fi=pi: GOSUB povorotABanimac
mx = 0: my = 2: mz = 0: GOSUB perenosanimac
GOSUB cubtetr: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

После запуска программы на дисплее появится изображение, представленное на рисунке 51 а). В результате выполнения первой строки программы тетраэдр, деформируясь, начнёт перемещаться и через некоторое время займёт новое положение, представленное на рисунке 51 б). В процессе выполнения второй строки тетраэдр начнёт поворачиваться и вскоре займёт новое положение, представленное на рисунке 51 в). И, наконец, в результате выполнения третьей программной строки тетраэдр переместится на вектор (0, 2, 0) (рис. 51 г)).



а) б) в) г)

Рис. 51

В оставшееся время на лабораторном занятии можно с помощью составленной программы провести некоторые исследования, позволяющие «увидеть своими глазами» действие различных преобразований пространства и их композиций на ту или иную фигуру. В частности, можно рассмотреть композицию разного числа отражений пространства с разным взаимным расположением плоскостей отражения. Например, можно рассмотреть следующие *упражнения*:

1. Построить образ тетраэдра под действием композиции двух отражений с параллельными плоскостями.

2. Дополнить задание упражнения 1 подбором такого параллельного переноса, который бы отображал построенный образ в исходный тетраэдр.

3. Построить образ тетраэдра под действием композиции двух отражений пространства с непараллельными плоскостями отражения.

4. Дополнить задание упражнения 3 подбором такого поворота пространства, который бы отображал построенный образ в исходный тетраэдр.

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой (кабинетная проекция); аналитическое задание движений пространства; изображения куба и тетраэдра; непрерывные перемещения тетраэдра.

Программные средства: среда Qbasic.

<u>Лабораторная работа</u> № 5.3 «Применение компьютера при решении задач на построение методом перемещений».

Организация работы: проводится в форме трёх учебных проектов № 5.3.1, № 5.3.2, № 5.3.3, каждый из которых представляет собой электронный способ решения некоторой конструктивной задачи на применение одного из четырёх различных видов движений плоскости. Преподаватель на этом занятии выполняет функцию консультанта.

Учебные цели: закрепить полученные на практических занятиях по геометрии умения использовать метод геометрических преобразований (движений плоскости) при решении задач на построение циркулем и линейкой; овладеть компьютерно-ориентированной методикой решения конструктивных задач на применение перемещений плоскости.

Перечислим предлагаемые для выполнения учебные проекты:

Учебный проект № 5.3.1 «Поворот». Построить квадрат по одной из его вершин и двум прямым, проходящим через две другие вершины, не принадлежащие одной стороне квадрата.

Учебный проект № 5.3.2 «Перенос». Даны два равнобедренных треугольника, основания которых расположены на одной прямой, а вершины – по одну сторону от этой прямой. Построить прямую, параллельную основаниям и такую, чтобы боковые стороны треугольников высекали на этой прямой отрезки равной длины.

Учебный проект № 5.3.3 «Симметрия». Построить квадрат, если даны прямая, содержащая одну из его диагоналей, и две окружности, содержащие по одной вершине квадрата, принадлежащих другой диагонали.

Выполнение каждого их этих проектов можно разбить на следующие три этапа:

ЭТАП №1. *Проведение компьютерного анализа задачи*. Для этого, как обычно, предполагается, что задача решена и на дисплее изображаются данные и искомая фигура. Затем с помощью подпрограмм, аналитически задающих перемещения плоскости, ищутся точки, которые являются *ключевыми*, проверяется с помощью компьютера способ построения ключевых точек.

ЭТАП №2. *Компьютерный вариант построения искомой фигуры*. На экране компьютера визуализируется процесс построения искомой фигуры. Для наглядности творческий коллектив может смоделировать процесс непрерывного перемещения одной из данных фигур (или её части) под действием выбранного преобразования.

ЭТАП №3. *Проведение компьютерного исследования*. Меняя данные фигуры и их взаимное расположение, проверяются различные гипотезы, связанные с возможностью построения искомой фигуры. В зависимости от выбора данных фигур, на экране либо строится изображение искомых фигур, либо появляется надпись, сообщающая о бесконечном количестве решений или об их отсутствии.

В качестве примера рассмотрим вариант выполнения этапов проекта № 5.3.1.

Выполнение ЭТАПА №1. На первом этапе проводится *анализ*. Изобразим на листе бумаги координатную сетку, данные фигуры (отрезки

[12] и [34] двух прямых, точку 5 и искомую фигуру (квадрат 5678) (рис. 52).

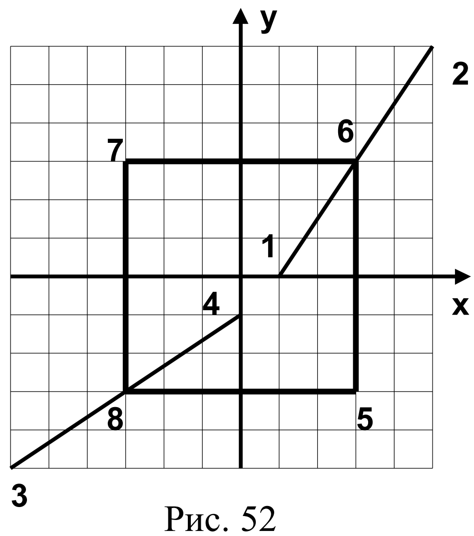


Рис. 52

Отрезки данных прямых и искомый квадрат расположены так, чтобы концы отрезков и вершины квадрата имели целые координаты. Затем студенты составляют программу, которая строит аналогичное изображение на экране ПК. Кроме подпрограммы **uv**, в неё необходимо включить подпрограммы нахождения координат образов точек под действием трёх основных перемещений плоскости: переноса (метка **perenos2d**), поворота (метка **povorotB**) и осевой симметрии (метка **simmABC**). Приведём возможный вариант программы:

```
REM АНАЛИЗ ЗАДАЧИ (поиск ключевых точек)
SCREEN 9: m = 25: pi = 3.1416
DATA 1,0, 5,6, -6,-5, 0,-1, 3,-3, 3,3, -3,3, -3,-3
DATA 1,2, 3,4, 5,6, 6,7, 7,8, 8,5
FOR i = 1 TO 8: READ x(i), y(i)
 x = x(i): y = y(i): GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v: NEXT i
FOR j = 1 TO 6: READ a, b: LINE (u(a), v(a))-(u(b), v(b)): NEXT j
GOTO start
REM подпрограммы: uv, perenos2d, povorotB, simmABC
start: SLEEP
```

После внимательного изучения схематического чертежа и перебора различных вариантов студенты должны выбрать лишь точки 6 и 8, которые могут оказаться ключевыми. Никакие другие точки, с помощью которых можно было бы построить квадрат 5678, на данных прямых (12) и (34) не расположены. Отобразить одну из этих точек на другую можно с помощью любого из трёх типов перемещений. Однако ни параллельный перенос, ни осевая симметрия, которые отображают точку 6 на точку 8, нельзя задать данными в условии задачи фигурами. Остаётся лишь поворот плоскости вокруг точки 5 (она задана по условию задачи) на угол 90° (такой угол всегда можно построить с помощью циркуля и линейки).

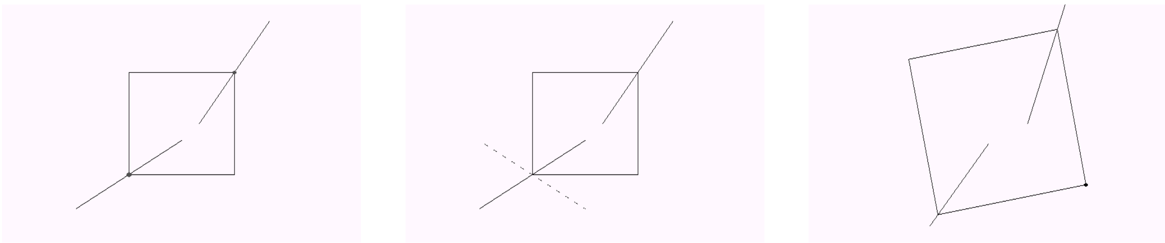
Проверим теперь гипотезу о том, что 6 и 8 – ключевые точки, соответствующие повороту плоскости вокруг точки 5 на угол 90°. Для этого сначала проверим, действительно ли при таком перемещении точка 6 отображается на точку 8. Это утверждение легко следует из определения квадрата. Однако небезынтересно найти и иллюстративное подтверждение этому факту на экране ПК.

Отметим ещё один аргумент в пользу применения на этом шаге персонального компьютера. Обсуждаемая здесь задача проста. Тем не менее в некоторых случаях подобрать необходимое перемещение сложно, поскольку геометрические предпосылки такого выбора не всегда лежат на поверхности. Поэтому дополнительный «компьютерный» аргумент не будет лишним. Более того, он может благоприятно сказаться на дальнейшем ходе решения задачи, придать учащемуся больше уверенности.

Дополним приведённую выше программу следующими строками:

```
CIRCLE (u(6), v(6)), 3, 10: PAINT (u(6), v(6)), 10, 10: SLEEP
x0 = x(5): y0 = y(5): fi = pi / 2: x = x(6): y = y(6)
GOSUB povorot: GOSUB uv: CIRCLE (u, v), 4, 10: PAINT (u, v), 10, 10
SLEEP
```

Здесь в первой строке изображается точка 6 в виде круга радиусом 3 и цветом 10, в следующих двух строках находятся координаты её образа, и строится изображение этого образа в виде круга радиусом 4 и цветом 10. После запуска программы на экране изобразится два отрезка и квадрат, две противоположные вершины которого принадлежат этим отрезкам. После нажатия на любую клавишу появится изображение небольшого круга с центром в точке 6. После повторного нажатия на клавишу появится изображение образа этой точки (без анимации). В результате выполнения всей программы на экране появится изображение, представленное на рисунке 53 а).



а) б) в)

Рис. 53

Итак, гипотеза о том, что точки 6 и 8 являются ключевыми при решении этой задачи методом поворота плоскости вокруг точки 5 на угол 90 градусов, представляется весьма реальной.

Продолжим анализ задачи. Выясним, каким образом можно построить ключевую точку 8, используя найденное перемещение? Для этой цели найдём образ отрезка [12] (части данной прямой) под действием поворота R_5^{90}. Проверим этот образ на инцидентность с вершиной 8. Для этого изменим рабочую часть предыдущей программы. А именно, поместим в ней строки, с помощью которых сначала вычисляются координаты образов точек 1 и 2, а затем строится пунктирный отрезок, соединяющий эти образы:

```
x0 = x(5): y0 = y(5): fi = pi / 2: x = x(1): y = y(1)
GOSUB povorot: GOSUB uv: u1 = u: v1 = v: x = x(2): y = y(2)
GOSUB povorot: GOSUB uv: LINE (u1, v1)-(u, v), , , 110: SLEEP
```

В результате выполнения изменённой программы на экране ПК появится изображение, представленное на рисунке 53 б). Пунктирный отрезок проходит через вершину 8. Это означает, что вершину 8 можно построить, как пересечение двух отрезков. Один из них – это отрезок [34]. Второй – образ отрезка [12]. Появляется вариант решения задачи, согласно которому сначала строится ключевая точка 8, а затем и искомый квадрат.

Выполнение ЭТАПА №2. Второй этап решения задачи, *построение*, является основным**.** Его выполнение ничем не отличается от традиционного. А именно, перечисляются элементарные построения, результатом выполнения которых становится искомый квадрат. Дополнительно к этому составляется «компьютерный» вариант решения задачи. Несмотря на то, что при составлении соответствующей программы больше используются не синтетические, а аналитические методы, всё же главное – это появление на экране ПК изображения искомого квадрата. Для того чтобы составить такую программу, достаточно не очень существенно изменить предыдущую программу.

Прежде всего из массива с координатами точек нужно удалить координаты последних трёх вершин квадрата, 6, 7 и 8, поскольку они не заданы в задаче. Одновременно нужно сократить до двух массив номеров пар точек, соединяемых отрезками. Ясно, что изменятся и конечные значения первых двух циклов. Они уменьшатся соответственно до пяти (число точек) и двух (число отрезков). Кроме отрезков двух данных прямых, нужно построить ещё изображение и данной вершины квадрата. Она обозначена цифрой 5. Далее удалим подпрограммы **perenos2d** и **simmABC** (нам уже известно, что эти преобразования плоскости не понадобятся при решении данной задачи). Введём вместо них подпрограмму (она составлялась при выполнении одного из проектов второго раздела), в которой вычисляются координаты точки пересечения двух прямых (метка **pereslm**). Остальные изменения коснутся рабочей части программы, где мы должны вычислить координаты трёх оставшихся вершин искомого квадрата и построить его. Сначала найдём мировые координаты образа точки 1 при перемещении R_5^{90}:

```
x0 = x(5): y0 = y(5): fi = pi / 2: x = x(1): y = y(1)
GOSUB povorotB: x1 = x: y1 = y
```

Затем координаты x и y образа точки 2 при этом же преобразовании:

```
x = x(2): y = y(2): GOSUB povorotB
```

Теперь, чтобы обратиться к подпрограмме **pereslm**, нужно задать каждую прямую точкой и вектором. Для первой прямой (образ прямой

(12)) координаты x_1 и y_1 одной точки уже подсчитаны. Осталось найти координаты её направляющего вектора:

```
xm = x - x1: ym = y - y1
```

Затем задаётся вторая прямая, и после обращения к подпрограмме **pereslm**, находятся координаты первой неизвестной вершины квадрата. Как и на рисунке 51, обозначим эту вершину цифрой 8:

```
x2 = x(3): y2 = y(3): xn = x(4) - x(3): yn = y(4) - y(3)
GOSUB peresml: x(8) = x: y(8) = y
```

Если повернуть найденную точку вокруг вершины 5 на угол -90°, то получим вершину 6 квадрата:

```
fi = -pi / 2: GOSUB povorot: x(6) = x: y(6) = y
```

Чтобы найти оставшуюся вершину 7 квадрата достаточно найти середину диагонали [68] и повернуть вокруг неё на 180° вершину 5:

```
x0 = (x(8) + x(6)) / 2: y0 = (y(8) + y(6)) / 2
fi = pi: x = x(5): y = y(5): GOSUB povorotB: x(7) = x: y(7) = y
```

Затем остаётся изобразить искомый квадрат. Окончательно программа может иметь следующий вид:

```
SCREEN 9: m = 30: pi = 3.1416
DATA 2,0, 4,6, -3,-5, 0,-1, 5,-3
DATA 1,2, 3,4,
FOR i = 1 TO 5: READ x(i), y(i)
 x = x(i): y = y(i): GOSUB UV: u(i) = u: v(i) = v: NEXT i
FOR j = 1 TO 2: READ a, b: LINE (u(a), v(a))-(u(b), v(b)): NEXT j
PSET (u(5), v(5)): SLEEP: GOTO start
REM подпрограммы: uv, povorotB, peresml
start: x0 = x(5): y0 = y(5): fi = pi / 2: x = x(1): y = y(1)
   GOSUB povorotB: x1 = x: y1 = y
x = x(2): y = y(2): GOSUB povorotB: xm = x - x1: ym = y - y1
x2 = x(3): y2 = y(3): xn = x(4) - x(3): yn = y(4) - y(3)
GOSUB peresml: x(8) = x: y(8) = y
fi = -pi / 2: GOSUB povorotB: x(6) = x: y(6) = y
x0 = (x(8) + x(6)) / 2: y0 = (y(8) + y(6)) / 2
fi = pi: x = x(5): y = y(5): GOSUB povorotB: x(7) = x: y(7) = y
```

```
FOR i = 6 TO 8: x = x(i): y = y(i): GOSUB UV: u(i) = u: v(i) = v: NEXT i
 PSET (u(8), v(8)): FOR i = 5 TO 8: LINE -(u(i), v(i)): NEXT i
en: SLEEP
```

После выполнения этой программы на экране появится изображение, представленное на рисунке 53 в).

После построения квадрата циркулем и линейкой проводится *доказательство* того, что эта фигура является искомой.

Выполнение ЭТАПА №3. На завершающем этапе проводится *исследование*. Чтобы с помощью составленной программы выяснить, при каком выборе данных фигур задача либо не имеет решений, либо имеет их бесконечное множество, нужно в подпрограмме **peresml** предусмотреть вывод на дисплей информацию в случае, когда две прямые либо параллельны, либо совпадают. Изменённая подпрограмма будет иметь следующий вид:

```
peresml: q1 = x1 * ym - y1 * xm: q2 = x2 * yn - y2 * xn
t = xm * yn - xn * ym
tx = xm * q2 - xn * q1: ty = ym * q2 - yn * q1
IF t^2+tx^2+ty^2< .001 THEN PRINT "бесконечное мн. решений": GOTO en
IF ABS(t) < .001 AND tx^2+ty^2 > .001 THEN PRINT "решен. нет": GOTO en
x = tx / t: y = ty / t: PRINT t, tx, ty, x, y: RETURN
```

Меняя теперь взаимное расположение данных прямых и данной вершины квадрата, можно проверить различные гипотезы, связанные с возможностью построения искомого квадрата. Так, например, если строка, в которой задаются координаты точек 1,2,3,4 (точки на данных прямых) и 5 (данная вершина квадрата), будет иметь следующий вид:

```
DATA 1,0, 5,6, -6,-1, 0,-5, 3,-3
```

то на экране ПК мы увидим изображение, представленное на рисунке 54 а). Если изменить первую координату данной вершины квадрата, а координаты концов отрезков [12] и [34] оставить без изменения (соответствующая строка примет вид: **DATA 1,0, 5,6, -6,-1, 0,-5, 7,-3**), то получим изображение, представленное на рисунке 54 б).

а) б)

Рис. 54

В результате проведения компьютерного эксперимента учащиеся должны прийти к выводу, что если данные прямые перпендикулярны, то задача либо имеет бесконечно много решений (если данная вершина квадрата равноудалена от этих прямых), либо не имеет ни одного (если данная вершина квадрата находится на разных расстояниях от этих прямых).

Коллективу, работавшему над этим проектом можно поручить усовершенствовать программу так, чтобы выполнялось следующее дополнительное требование: перед построением искомого квадрата отрезок [12] должен плавно повернуться вокруг данной вершины 5 на угол 90 градусов, лишь только после этого должен появиться искомый квадрат.

Программное обеспечение: среда Qbasic.

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой; аналитическое задание движений плоскости; изображение данных и искомой фигур; непрерывные перемещения фигуры; пересечение прямых.

Самостоятельная работа студентов. Для самостоятельной работы во внеучебное время студентам можно выдать следующие учебные проекты и задания.

1. *Перемещения плоскости:*

– построить на дисплее образ фигуры под действием композиции двух поворотов; подобрать один поворот или один параллельный перенос, который отображал бы построенный образ в исходную фигуру;

– построить на дисплее образ фигуры под действием композиции трёх осевых симметрий, оси которых принадлежат одному пучку параллельных или пересекающихся прямых; подобрать осевую симметрию, которая отображала бы построенный образ в исходную фигуру;

– построить на дисплее образ фигуры под действием композиции трёх осевых симметрий, оси которых не принадлежат одному пучку прямых; подобрать скользящую симметрию, которая отображала бы построенный образ в исходную фигуру;

– на дисплее построить изображение квадрата (правильного шестиугольника), обозначить его вершины и найти все перемещения, отображающие его на себя (при самосовмещениях использовать анимационные возможности компьютера);

– разработать демонстрационные программы, посвящённые моделированию на экране персонального компьютера различных перемещений плоскости;

– построить на дисплее семейство паркетов, бордюров и орнаментов, используя для этого различные элементарные мотивы и стандартные перемещения, задающие паркеты и бордюры;

– составить программу, по которой любая композиция перемещений плоскости заменяется на один из четырёх типов перемещений плоскости: перенос, поворот, осевую или скользящую симметрии.

2. *Перемещения пространства:*

– построить на дисплее куб, тетраэдр и образ тетраэдра под действием скользящего отражения; подобрать три отражения пространства, композиция которых отображала бы построенный образ в исходный тетраэдр;

– построить на дисплее куб, тетраэдр и образ тетраэдра под действием винтового движения; подобрать четыре отражения пространства, композиция которых переводила бы построенный образ в исходный тетраэдр;

– построить на дисплее куб, тетраэдр и образ тетраэдра под действием композиции двух поворотов; подобрать четыре отражения пространства, композиция которых переводила бы построенный образ в исходный тетраэдр;

– построить на дисплее куб, тетраэдр и образ тетраэдра под действием композиции трёх отражений пространства, плоскости которых принадлежат одной связке (параллельных или пересекающихся по прямой) плоскостей; подобрать отражение пространства, которое переводило бы построенный образ в исходный тетраэдр;

– построить на дисплее куб, тетраэдр и образ тетраэдра под действием композиции трёх отражений пространства, плоскости которых попарно взаимно перпендикулярны и проходят через начало координат; подобрать поворотное отражение, которое отображало бы построенный образ в исходный тетраэдр;

– построить на дисплее изображение правильного многогранника, обозначив его вершины буквами или числами, и найти все перемещения, отображающие его на себя (при самосовмещениях использовать анимационные возможности компьютера);

– составить демонстрационные программы, посвящённые моделированию на дисплее различных перемещений пространства;

– составить программу, по которой любая композиция перемещений пространства заменяется на одно из шести перемещений: перенос, поворот, винтовое движение, отражение, поворотное отражение или скользящее отражение.

3. *Решение задач на построение циркулем и линейкой.*

– разработать комплекс демонстрационных программ, посвящённых решению типовых задач на построение циркулем и линейкой; для каждой задачи предусмотреть изображение на дисплее двух окон, на одном из которых поочерёдно перечисляются элементарные построения, а на другом – иллюстрация этих построений, использующая графические и анимационные возможности персонального компьютера;

– создать банк (базу данных) задач конструктивной геометрии, решаемых методом перемещений плоскости, используя при этом компьютерно-ориентированную методику решения задач.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: подробно изучаются движения плоскости и пространства, отрабатываются такие основополагающие понятия, как композиция преобразований, симметрии плоских и пространственных фигур, группа симметрий, закрепляются навыки решения конструктивных задач методом перемещений.

Базовые знания: знание теории геометрических преобразований, умение использовать анимационные возможности компьютера для создания эффекта перемещения, умение устанавливать связь между синтетическим и аналитическим заданием движения, композицией движений.

Основные преимущества использования информационных технологий при изучении рассматриваемой темы. Применение информационных технологий позволяет:

– закрепить связь между аналитическим заданием перемещений плоскости и пространства и их визуальным представлением;

– насытить визуальное представление перемещений плоскости и пространства элементами динамизма и анимации;

– обучить студентов компьютерно-ориентированной методике решения конструктивных задач на применение перемещений плоскости.

6.2. Тема. Подобия плоскости и пространства

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: подобия плоскости и пространства, группа подобий. Гомотетии, свойства гомотетий. Представление подобия в виде композиции движения и гомотетии, композиции гомотетий. Аналитическое задание гомотетии и подобия. Компьютерная визуализация подобий. Использование подобий плоскости при решении задач, в том числе с применением компьютерно-ориентированной методики.

На изучение темы отводится 6 часов лекций, 4 – лабораторно-практических и 4 – лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который связан с реализацией концепции КПГ.

Лекции. На лекции следует обратить внимание студентов на то, что с фактическим применением преобразования подобия они уже встречались в процессе выполнения большинства лабораторных работ, связанных с составлением программ графического характера и заданием масштабного множителя m. В том случае, когда размеры изображаемой фигуры оказывались либо незначительными по сравнению с размерами экрана, либо наоборот чрезмерно большими, значение масштабного множителя изменялось. Причём связывалось это не с преобразованием подобия, а с необходимостью выбора наиболее оптимальной величины изображаемой фигуры. При изучении преобразований подобия необходимо особо подчеркнуть, что с помощью масштабного множителя мы на экране ПК строим фигуру, подобную той, что определена конкретными начальными значениями.

На лекциях рекомендуется составить подпрограммы вычисления координат образа точки при гомотетии плоскости и пространства. Необходимо обсудить алгоритм создания эффекта непрерывной деформации фигуры под действием гомотетии, привести пример программы, основанной на этом алгоритме. Рассказать об использовании компьютера при решении конструктивных задач на применение подобий плоскости. Остановимся на некоторых вопросах, рассматриваемых на лекциях, подробнее.

Обозначим гомотетию с центром в точке A и коэффициентом s через H_A^s. Из определения гомотетии следует, что если центр гомотетии плоскости имеет координаты (x_0, y_0), а произвольная точка плоскости – координаты (x, y), то координаты образа последней под действием H_A^s вычисляются по формулам: $x' = s(x - x_0) + x_0$, $y' = s(y - y_0) + y_0$. Поэтому подпрограмма, позволяющая вычислить эти координаты, может иметь следующий вид:

```
gomot2d: x = s * (x - x0) + x0: y = s * (y - y0) + y0: RETURN
```

В случае пространства в соответствующем аналитическом задании добавляется ещё одно равенство, по которому вычисляется образ третьей координаты (подпрограмме дадим метку **gomot3d**).

Обсудим теперь алгоритм и составим подпрограмму, необходимую для создания на дисплее эффекта непрерывного перемещения точки в свой гомотетичный образ. Основная идея алгоритма та же, что и в случае с перемещениями первого рода. А именно, находится разность между требуемым значением s коэффициента гомотетии и коэффициентом 1, соответствующим первоначальному положению фигуры. Полученная величина делится на число k промежуточных положений преобразуемой фигуры. С помощью числа $h = (s\text{-}1)/k$ мы будем получать коэффициенты вспомогательных гомотетий, с помощью которых и будет создаваться эффект непрерывного перемещения точки-оригинала в точку-образ.

```
gomot2danimacA: IF s = 1 THEN RETURN
h = (s - 1) / k:
FOR s0 = 1 TO s STEP h: GOSUB 2tochki
 s=s0: x = x1: y = y1: GOSUB gomot2d
 GOSUB uv: p1 = u: q1 = v
 SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s0:
x=x1: y=y1: GOSUB gomot2d: x1=x:y1=y: RETURN
```

Прокомментируем подпрограмму. В первой строке по понятным причинам исключается случай, когда коэффициент гомотетии равен единице. В следующей строке после открытия цикла по переменной s_0 идёт обращение к подпрограмме **2tochki**, с помощью которой строятся изображения точки-оригинала и текущей точки. Затем коэффициенту гомотетии s присваивается значение s_0 (это не изменит конец цикла), и находятся координаты образа точки (x_1, y_1) при гомотетии с центром в точке (x_0, y_0) и коэффициентом s_0. В отличие от аналогичных подпрограмм предыдущей темы мировые координаты промежуточных положений точки нам не нужны, так как на каждом шаге цикла мы ищем образ точки-оригинала. Исключение составляет лишь последнее, завершающее положение точки-образа, координаты которой вычисляются в последней строке подпрограммы и присваиваются переменным x_1 и y_1. Полностью программа имеет вид:

```
REM непрерывное перемещение точки при гомотетии плоскости
SCREEN 9: m = 20: pi = 4 * ATN(1): k = 150: ap = 0: vp = 1
DATA 0,2
READ x1, y1: x = x1: y = y1: GOSUB uv
u1 = u: v1 = v: p1 = u: q1 = v: GOTO start
REM подпрограммы: uv, gomot2d, gomot2danimacA, 2tochki
start: s=2: x0 = -1: y0 = -1: GOSUB gomot2danimacA
s=1/2: x0 = 2: y0 = 1: GOSUB gomot2danimacA
en: GOSUB 2tochki: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

В процессе реализации программы по экрану будет перемещаться точка под действием сначала одной гомотетии, затем второй (гомотетии имеют различные центры и коэффициенты). На демонстрационном дисплее в лекционной аудитории желательно показать выполнение всей программы, заменив изображаемую точку на более крупную фигуру, например, окружность.

Практические занятия. На практическом занятии необходимо напомнить студентам компьютерно-ориентированную методику решения некоторых типов задач на построение циркулем и линейкой, показать применение этой методики при решении методом подобий конкретных конструктивных задач.

Лабораторно-практические занятия. Предполагается проведение двух лабораторно-практических занятий, посвященных решению задач на построение циркулем и линейкой методом подобия в одной из систем динамической геометрии.

Лабораторные занятия. По этой теме предполагается проведение двух лабораторных занятий, посвящённых выполнению лабораторных работ № 5.4 и № 5.5.

<u>*Лабораторная работа*</u> *№ 5.4 «Подобия плоскости и пространства».*

Организация работы. Проводится в форме двух последовательно выполняемых учебных проектов № 5.4.1 и № 5.4.2 под общим руководством преподавателя, отдельные этапы проектов выполняются самостоятельно тремя творческими коллективами.

Учебные цели: закрепить в процессе лабораторно-практической деятельности понятия гомотетии плоскости и пространства, композиции движений и гомотетий; научить студентов применять векторный и координатный методы при компьютерной визуализации преобразований подобия; познакомить студентов с возможностями использования компьютера при решении методом подобия некоторых задач на построение циркулем и линейкой.

Учебный проект № 5.4.1. «”Подобные” путешествия на плоскости». Построить на экране компьютера изображение некоторой фигуры. Используя анимационные возможности компьютера, смоделировать на дисплее процесс непрерывной деформации этой фигуры под действием композиции подобных преобразований плоскости (выполняется на первом часе занятия).

Реализацию этого проекта можно разбить на следующие три этапа.

ЭТАП №1. Составить программу, позволяющую изобразить на дисплее некоторую планиметрическую фигуру. Добавить к составленной программе подпрограммы, позволяющие вычислить координаты образа точки при переносе, повороте, осевой симметрии и гомотетии плоскости, а также подпрограммы, создающие эффект непрерывного перемещения фигуры под действием движений плоскости.

ЭТАП №2. Составить подпрограмму, моделирующую на дисплее процесс непрерывной деформации фигуры под действием гомотетии, добавить эту подпрограмму к основной программе. Создать эффект непрерывной деформации фигуры в результате воздействия на неё композиции гомотетии и:

а) параллельного переноса плоскости;

б) поворота плоскости;

в) осевой симметрии плоскости.

ЭТАП №3. Смоделировать на дисплее процесс непрерывной деформации фигуры под действием композиции преобразований движения и гомотетии.

Приведём один из возможных вариантов выполнения этих этапов проекта.

Выполнение ЭТАПА №1. Для экономии учебного времени можно воспользоваться составленной при выполнении учебного проекта № 5.1.1 и имеющейся в распоряжении студентов программой «Перемещения фигуры на плоскости», добавив к ней подпрограмму **gomot2d:**

После этого программа примет следующий вид:

```
REM образ фигуры при подобиях плоскости
SCREEN 9: m = 10: pi = 4 * ATN(1): k = 100: ap = 0: vp = 1DATA 0,2, 2,4, 4,0, 0,0
FOR i = 1 TO 4: READ x(i), y(i): x = x(i): y = y(i): GOSUB uv
u(i) = u: v(i) = v: p(i) = u: q(i) = v: NEXT i: GOTO start
REM подпрограммы: uv, figura, perenos2d, povorotC, simmABC,
perenos2danimacB, povorotCanimacB, simmABCanimacB, gomot2d
start:
en: GOSUB figura: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

После выполнения программы на экране появится изображение двух совмещённых четырёхугольников – четырёхугольника-оригинала и четырёхугольника-«путешественника».

Выполнение ЭТАПА №2. Для выполнения второго этапа каждому творческому коллективу необходимо составить подпрограмму, создающую анимацию при гомотетии. Она отличается от подпрограммы **gomot2danimacA**, составленной на лекции, лишь только тем, что в ней находятся координаты не одной, а четырёх точек, являющихся вершинами четырёхугольников. Приведём её:

```
gomot2danimacB: IF s = 1 THEN RETURN
h = (s - 1) / k:
FOR s0 = 1 TO s STEP h: GOSUB figura: s=s0
 FOR i = 1 TO 4: x = x(i): y = y(i): GOSUB gomot2d
  GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v
 NEXT i: SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s0
FOR i=1 TO 4: x=x(i): y=y(i): GOSUB gomot2d: x(i)=x: y(i)=y: NEXT i
RETURN
```

Комбинируя обращение к этой подпрограмме с обращением к подпрограммам, создающим анимацию движений, студенты могут получить динамические эффекты при различных композициях.

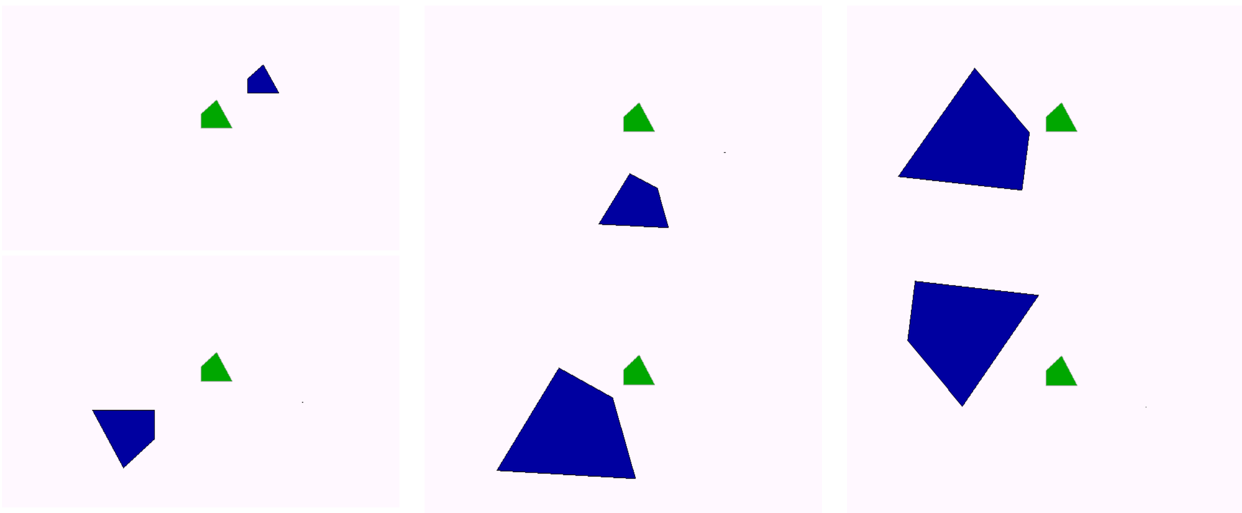
Выполнение ЭТАПА №3. Для выполнения третьего этапа в рабочую часть программы достаточно включить следующие строки:

```
start: mx = 6: my = 5: GOSUB perenos2danimacB
  x0 = 2: y0 = 2: s = -2: GOSUB gomot2danimacB
  x0 = -1: y0 = 1: fi = pi / 3: GOSUB povorotCanimacB
  x0 = 10: y0 = -14: s = 2: GOSUB gomot2danimacB
  x0 = 0: y0 = 0: mx = 2: my = 1: GOSUB simmABCanimacB
  x0 = -10: y0 = 3: s = -1: GOSUB gomot2danimacB
GOSUB figura: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

После выполнения композиции параллельного переноса на вектор (6, 5) и гомотетии с центром в точке (2, 2) и коэффициентом -2 четырёхугольник сначала плавно переместится в положение (более тёмный четырёхугольник), изображённое на верхнем рисунке 55 а), затем в положение, изображённое на нижнем рисунке 55 а).

После выполнения композиции поворота вокруг точки (-1, 1) на угол *pi*/3 и гомотетии с центром в точке (10, -14) и коэффициентом 2 на экране ПК последовательно появятся изображения, представленные на верхнем и нижнем рисунках 55 б).

После выполнения композиции отражения относительно оси, проходящей через точку (0, 0) параллельно вектору (2, 1), и гомотетии с центром в точке (-10, 3) и коэффициентом –1, на экране ПК последовательно появятся изображения, представленные на верхнем и нижнем рисунках 55 в).



а) б) в)

Рис. 55

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой; аналитическое задание подобий и движений плоскости; изображение деформируемой фигуры; непрерывные деформации фигуры при подобных преобразованиях и движениях.

Программное обеспечение: среда Qbasic.

Учебный проект № 5.4.2 «"Подобные" путешествия в пространстве». Построить на экране компьютера изображение куба и некоторого тетраэдра, три ребра которого принадлежат рёбрам куба.

Используя анимационные возможности компьютера, смоделировать на дисплее процесс непрерывной деформации тетраэдра под действием композиции перемещений и гомотетий пространства (на втором часе занятия).

Выполнение проекта можно разбить на следующие три этапа.

ЭТАП №1. Изобразить куб и перемещаемый тетраэдр, три ребра которого принадлежат рёбрам куба. Составить подпрограмму вычисления координат образа точки при гомотетии пространства, добавить к ней составленные ранее подпрограммы создания эффекта непрерывного перемещения тетраэдра при движениях пространства.

ЭТАП №2. Добавить к составленной программе подпрограмму, создающую эффект непрерывной деформации тетраэдра под действием гомотетии пространства. Используя анимационные возможности компьютера, смоделировать на дисплее процесс непрерывной деформации тетраэдра под действием композиции гомотетии пространства и:

а) параллельного переноса пространства;

б) поворота пространства вокруг оси;

в) отражения пространства относительно плоскости.

ЭТАП №3. Смоделировать на дисплее процесс непрерывной деформации фигуры под действием композиции различных движений пространства и гомотетий.

Ограничимся краткой схемой выполнения проекта.

По аналогии с предыдущим проектом можно воспользоваться составленной выше программой «Перемещение тетраэдра в пространстве», добавив к ней две подпрограммы, аналогичные рассмотренным выше. Первая подпрограмма имеет вид:

```
gomot3d: x = s * (x - x0) + x0: y = s * (y - y0) + y0: z = s * (z - z0) + z0: RETURN
```

Вторая подпрограмма, создающая анимационный эффект, выглядит следующим образом:

```
gomot3danimac: IF s = 1 THEN RETURN
```

```
h = (s - 1) / k
FOR s0 = 1 TO s STEP h: GOSUB figura: s=s0
 FOR i = 1 TO 4: x = x(i): y = y(i): z = z(i): GOSUB gomot3d
  GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v
 NEXT i: SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s0
FOR i=1 TO 4: x=x(i): y=y(i): z=z(i): GOSUB gomot3d
x(i)=x: y(i)=y: z(i)=z: NEXT i RETURN
```

После этого в рабочей части программы достаточно обратиться к подпрограммам, создающим анимацию, задав необходимые для их выполнения начальные условия. Приведём один из возможных вариантов этой части программы.

```
start:
x0 = 0: y0 = 0: z0 = 0: xa = 0: ya = 1: za = 1: xb = -1: yb = 0: zb = 1
GOSUB otrMabanimacB
x0 = -1: y0 = 1: z0 = -1: mx = 1: my = -1: mz = 1: fi = pi
GOSUB povorotABanimacB
x0 = 1: y0 = -1: z0 = 1: s = 2: GOSUB gomot3danimac
mx = 0: my = 2: mz = 0: GOSUB perenos3danimacB
x0 = 0: y0 = 0: z0 = 0: s = -1: GOSUB gomot3danimac
GOSUB figura: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

В процессе выполнения программы на экране ПК последовательно появятся изображения, представленные на рисунке 56.

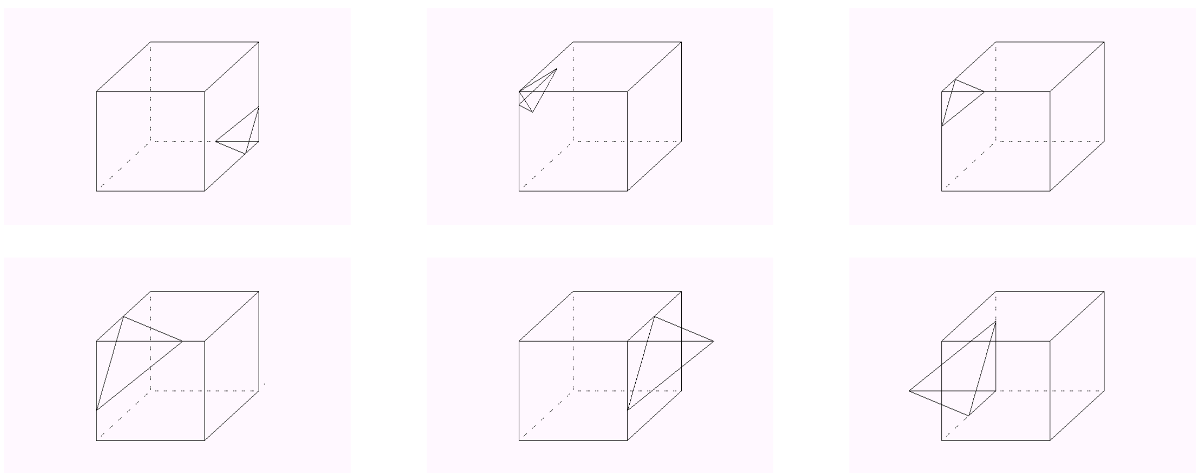


Рис. 56

Каждому из шести изображённых на этом рисунке положений фигуры, начиная со второго, предшествует анимация, плавно переводящая предыдущее изображение в данное.

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой (кабинетная проекция); аналитические задания движений и гомотетии пространства; изображение куба и тетраэдра; непрерывной деформации тетраэдра при перемещениях и гомотетии пространства.

Программные средства: среда Qbasic.

Лабораторная работа № 5.5 «Применение компьютера при решении конструктивных задач методом подобия».

Организация работы: лабораторная работа проводится в форме трёх учебных проектов № 5.5.1, № 5.5.2 и № 5.5.3, каждый из которых представляет собой компьютерный вариант решения некоторой конструктивной задачи на применение композиции одного из трёх видов движений плоскости и гомотетии. Преподаватель на этом занятии выполняет функцию консультанта.

Учебные цели: познакомить студентов с возможностями компьютера при решении методом подобий некоторых конструктивных задач.

Сформулируем сначала все проекты, а затем предложим этапы их выполнения.

Учебный проект № 5.5.1 «Поворот и гомотетия». Построить квадрат по одной из его вершин и двум прямым, проходящим через две другие вершины, принадлежащие одной стороне квадрата.

Учебный проект № 5.5.2. «Перенос и гомотетия». Построить трапецию, меньшее основание которой относится к большему как $p:q$, если даны две соседние вершины на боковой стороне трапеции и окружность, содержащая две другие вершины.

Учебный проект № 5.5.3 «Симметрия и гомотетия». Построить четырёхугольник, если заданы прямая, содержащая одну из его диагоналей и две вершины, лежащие по разные стороны от этой прямой на другой диагонали, которая делит пополам угол при одной из вершин. Кроме того, стороны четырёхугольника, исходящие из этой вершины относятся как $p:q$.

Выполнение этих проектов можно разбить на следующие три этапа.

ЭТАП №1. *Проведение компьютерного анализа задачи*. Для этого, как обычно, предполагается, что задача решена и на листе бумаги изображаются данные и искомая фигуры, находящиеся в заданных отношениях. После этого такое же изображение строится на экране компьютера. Затем с помощью подпрограмм, аналитически задающих гомотетию и перемещения плоскости, ищутся точки, которые являются *ключевыми* при решении этой задачи, проверяется с помощью компьютера алгоритм построения ключевых точек.

ЭТАП №2. *Компьютерный вариант построения искомой фигуры*. На экране компьютера строится изображение искомой фигуры. Этот вариант дополняет традиционный способ построения искомой фигуры, основанный на использовании аксиом конструктивной геометрии.

ЭТАП №3. *Проведение компьютерного исследования*. Меняя данные фигуры и их взаимное расположение, проверяются различные гипотезы, связанные с возможностью построения искомой фигуры. В зависимости от выбора данных фигур на дисплее либо строятся изображения искомых фигур (если их конечное число), либо появляется надпись, сообщающая о бесконечном количестве решений или об его отсутствии.

В качестве примера рассмотрим схему выполнения проекта № 5.5.2.

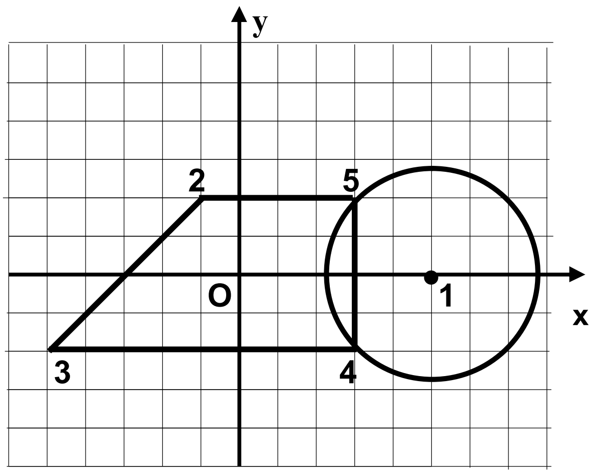


Рис. 57

Выполнение ЭТАПА №1. Проведём сначала *анализ*. Построим искомую трапецию 2345 и окружность, проходящую через вершины 4 и 5 трапеции. Будем считать, что даны вершины 2 и 3, причём основания трапеции 25 и 34 относятся как 1:2, то есть p=1, q=2 (рис. 57). Несмотря на то, что угол при вершине 4 на рисунке оказался прямым, пользоваться этим фактом при нахождении плана решения мы не имеем права. После составления электронного варианта решения задачи мы можем менять положения данных точек 2 и 3 и данной окружности. При этом мы будем получать различные трапеции, большинство из которых уже окажутся не прямоугольными. Далее составляется программа, которая строит аналогичное изображение на экране персонального компьютера. Сразу отметим, что окружность с центром в точке 1 рекомендуется строить не с помощью известного оператора CIRCLE языка QBASIC, а применяя параметрические уравнения этой линии. Связано это с тем, что в основной программе при вычислении экранных координат точек используется коэффициент искажения, который в операторе CIRCLE не учитывается.

Одна из гипотез, которая может появиться после внимательного изучения схематического чертежа, следующая: точки 5 и 4 являются ключевыми при рассмотрении композиции параллельного переноса на вектор, определяемый упорядоченной парой точек 2 и 3, и гомотетии с центром в точке 3 и коэффициентом q/p. Чтобы иллюстративно подтвердить эту гипотезу составим следующую программу:

```
REM анализ задачи (поиск ключевых точек)
SCREEN 9: m = 30: pi = 4 * ATN(1)
DATA 5,0, -1,2, -5,-2, 3,-2, 3,2: r = 2 * SQR(2): p = 1: q = 2
FOR i = 1 TO 5: READ x(i), y(i): x = x(i): y = y(i): GOSUB uv
u(i) = u: v(i) = v: NEXT i: GOTO start
REM подпрограммы: uv, perenos2d, gomot2d, okr, trapeciaA
start: GOSUB trapeciaA
 x0=x(1): y0=y(1):r0=r:c=7: GOSUB okr
 CIRCLE (u(5), v(5)), 3, 10: PAINT (u(5), v(5)), 10, 10
 ax = x(3) - x(2): ay = y(3) - y(2): x = x(5): y = y(5): GOSUB perenos2d
 s = q / p: x0 = x(3): y0 = y(3): GOSUB gomot2d : GOSUB uv
 SLEEP: CIRCLE (u, v), 4, 10: PAINT (u, v), 10, 10: SLEEP
```

где подпрограммы, изображающие окружность и трапецию, выглядят следующим образом:

```
okr: FOR t = 0 TO 2 * pi STEP .01
  x = x(1) + r0 * COS(t): y = y(1) + r0 * SIN(t): GOSUB uv
  IF t = 0 THEN PSET (u, v), c ELSE LINE -(u, v), c
 NEXT t: SLEEP: RETURN
trapeciaA: PSET (u(5), v(5)): FOR i = 2 TO 5: LINE -(u(i), v(i)): NEXT i: RETURN
```

В процессе выполнения этой программы на экране дисплея сначала появится изображение, аналогичное схематическому чертежу. После нажатия на любую клавишу появится изображение первой точки 5, претендующей быть ключевой при композиции $T_{\overrightarrow{23}} \circ H_3^{q/p}$. После повторного нажатия на любую клавишу появится образ точки 5 в результате действия на неё выбранного подобия. Поскольку изображение этого образа совпадёт с вершиной 4, а само преобразование подобия вполне может быть задано данными в условии задачи элементами, то это и означает, что наша гипотеза является вполне достоверной. После завершения программы на экране компьютера появится изображение, представленное на рисунке 58.

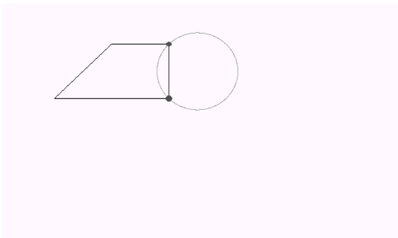


Рис. 58

Для того чтобы визуально подтвердить гипотезу и одновременно найти способ построения ключевой точки, составляется следующая подпрограмма. В этой программе строится изображение образа данной окружности под действием композиции $T_{\overrightarrow{23}} \circ H_3^{q/p}$ и визуально пользователь может убедиться в том, что этот образ проходит через вторую ключевую точку 4. Эта программа может иметь следующий вид:

```
REM продолжение анализа (поиск способа построения ключевых точек)
 SCREEN 9: m = 20: pi = 4 * ATN(1)
 DATA 5,0, -1,2, -5,-2, 3,-2, 3,2: r = 2 * SQR(2): p = 1: q = 2
 FOR i = 1 TO 5: READ x(i), y(i): x = x(i): y = y(i): GOSUB uv
 u(i) = u: v(i) = v: NEXT i: GOTO start
 REM подпрограммы: uv, perenos2d, gomot2d, okr, trapeciaA
```

```
start: GOSUB trapeciaA
xo = x(1): yo = y(1): r0 = r: c = 7: GOSUB okr
ax = x(3) - x(2): ay = y(3) - y(2): x = x(1): y = y(1): GOSUB perenos2d
s = q / p: x0 = x(3): y0 = y(3): GOSUB gomot2d
xo = x: yo = y: r0 = r * (q / p): c = 15: GOSUB okr
```

В процессе выполнения всей программы на экране персонального компьютера сначала появится изображение искомой трапеции и данной окружности. После нажатия на любую клавишу на экране появится образ этой окружности под действием выбранной композиции параллельного переноса и гомотетии. Окончательно, после выполнения всей программы, на экране появится изображение, представленное на рисунке 59. По полученному изображению видно, что образ данной окружности проходит через ключевую точку 4 (номера точек студенты могут вспомнить, взглянув на бумажный вариант изображения конфигурации).

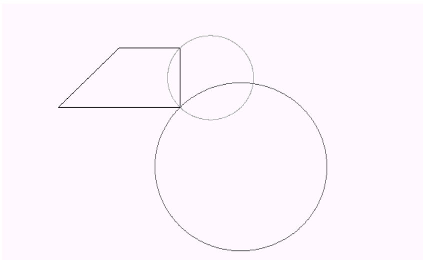


Рис. 59

Выполнение ЭТАПА №2. Поскольку ключевая точка 4 лежит одновременно на данной окружности и её образе, то появляется следующий план построения искомой трапеции по двум её вершинам 2 и 3 на боковой стороне и данной окружности, содержащей две другие вершины. Сначала ищется образ данной окружности под действием композиции параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{23}$ и гомотетии с центром в точке 3 и коэффициентом q/p (все необходимые построения можно выполнить с помощью циркуля и линейки). Затем находятся точки пересечения данной окружности и её образа. С их помощью строится искомая трапеция.

Перед тем как привести программу, соответствующую этому этапу, составим подпрограмму построения изображения трапеции по координатам трёх её вершин: 2, 3 и 4 (в качестве последней мы возьмём одну из точек пересечения окружностей) и отношению p/q. Подпрограмма строится по следующему алгоритму: сначала ищется образ вершины 4 под действием гомотетии с центром в точке 3 и коэффициентом p/q, затем – образ этого образа при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{32}$. Полученная точка и будет четвёртой вершиной трапеции. Как и на рисунке 58, присвоим ей номер 5. После нахождения экранных координат вершин 4 и 5, строим изображение трапеции (обращаемся к подпрограмме **trapeziaA**). Приведём эту подпрограмму:

```
trapeziaB: x = x(4): y = y(4)
x0 = x(3): y0 = y(3): s = p / q: GOSUB gomot2d
ax = x(2) - x(3): ay = y(2) - y(3): GOSUB pernos2d: x(5) = x: y(5) = y
FOR i = 4 TO 5: x = x(i): y = y(i): GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v: NEXT i
GOSUB trapeziaA: RETURN
```

Кроме приведённой выше, нам потребуется ещё подпрограмма нахождения координат точек пересечения двух окружностей, заданных центрами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и радиусами r_1 и r_2. Такую подпрограмму студенты составляли на лабораторном занятии во втором семестре. Приведём её:

```
   peresOO:
   a1 = -2 * x1: b1 = -2 * y1: c1 = x1 ^ 2 + y1 ^ 2 - r1 ^ 2
   a2 = 2 * (x2 - x1): b2 = 2 * (y2 - y1): c2 = c1 - x2 ^ 2 - y2 ^ 2 + r2 ^ 2
a: IF a2 ^ 2 + b2 ^ 2 + c2 ^ 2 < .01 THEN GOTO en
b: IF a2 ^ 2 + b2 ^ 2 < .01 THEN GOTO en
   IF b2 ^ 2 > 0 THEN
   a = -a2 / b2: b = -c2 / b2: pp = a ^ 2 + 1: l = b ^ 2 + b1 * b + c1
   qq = a * b + a1 / 2 + a * b1 / 2: d = qq ^ 2 - pp * l
c: IF d < 0 THEN GOTO en
   x1 = (-qq + SQR(d)) / pp: y1 = a * x1 + b
   x2 = (-qq - SQR(d)) / pp: y2 = a * x2 + b
   ELSE
   c = -c2 / a2: qq = b1 / 2: l = a1 * c + c1 + c ^ 2: d = qq ^ 2 - l
d: IF d < 0 THEN GOTO en
   y1 = -qq + SQR(d): x1 = c: y2 = -qq - SQR(d): x2 = c
   END IF: RETURN
```

Окончательно программа может иметь следующий вид:

```
REM решение задачи методом подобия (композиция гомотетии и переноса)
SCREEN 9: m = 20: pi = 4 * ATN(1)
DATA 5,0, -1,2, -5,-2: r = 2 * SQR(2): p = 1: q = 2
FOR i = 1 TO 3: READ x(i), y(i): x = x(i): y = y(i): GOSUB uv
 u(i) = u: v(i) = v: NEXT i: GOTO start
REM подпрограммы: uv, perenos2d, gomot2d, okr, trapeciaA,
trapeciaB, peresOO
start: PSET (u(2), v(2)): PSET (u(3), v(3))
 x0 = x(1): y0 = y(1): r0 = r: c = 7: GOSUB okr
 ax = x(3) - x(2): ay = y(3) - y(2): x = x(1): y = y(1): GOSUB perenos2d
 s = q / p: x0 = x(3): y0 = y(3): GOSUB gomot2d
 x0 = x: y0 = y: r0 = r * (q / p): c = 7: GOSUB okr
 x1 = x(1): y1 = y(1): r1 = r
 x2 = x0: y2 = y0: r2 = r * (q / p): GOSUB peresOO
 x(4) = x1: y(4) = y1: GOSUB trapeziaB
 x(4) = x2: y(4) = y2: GOSUB trapeziaB
en: SLEEP
```

В результате выполнения приведённой выше программы на экране персонального компьютера появится изображение, представленное на рисунке 60. Поскольку образ окружности пересекается со своим прообразом в двух точках, то найдены обе трапеции, удовлетворяющие всем условиям задачи. Программой предусмотрено построение этих трапеций.

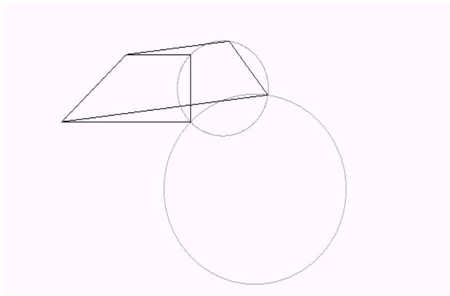


Рис. 60

Выполнение ЭТАПА №3. Составленная выше программа позволяет проводить все необходимые исследования, если в подпрограмме **peresOO** в строках с метками **a**, **b**, **c** и **d** предусмотреть соответствующие комментарии на экране. Отметим, что бесконечное множество решений возможно лишь в том случае, когда данная окружность и её образ совпадают (строка с меткой **a**). Как нетрудно показать, такое возможно лишь только в том случае, когда точки 1 (центр окружности) и 2 совпадают и, кроме того, $q=p$. Однако в этом случае в действительности не будет существовать ни одной трапеции, удовлетворяющей условиям задачи. Не будет решений и тогда, когда три данные точки 1, 2 и 3 окажутся коллинеарными (хотя обе окружности могут иметь общие точки). Поэтому в конце строк с метками **b**, **c** и **d** необходимо вывести на экран текст «Решения нет!».

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой; аналитическое задание движений и гомотетии плоскости; изображение данных и искомой фигур; пересечение окружностей.

*Программное обеспечение: с*реда Qbasic.

Самостоятельная работа студентов. Для самостоятельной работы во внеучебное время студентам можно выдать следующие учебные проекты и задачи по этой теме:

– построить образ четырёхугольника (тетраэдра) под действием композиции двух гомотетий, произведение коэффициентов которых равно единице. Подобрать параллельный перенос, отображающий полученный образ в исходный четырёхугольник (тетраэдр);

– построить образ четырёхугольника (тетраэдра) под действием композиции двух гомотетий, произведение коэффициентов которых не равно единице. Подобрать гомотетию, отображающую полученный образ в исходный четырёхугольник (тетраэдр);

– построить образ четырёхугольника под действием композиции гомотетии и центральной симметрии. Подобрать гомотетию, отображающую полученный образ в исходный четырёхугольник;

– построить образ четырёхугольника под действием композиции гомотетии и вращения с разными центрами. Подобрать гомотетию и вращение с общим центром, композиция которых отображает полученный образ в исходный четырёхугольник;

– построить образ четырёхугольника (тетраэдра) под действием композиции параллельного переноса и гомотетии. Подобрать гомотетию, отображающую полученный образ в исходный четырёхугольник (тетраэдр);

– построить образ четырёхугольника (тетраэдра) под действием композиции осевой (плоскостной) симметрии и гомотетии, центр которой лежит на оси (плоскости) симметрии. Подобрать гомотетию, отображающую полученный образ в исходный четырёхугольник (тетраэдра);

– в данную правильную четырёхугольную пирамиду вписать куб так, чтобы четыре его ребра находились на боковых гранях пирамиды;

– создать пакет демонстрационных программ, посвящённых решению методом подобий типовых задач на построение циркулем и линейкой. Для каждой задачи предусмотреть изображение на дисплее двух окон, на одном из которых поочерёдно перечисляются элементарные построения, а на другом – приводится иллюстрация этих построений, где используются графические и анимационные возможности персонального компьютера;

– создать банк (базу данных) задач конструктивной геометрии, решаемых методом подобий плоскости, содержащий вместе с их формулировками и решения, используя при этом различные способы решения, в том числе компьютерно-ориентированную методику.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: подробно изучаются преобразования подобия плоскости и пространства, отрабатываются такие основные понятия темы как гомотетия, подобие, композиция преобразований, закрепляются навыки решения конструктивных задач методом подобий.

Базовые знания: знание основ теории геометрических преобразований, умение использовать анимационные возможности компьютера для визуализации подобных преобразований, умение устанавливать связь между синтетическим и аналитическим заданием подобия.

Основные преимущества использования компьютерных технологий при изучении рассматриваемой темы.

Применение компьютерных технологий при изучении этой темы позволяет:

– использовать компьютер как средство для проведения компьютерных экспериментов при изучении свойств подобных преобразований;

– продемонстрировать (используя анимацию), как действует на геометрической фигуре подобие, представленное в виде композиции конкретного перемещения и конкретной гомотетии;

– при решении целого класса конструктивных задач на применение подобий плоскости использовать соответствующую компьютерно-ориентированную методику.

6.3. Тема. Аффинные преобразования

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: аффинные координаты на плоскости и в пространстве; определение, основные свойства и инварианты аффинных преобразований; неподвижные точки, родство; преставление аффинных преобразований плоскости в виде композиции родста и подобия; применение аффинных преобразований при решении задач; аффинные преобразования и параллельное проектирование; аналитическое задание аффинных преобразований; компьютерная визуализация аффинных преобразований.

На изучение темы отводится 6 часов лекций, 4 часа практических занятий и 2 часа лабораторных занятий.

Аффинные преобразования являются первым видом преобразований, с которым обучаемые знакомятся впервые. Если с понятиями «перемещение» и «подобие» они встречались в школьном курсе геометрии, то с преобразованием плоскости, которое не сохраняет не только расстояние между точками, но и величины углов, студенты до этого не сталкивались. В связи с этим при изучении обсуждаемой темы у учащихся возникают определённые трудности.

Отметим ещё два фактора, которые в определённой степени усложняют усвоение раздела «Аффинные преобразования». Во-первых, это, в отличие от перемещений и подобий, отсутствие достаточно ярких примеров аффинных преобразований, с которыми учащиеся встречались бы в своей практической деятельности, и которые им можно было бы продемонстрировать на занятиях. И, во-вторых, необходимость перехода от прямоугольной декартовой системы координат к более общей – аффинной.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении.

Лекции. Необходимо задать аффинные преобразования аналитически, особо рассмотреть родство – его важный частный случай, доказать теорему о представлении аффинного преобразования в виде композиции подобия и родства, составить подпрограммы вычисления координат образа точки при аффинном преобразовании, обсудить алгоритм создания эффекта непрерывной деформации фигур под действием аффинных преобразований плоскости.

Рассмотрим подробнее некоторые вопросы темы, связанные с реализацией концепции.

Перед тем как приступить к изучению аффинных преобразований, необходимо рассмотреть обобщение декартовых координат – аффинные координаты точек (напомним, что ранее в курсе геометрии рассматривалась лишь прямоугольная система координат). Полезно найти зависимость между декартовыми и аффинными координатами точки, если известны координаты начала координат и базисных векторов аффинного репера относительно ортонормированного.

Необходимо обратить особое внимание учащихся на то, что в формулах

$$\begin{matrix} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{matrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (*)$$

аналитически задающих аффинное преобразование, коэффициенты имеют определённый геометрический смысл. А именно, $(a_1;\ a_2)$, $(b_1;\ b_2)$ – координаты векторов, являющихся образами базисных векторов при аффинном преобразовании, $(c_1;\ c_2)$ – координаты образа начала координат при этом же преобразовании. Полученные точка и два вектора образуют репер, относительно которого координаты любой точки совпадают с координатами прообраза этой точки относительно исходной системы координат. Приведём подпрограмму, соответствующую формулам (*):

```
affin: xx = a1 * x + b1 * y + c1
       yy = a2 * x + b2 * y + c2
       x = xx: y = yy: RETURN
```

На одной из лекций, посвящённых изучению этой темы, желательно продемонстрировать выполнение следующего опорного учебного проекта, который поможет студентам не только глубже понять теорию аффинных преобразований, но и успешно выполнить предстоящую лабораторную работу.

Учебный проект «Построение образа фигуры при аффинном преобразовании плоскости». Построить на дисплее изображение некоторой плоской фигуры. Используя анимационные возможности компьютера, смоделировать процесс непрерывной деформации фигуры в свой аффинный образ.

Выполнение проекта можно разбить на следующие два этапа: построение аффинного образа фигуры без создания эффекта непрерывной деформации, а затем – с созданием такового.

Выполнение первого этапа проекта. В качестве преобразуемой фигуры возьмём букву К. Составим сначала подпрограмму, позволяющую изобразить эту букву:

```
bukvaKa: DATA 0,8, 1,8, 1,5, 2,8, 3,8, 1.8,4.4, 4,0, 3,0, 1,4, 1,0, 0,0
 FOR i = 1 TO 11: READ x(i), y(i): x = x(i): y = y(i)
 GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v: NEXT i: PSET (u(11), v(11))
 FOR i = 1 TO 11: LINE -(u(i), v(i)): NEXT i
 PAINT ((u(1) + u(3)) / 2, (v(1) + v(3)) / 2), 14, 15: RETURN
```

Составим теперь программу, по которой на экране ПК строится окрашенное изображение этой буквы и (после нажатия на любую клавишу) изображение её аффинного образа. Приведём возможный вариант программы:

```
REM аффинный образ фигуры (без анимации)SCREEN 9: m = 10: DIM x(11),
y(11), u(11), v(11)a1 = 2: b1 = 1: c1 = 4:  a2 = -1: b2 = 1: c2 = -3
GOSUB bukvaKa:GOTO start
REM подпрограммы: uv, bukvaKa, affin
start: SLEEP: FOR i = 1 TO 11: x = x(i): y = y(i): GOSUB affin
    GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v: NEXT i: PSET (u(11), v(11)), 7
    FOR i = 1 TO 11: LINE -(u(i), v(i)), 7: NEXT i
    PAINT ((u(1) + u(3)) / 2, (v(1) + v(3)) / 2), 7, 7: SLEEP
```

В первых четырёх строках программы задаются начальные условия, резервируется память под массивы мировых ($x(i)$, $y(i)$) и экранных ($u(i)$; $v(i)$) координат вершин многоугольника-буквы, изображается эта

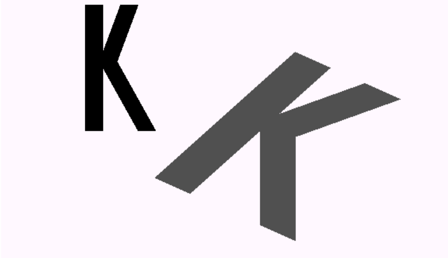


Рис. 61

буква. После блока, содержащего три подпрограммы, идёт рабочая часть программы (её первая строка имеет метку **start**). В этом блоке находятся, сначала декартовы и экранные координаты аффинного образа буквы *К*, затем этот образ изображается. После выполнения всей программы на экране персонального компьютера появится изображение, представленное на рисунке 61.

Построенный образ фигуры изображается практически мгновенно, сразу после нажатия на любую клавишу после появления изображения фигуры оригинала. Приведём возможный вариант программы, по которому фигура-оригинал, плавно деформируясь, переходит в положение своего образа.

```
REM аффинный образ фигуры (с анимацией)
SCREEN 9: DIM x(11), y(11), u(11), v(11), p(11), q(11), ax(11), ay(11)
m = 20: k = 300: ap = 0: vp = 1
GOSUB bukvaKb: SLEEP: GOTO start
REM подпрограммы: uv, bukvaKb, perenos2d, affin, affinanimac, figura
start: a1 = 2: b1 = 1: c1 = 4:  a2 = -1: b2 = 1: c2 = -3
GOSUB affinanimac:  GOSUB figura: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

Здесь в первом блоке к массивам $x(i)$,$y(i)$ и $\underline{u}(i)$,$v(i)$ добавлены массивы $p(i)$, $q(i)$ экранных координат перемещаемых точек и массивы $ax(i)$ и $ay(i)$ декартовых координат элементарных векторов, с помощью которых точки-прообразы плавно перемещаются в точки-образы.

Блок подпрограмм содержит подпрограмму **bukvaKb,** которая отличается от подпрограммы **bukvaKa** лишь третьей строкой. В этой строке добавлены два оператора присваивания, формирующих массивы экранных координат перемещаемых вершин многоугольника. В новой подпрограмме строка выглядит следующим образом:

```
GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v: p(i)=p: q(i)=q: NEXT i: PSET (u(11), v(11))
```

Рассмотрим подпрограммы, которые добавлены к основной программе. Во-первых, это знакомая студентам подпрограмма **perenos2d**, вычисляющая координаты образа точки при параллельном переносе. Затем вновь составленная подпрограмма **affinanimac:**

```
affinanimac: FOR i = 1 TO 11: x = x(i): y = y(i): GOSUB affin
        ax(i) = (x - x(i)) / k: ay(i) = (y - y(i)) / k: NEXT i
        FOR s = 1 TO k: GOSUB figura
```

```
FOR i = 1 TO 11: x = x(i): y = y(i)
 ax = ax(i): ay = ay(i): GOSUB perenos2d
 x(i) = x: y(i) = y: GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v
NEXT i: SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s: RETURN
```

с помощью которой создаётся анимационный эффект непрерывной деформации фигуры из положения прообраза в положение её аффинного образа. Идея создания анимационного эффекта непрерывного преобразования фигуры в её аффинный образ такая же, как и в случае с осевой симметрией. А именно, на каждой из двух быстро сменяющихся видеостраниц строится изображение одного из образов вершины M_i (i=1..11), полученного в результате параллельного переноса на некоторую степень элементарного вектора $\frac{1}{k}\overrightarrow{M_iM_i'}$, где M_i' – аффинный образ точки M_i. У разных вершин многоугольника, вообще говоря, будут разные элементарные переносы. В программе созданы два массива *ax*(*i*) и *ay*(*i*) координат элементарных векторов переноса.

Кроме того, к основной программе добавлена следующая подпрограмма (метка первой строки **figura):**

```
figura: PSET (u(11), v(11)): FOR i = 1 TO 11: LINE -(u(i), v(i)): NEXT i
        PAINT ((u(1) + u(3)) / 2, (v(1) + v(3)) / 2), 1, 15
        PSET (p(11), q(11)), 7: FOR i = 1 TO 11: LINE - (p(i), q(i)), 7: NEXT i
        PAINT ((p(1) + p(3)) / 2, (q(1) + q(3)) / 2), 2, 7: RETURN
```

с помощью которой изображаются фигура-прообраз (оригинал) и одно из промежуточных положений деформируемой фигуры.

В третьем блоке (начинается с метки **start**) задаются коэффициенты формул аналитического задания аффинного преобразования, после чего происходит обращение к подпрограмме **affinanimac**.

После составления программы необходимо продемонстрировать её выполнение на демонстрационном мониторе, рассмотреть изображения, соответствующие различным значениям коэффициентов в формулах (*).

На лабораторном занятии при выполнении учебного проекта студентам потребуется представить конкретное аффинное преобразование в виде композиции движения, гомотетии и родства. К сожалению, доказательство этого факта не всегда содержит алгоритм нахождения сомножителей этой композиции. Поскольку любое аффинное преобразование однозначно определяется любой парой соответственных неколлинеарных троек точек, то для определения сомножителей на лекции желательно рассмотреть решение следующей задачи.

Задача (о представлении аффинного преобразования композицией переноса, симметрии, гомотетии и родства). *Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Подобрать движение, гомотетию и родство, композиция которых отображала бы вершины первого треугольника в соответствующие вершины второго.*

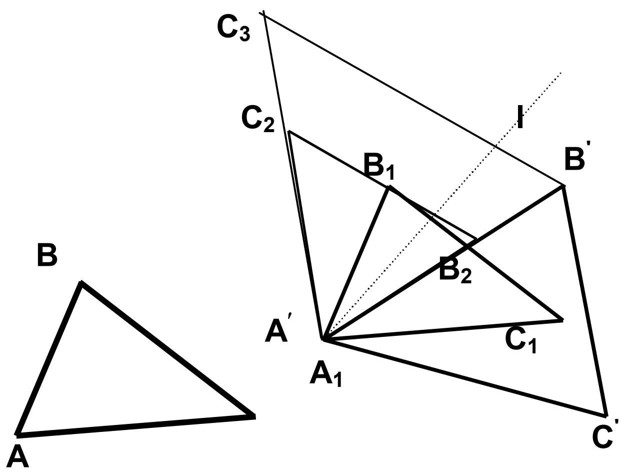


Рис. 62

Решение. Совместим некоторым движением, например, параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AA'}$, вершины A и A' (рис. 62). Треугольник ABC отобразится на треугольник $A'B_1C_1$. Рассмотрим осевую симметрию S_l (или поворот на ориентированный угол $B_1A'B'$), где l – биссектриса угла $B_1A'B'$. При этом движении треугольник $A'B_1C_1$ отобразится на треугольник $A'B_2C_2$, причём вершина B_2 окажется на луче $A'B'$. Подберём теперь гомотетию, которая бы оставляла точку A' на месте, а вершину B_2 отображала на вершину B'. Для этого в качестве центра гомотетии достаточно взять A', а в качестве коэффициента гомотетии s – число $A'B'/A'B_2$. При этой гомотетии треугольник $A'B_2C_2$ отобразится на треугольник $A'B'C_3$. Но тогда родство

f с осью $A'B'$ и парой соответственных точек C_3 и C' отобразит треугольник $A'B'C_3$ на треугольник $A'B'C'$. Таким образом, требуемое аффинное преобразование представимо в виде следующей композиции $T_{\overline{AA'}} \circ S_l \circ H_{A'}^{s} \circ f$.

Практические занятия. На одном из практических занятий необходимо составить программы, создающие эффект непрерывного перемещения точки под действием аффинных преобразований плоскости. Желательно обсудить алгоритм построения на дисплее аффинного образа фигуры по двум упорядоченным тройкам соответственных неколлинеарных точек.

Лабораторно-практические занятия не предполагаются.

Лабораторные занятия. По этой теме предполагается проведение одного лабораторного занятия, посвящённого выполнению лабораторной работы № 5.6.

Лабораторная работа № 5.6 «Аффинные преобразования плоскости».

Организация работы: проводится в форме учебного проекта № 5.6.1 под общим руководством преподавателя.

Учебная цель: закрепить в процессе практической деятельности и составления программ понятие аффинного преобразования плоскости, его частного случая родства, научить студентов применять координатный метод для компьютерной визуализации аффинных преобразований; научить студентов представлять конкретные аффинные преобразования плоскости композицией подобия и родства.

Учебный проект № 5.6.1 «Аффинные путешествия по плоскости». Построить на экране компьютера изображение некоторой плоской фигуры и её аффинного образа. Подобрать движение, гомотетию и родство, композиция которых отображала бы исходную фигуру в её аффинный образ (для визуализации подобных и родственных преобразований использовать анимационные возможности компьютера).

Выполнение проекта можно разбить на следующие три этапа:

ЭТАП №1. Изобразить на дисплее некоторую плоскую фигуру. Смоделировать процесс непрерывной деформации этой фигуры под действием родственного преобразования, ось которого совпадает с осью абсцисс.

ЭТАП №2. Смоделировать на дисплее процесс непрерывной деформации фигуры под действием родственного преобразования, заданного произвольно расположенной осью и парой соответственных точек, не лежащих на оси родства.

ЭТАП №3. Изобразить на дисплее дополнительно аффинный образ фигуры оригинала. Подобрать движение, гомотетию и родство, композиция которых отображала бы (используя анимацию) данную фигуру в её аффинный образ.

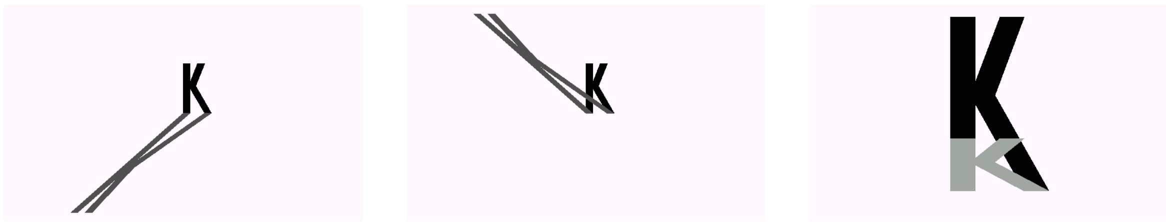
Приведём один из вариантов выполнения этих этапов проекта.

Выполнение ЭТАПА №1. Построим образ фигуры сначала при родственном преобразовании плоскости с осью родства, совпадающей с осью абсцисс. Будем считать, что при этом точка $A(x_1, y_1)$, не лежащая на оси родства, отображается на точку $B(x_2, y_2)$ также не лежащую на ней. Найдём коэффициенты формул (4.5.1). Поскольку начало координат O(0, 0) и точка (1, 0) при этом преобразовании неподвижны, то $a_1 = 1$, $c_1 = 0$, $a_2 = 0$, $c_2 = 0$. Используя третью пару соответственных точек и формулы (*), легко выразить два других коэффициента через координаты точек A и B: $b_1=(x_2-x_1)/y_1$, $b_2 = y_2/y_1$.

Воспользуемся составленной на лекции программой «Аффинный образ фигуры (без анимации)». Используя эту программу и полученные соотношения, можно построить на дисплее образы буквы *К* под действием различных родственных преобразований. Например, если точка (0, 1) отображается на точку (–2, –2), то $b_1 = -2$, $b_2 = -2$. Заменим третью строку программы на строку

a1 = 1: b1 = -2: c1 = 0: a2 = 0: b2 = -2: c2 = 0

Мы получим изображение фигуры и её родственного образа (тень буквы *К*), представленные на рисунке 63 а).



а) б) в)

Рис. 63

Если задать другие значения коэффициентов, например:

a1 = 1: b1 = -2: c1 = 0: a2 = 0: b2 = 2: c2 = 0,

то мы получим изображение, представленное на рисунке 63 б). На рисунке 63 в) представлено изображение фигуры-оригинала и её образа при «сжатии» плоскости к оси абсцисс с коэффициентом 0,3. Соответствующее аффинное преобразование задаётся формулами, в которых коэффициенты принимают следующие значения: **a1 = 1: b1 = 0: c1 = 0: a2 = 0: b2 = .3: c2 = 0.**

При построении родственного образа точки в случае произвольного расположения оси ограничимся лишь следующим замечанием.

Замечание. Если ось родства m задана произвольным направляющим вектором $\vec{m}(mx;\ my)$ и точкой $M(x_0;\ y_0)$, то, как и в случае с осевой симметрией, рассматриваемое родственное преобразование f можно представить в виде композиции $f = T_{\overline{MO}} \circ R_O^{-\alpha} \circ g \circ R_O^{\alpha} \circ T_{\overline{OM}}$, где α – угол между осями m и OX, а g – родство с осью абсцисс и парой соответственных точек A' и B', являющихся образами точек A и B при перемещении $T_{\overline{MO}} \circ R_O^{-\alpha}$.

Выполнение ЭТАПА №2. Создадим теперь эффект непрерывной деформации фигуры в свой родственный образ. Будем считать, что родство

f задано осью и парой соответственных точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, не лежащих на оси родства, причём ось и соответственные точки расположены произвольно по отношению к системе координат.

Учитывая замечание, приведённое выше, составим подпрограмму, с помощью которой будет задаваться анимация рассматриваемого родственного преобразования. Подпрограмма будет выглядеть следующим образом:

```
rodstvoanimac: IF mx = 0 THEN alfa = pi / 2 ELSE alfa = ATN(my / mx)
 x = x1: y = y1: ax = -x0: ay = -y0: GOSUB perenos2d
 fi = -alfa: GOSUB povorotO: xx1 = x: yy1 = y
 x = x2: y = y2: GOSUB perenos2d: GOSUB povorotO: xx2 = x: yy2 = y
 a1=1: a2=0: b1 = (xx2 - xx1) / yy1: b2 = yy2 / yy1: c1=0: c2=0
 FOR i = 1 TO 11: x = x(i): y = y(i): ax = -x0: ay = -y0
  GOSUB perenos2d: fi = -alfa: GOSUB povorotO
  GOSUB affin: fi = alfa: GOSUB povorotO: ax = x0: ay = y0
  GOSUB perenos2d: ax(i) = (x - x(i)) / k: ay(i) = (y - y(i)) / k
 NEXT i
 FOR s = 1 TO k: GOSUB figura
  FOR i = 1 TO 11: x = x(i): y = y(i)
   ax = ax(i): ay = ay(i): GOSUB perenos2d
   x(i) = x: y(i) = y: GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v
  NEXT i: SWAP ap, vp: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
 NEXT s: RETURN
```

Прокомментируем её. Во второй, третьей и четвёртой строках вычисляются координаты образов соответственных точек A и B в результате действия на них композиции $T_{\overline{MO}} \circ R_O^{-\alpha}$. В цикле по i, открытого в шестой строке, вычисляются координаты элементарных векторов переноса для каждой вершины многоугольника. Завершающая часть подпрограммы стандартна.

Кроме того, для наглядности предусмотрим изображение соответственных точек A и B и отрезка оси родства. Для этого в конец подпрограммы **figura** добавим следующие строки:

```
2tochki: x = x1: y = y1: GOSUB uv: PSET (u, v)
         x = x2: y = y2: GOSUB uv: PSET (u, v)
os: x = x0 + 20 * mx: y = y0 + 20 * my: GOSUB uv: u1 = u: v1 = v
  x = x0 - 20 * mx: y = y0 - 20 * my: GOSUB uv: LINE (u1, v1)-(u, v): RETURN
```

С учётом сделанных дополнений и изменений программа построения образа фигуры при родственном преобразовании плоскости, заданном произвольной осью и парой соответственных точек, будет выглядеть следующим образом:

```
REM образ фигуры при родстве, заданном произвольной осью
 и парой соответственных точек (анимация)
 SCREEN 9: DIM x(11), y(11), u(11), v(11), p(11), q(11), ax(11), ay(11)
 m = 13: k = 100: ap = 0: vp = 1: pi = 3.1416
 GOSUB bukvaKb: SLEEP: GOTO start
REM подпрограммы: uv, perenos2d, povorotO, bukvaKb, affin, figura
 rodstvoanimac
start: x0 = 8: y0 = 2: mx = 1: my = 1
    x1 = 7: y1 = 3: x2 = 8: y2 = 0: GOSUB rodstvoanimac
    GOSUB figura: SCREEN 9, 1, ap, ap:SLEEP
```

После выполнения первого этапа программы на экране персонального компьютера появится изображение фигуры оригинала. Затем после нажатия на любую клавишу появится изображение оси родства и пары соответственных точек. Одновременно с этим фигура-оригинал, непрерывно деформируясь, отобразится на фигуру, являющуюся её образом при родственном преобразовании плоскости. После завершения всей программы на экране ПК появится изображение, представленное на рисунке 64.

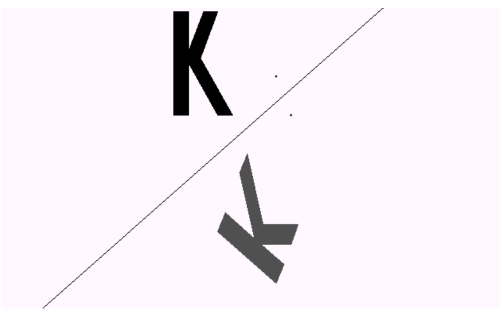


Рис. 64

Выполнение ЭТАПА №3. Основной задачей этого этапа является подбор параллельного переноса, осевой симметрии, гомотетии и родства, композиция которых совпадала бы с выбранным аффинным преобразованием. Алгоритм выбора таких преобразований был рассмотрен на лекции, на лабораторном занятии студенты должны его реализовать при составлении программы. Для этого нужно знать координаты трёх неколлинеарных точек и их образов при аффинном преобразовании. В качестве такой тройки точек можно взять первые три вершины многоугольника-оригинала (занесём их мировые координаты в массивы $x_1(i)$, $y_1(i)$, i=1,2,3, причём сделаем это в первом блоке одновременно с формированием массива мировых координат вершин многоугольника). Мировые координаты их образов занесём в массивы $x_2(i)$, $y_2(i)$, i=1,2,3. Все необходимые вычисления, связанные с заданием параметров для искомых преобразований, будут выполняться в рабочем блоке программы.

Внесём теперь такие изменения в программу, чтобы на дисплее появилось сначала изображение фигуры-оригинала (буквы *К*), затем изображение её аффинного образа (анимацию на этом этапе можно не использовать). После нажатия на любую клавишу фигура-оригинал, вернее её копия, должна начать плавно перемещаться по дисплею, последовательно «проходя» стадии всех выбранных студентом преобразований. В процессе анимации, кроме перемещаемой фигуры, сохраним на дисплее изображения фигуры-оригинала и фигуры-образа. Для изображения последней зарезервируем массивы $u_1(i)$, $v_1(i)$, i=1,2,..11 экранных координат её вершин.

В подпрограмму **figura** добавим строки (третья и четвёртая), позволяющие изображать на каждой видеостранице кроме перемещаемой фигуры и фигуры-оригинала ещё и аффинный образ последней. Окончательно эта подпрограмма будет иметь следующий вид:

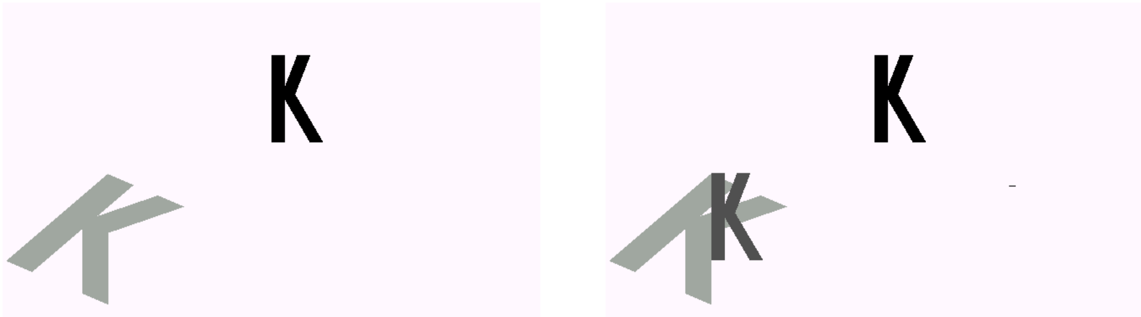
```
figura:  PSET (u(11), v(11)): FOR i = 1 TO 11: LINE -(u(i), v(i)): NEXT i
         PAINT ((u(1) + u(3)) / 2, (v(1) + v(3)) / 2), 1, 15
         PSET (u1(11), v1(11)), 3: FOR i = 1 TO 11: LINE -(u1(i), v1(i)), 3: NEXT i
         PAINT ((u1(1) + u1(3)) / 2, (v1(1) + v1(3)) / 2), 3, 3
         PSET (p(11), q(11)), 7: FOR i = 1 TO 11: LINE -(p(i), q(i)), 7: NEXT i
         PAINT ((p(1) + p(3)) / 2, (q(1) + q(3)) / 2), 2, 7: RETURN
```

Кроме того, добавим подпрограммы, создающие эффект непрерывного перемещения фигуры по экрану компьютера под действием движений и гомотетии, известные студентам по предыдущим лабораторным работам. Окончательно начальный блок программы (вместе с перечнем всех подпрограмм) будет иметь следующий вид:

```
SCREEN 9: REM аффинный образ буквы К с анимацией
 DIM x(11), y(11), u(11), v(11), p(11), q(11), ax(11), ay(11), u1(11), v1(11)
 m = 12: k = 100: ap = 0: vp = 1: pi = 3.1416
 DATA 0,8, 1,8, 1,5, 2,8, 3,8, 1.8,4.4, 4,0, 3,0, 1,4, 1,0, 0,0
 FOR i = 1 TO 11: READ x(i), y(i): x = x(i): y = y(i)
 IF i <= 3 THEN x1(i) = x: y1(i) = y
 GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v: p(i) = u: q(i) = v: NEXT i
 PSET (u(11), v(11)): FOR i = 1 TO 11: LINE -(u(i), v(i)): NEXT i
 PAINT ((u(1) + u(3)) / 2, (v(1) + v(3)) / 2), 1, 15
 a1 = 2: b1 = 1: c1 = -21:  a2 = -1: b2 = 1: c2 = -11
 FOR i = 1 TO 11: x = x(i): y = y(i): GOSUB affin
 IF i <= 3 THEN x2(i) = x: y2(i) = y
 GOSUB uv: u1(i) = u: v1(i) = v: NEXT i: SLEEP: GOTO start
REM подпр.: uv , perenos2d , povorotO, povorotC, simmABC , affin, gomot2d,
gomot2danimac, figura, rodstvoanimac, perenos2danimac, simmABCanimac
start:
```

В заключение останется составить лишь рабочий блок программы. В первых двух строках изобразим аффинный образ фигуры (фигура-оригинал изображается в 8-ой и 9-ой строках первого блока). На экране появится изображение, представленное на рисунке 65 а). Затем зададим параллельный перенос на вектор с началом в точке ($x_1(1)$; $y_1(1)$) и концом в точке ($x_2(1)$; $y_2(1)$) и обратимся к подпрограмме, позволяющей создать анимацию этого переноса. Начало рабочей части будет иметь вид:

```
start:
PSET (u1(11), v1(11)), 3: FOR i = 1 TO 11: LINE -(u1(i), v1(i)), 3: NEXT i
PAINT ((u1(1) + u1(3)) / 2, (v1(1) + v1(3)) / 2), 3, 3: SLEEP
mx = x2(1) - x1(1): my = y2(1) - y1(1): GOSUB perenos2danimac
```



а) Рис. 65 б)

После выполнения последней строки на дисплее появится изображение, представленное на рисунке 65 б).

Зададим теперь осевую симметрию и подействуем этим движением на полученный образ. Найдём сначала координаты направляющего вектора прямой, являющейся биссектрисой соответствующего угла. Для этого вычислим длину **dlina1** отрезка с концами в вершинах 1 и 2 фигуры оригинала и длину **dlina2** аффинного образа этого отрезка. В следующих двух строках, используя найденные величины, вычислим координаты (*mx*; *my*) искомого вектора оси симметрии. Эта часть программы будет иметь следующий вид:

```
dlina1 = SQR((x(2) - x(1)) ^ 2 + (y(2) - y(1)) ^ 2)
dlina2 = SQR((x2(2) - x2(1)) ^ 2 + (y2(2) - y2(1)) ^ 2)
mx = (x(2) - x(1)) * dlina2 + (x2(2) - x2(1)) * dlina1
my = (y(2) - y(1)) * dlina2 + (y2(2) - y2(1)) * dlina1
x0 = x(1): y0 = y(1): GOSUB simmABCanimac
```

а на экране появится изображение, представленное на рисунке 66 а).

Затем зададим гомотетию и подействуем ею на полученный образ:

```
x0 = x(1): y0 = y(1): s = dlina2 / dlina1: GOSUB gomot2danimac
```

на экране ПК появится изображение, представленное на рисунке 66 б).

а) Рис. 66 б)

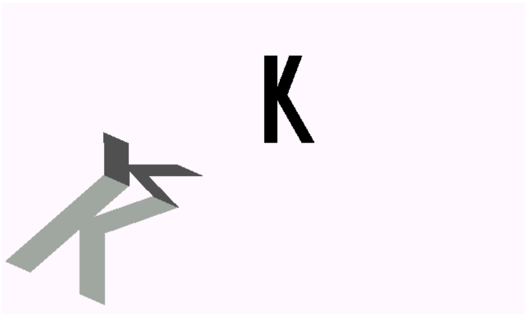
Теперь осталось на полученный образ подействовать родственным преобразованием, ось родства и соответственные точки которого, а также обращение к подпрограмме **affinanimac,** задаются в следующих строках:

x0 = x(1): y0 = y(1): mx = x(2) - x(1): my = y(2) - y(1)

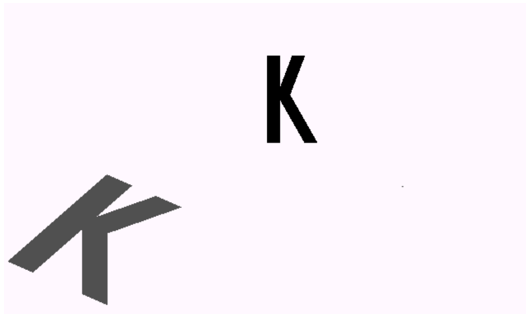
x1 = x(3): y1 = y(3): x2 = x2(3): y2 = y2(3): GOSUB affinanimac

GOSUB figura: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP

После выполнения всей программы на экране ПК появится изображение, представленное на рисунке 67 б) (на рис. 67 а) представлено одно из промежуточных положений).



а)



б)

Рис. 67

Программное обеспечение: среда Qbasic.

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой; аналитическое задание движений, гомотетии, аффинных преобразований плоскости; изображение многоугольника-буквы; непрерывная деформация фигуры под действием движений, гомотетии, аффинных преобразований плоскости.

Самостоятельная работа студентов. Для самостоятельной работы во внеучебное время студентам можно выдать следующие задачи и учебные проекты:

– на дисплее построить изображение двух треугольников (параллелограммов, эллипсов); подобрать аффинное преобразование, отображающее один из этих треугольников (параллелограммов, эллипсов) на другой;

– на дисплее изобразить треугольник, медиану (высоту, биссектрису), задать аффинное преобразование и построить аффинные образы этих фигур; проверить, является ли образ медианы (высоты, биссектрисы)– медианой (высотой, биссектрисой) образа треугольника;

– на дисплее изобразить произвольную трапецию и отрезок; построить такую равнобедренную трапецию, основание которой совпадало бы с данным отрезком, и существовало такое аффинное преобразование, которое бы отображало данную трапецию в равнобедренную; задать это преобразование и непрерывно отобразить первую трапецию во вторую;

– на дисплее изобразить правильный треугольник (квадрат, правильный шестиугольник) и эллипс; найти аффинное преобразование, отображающее данный треугольник (квадрат, правильный шестиугольник) в треугольник (четырёхугольник, шестиугольник), вписанный в данный эллипс; задать это преобразование и выполнить указанное отображение (в том числе с использованием анимации);

– на дисплее изобразить правильный треугольник (квадрат, правильный шестиугольник) и эллипс; найти аффинное преобразование, отображающее данный треугольник (квадрат, правильный шестиугольник) в треугольник (четырёхугольник, шестиугольник), описанный около данного эллипса; задать это преобразование и выполнить указанное отображение (в том числе с использованием анимации);

– на экране дисплея построить произвольную точку и задать родственное преобразование; построить изображения двух взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через эту точку, образы которых также взаимно перпендикулярны; визуализировать этот процесс на дисплее;

– составить программу, позволяющую произвольное аффинное преобразование представить в виде композиции движения и двух сжатий по взаимно перпендикулярным направлениям;

– построить на дисплее изображение куба и задать аффинное преобразование пространства; используя анимационные возможности компьютера, создать эффект непрерывной деформации куба в свой аффинный образ;

– построить на дисплее изображение куба и найти его образ при родственном преобразовании пространства, плоскость родства которого содержит одну из его граней.

– произвольное аффинное преобразование пространства задать парой соответственных тетраэдров; построить на дисплее образ какой-нибудь фигуры;

– родство пространства задать произвольной плоскостью родства и парой соответственных точек, не лежащих в плоскости родства; построить на дисплее образ некоторой фигуры.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: подробно изучаются аффинные преобразования плоскости; отрабатывается такое понятие, как композиция преобразований; закрепляется умение представлять произвольное аффинное преобразование композицией подобия и родства.

Базовые знания: знание основ теории аффинных преобразований, умение использовать анимационные возможности компьютера для создания динамических эффектов, знание графических средств языка программирования.

Преимущества использования НИТ при изучении темы. Применение компьютерных технологий позволяет:

- отработать связь между аффинными преобразованиями плоскости и пространства и их аналитическим заданием;
- визуализировать такое абстрактное понятие, как аффинное преобразование;
- обучить студентов технике создания на дисплее динамических эффектов, связанных с использованием аффинных преобразований.

ГЛАВА VI. Реализация концепции при изучении проективной геометрии и оснований геометрии

7.1. Модуль «Проективная геометрия»

Приведём сначала содержание модуля «Проективная геометрия» и краткие комментарии к нему.

Модуль «Проективная геометрия»: Центральное проектирование, инварианты. Проективная плоскость, модели проективной плоскости. Принцип двойственности, теорема Дезарга, приложения к решению задач. Координаты точек на проективной прямой и проективной плоскости. Сложное отношение точек и прямых, гармонизм, полный четырехвершинник. Проективные преобразования. Гомология. *Компьютерная визуализация проективных преобразований.* Проективные и перспективные отображения прямых и пучков. Линии второго порядка, пересечение с прямой, касательные. Сопряженность точек, полюс и поляра. Классификация линий второго порядка. Проективное определение линий второго порядка, теорема Штейнера. Шестивершинник, теоремы Паскаля и Брианшона. Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой. Методы изображения фигур, основанные на центральном проектировании. Линейная перспектива. *Компьютерное моделирование фигур в линейной перспективе*. Проективная геометрия с точки зрения теоретико-группового подхода к классификации геометрий.

<u>Комментарии к модулю</u>. При изучении большинства тем и разделов модуля предполагается активное применение систем динамической геометрии. Планируется проведение компьютерных экспериментов, по результатам которых студенты должны самостоятельно подметить реально существующие закономерности. В качестве виртуальной лаборатории предполагается использование систем динамической геометрии, причем не только на лабораторном занятии, но и на лекции.

При построении одной линейкой линий второго порядка планируется задействовать анимационные и конструктивные возможности систем динамической геометрии.

На одном из лабораторных занятий предполагается провести лабораторную работу в форме учебного проекта, посвященного построению в среде Qbasic изображения комнаты в линейной перспективе. Для успешного выполнения проекта студентов необходимо познакомить с вычислительным методом построения изображений в центральной проекции.

Изучение модуля планируется в пятом семестре. Общее число аудиторных учебных часов – 72. Из них 36 часов лекционных, 24 – практических, 8 – лабораторно-практических, 4 – лабораторных занятий.

Рассмотрим возможные пути реализации концепции КПГ в некоторых темах и разделах модуля.

Тема. Проективная плоскость, основные понятия и факты

В теме рассматриваются следующие вопросы: центральное проектирование, инварианты. Проективная плоскость, модели проективной плоскости. Принцип двойственности, теорема Дезарга, приложения к решению задач. Координаты точек на проективной прямой и проективной плоскости. Сложное отношение точек и прямых, гармонические четверки точек и прямых, полный четырехвершинник.

На изучение темы отводится 6 часов лекций, 10 практических и 2 часа лабораторно-практических занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении: лекция, практическое или лабораторно-практическое занятие, самостоятельная работа студентов.

Лекции. При рассмотрении центрального проектирования и его инвариантов на лекции рекомендуется воспользоваться одной из систем динамической геометрии, например, «Живая геометрия». Рабочее поле этой среды спроецировать на демонстрационный экран и все построения выполнить в режиме реального времени. Опишем эту процедуру более подробно.

На экране компьютера строится прямая a', отрезок AB и центр проектирования S, не лежащий на прямых a' и AB. Через S проводится пунктирная прямая a параллельная a'. На отрезке AB выбирается точка C, строятся проекции A', B' и C' точек A, B и C на прямую a'. Для точки C задается опция перемещения из текущего положения в точку B, для точки C' – оставлять след. Если отрезок AB расположить по одну сторону относительно прямой a, то C' вычертит отрезок $A'B'$ (рис. 68 а)), если по разные стороны (рис. 68 б)), то на экране получим два противоположно направленных непересекающихся луча с началами в точках A' и B'.

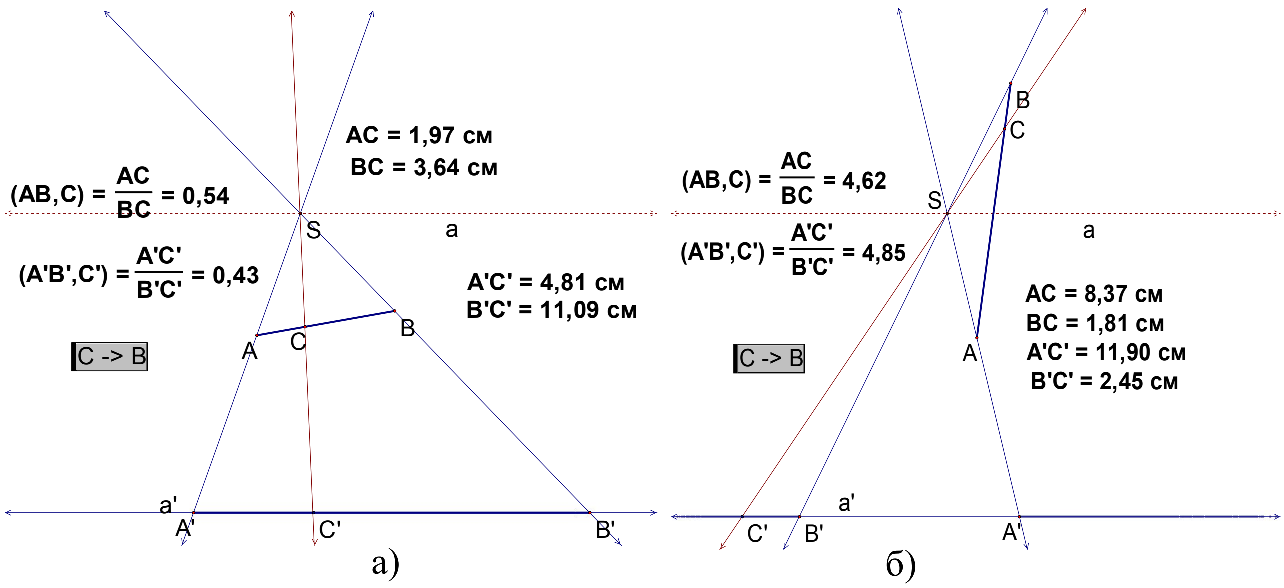
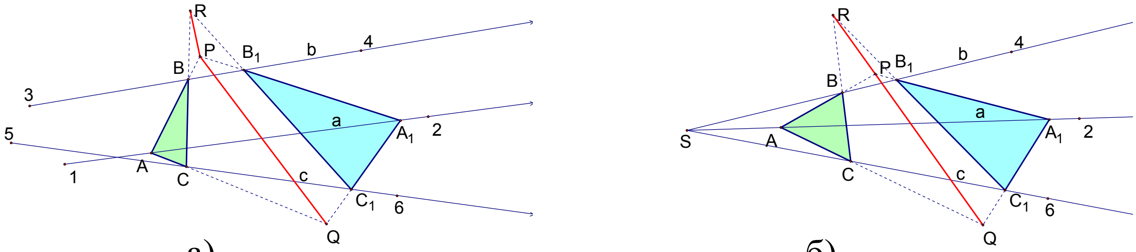


Рис. 68

Помещая с помощью мыши один из концов отрезка на прямую a, лектор демонстрирует, что в третьем случае образом отрезка является луч. Живой пример убедительно показывает, что отношение «лежать между» для троек точек при центральном проектировании не сохраняется. Если воспользоваться графическим калькулятором среды «Живая геометрия» и вывести на экран значения простых отношений для троек точек A, B, C и A', B', C' (рис. 68), то можно визуально убедиться в том, что $(AB,C) \neq (A'B',C')$. Таким образом, простое отношение трех точек одной прямой также не является инвариантом центрального проектирования.

При рассмотрении темы «Принцип двойственности, теорема Дезарга» изложение лекционного материала желательно организовать так, чтобы студенты сами подметили те закономерности, которые составляют содержание прямой и обратной теорем Дезарга. Для этого удобно использовать динамические возможности среды «Живая геометрия». Приведем один из возможных вариантов.



а) б)

Рис. 69

Строим прямую (12), обозначаем ее а, помещаем на нее точки A и A_1. Аналогично строится прямая b = (34) с точками B, B_1 и прямая c = (56) с точками C, C_1 (на рис. 69 а) для компактности чертежа вместо прямых построены отрезки). Проведем через каждую пару точек A, B и C сначала пунктирные прямые (стороны треугольника ABC), затем полужирные отрезки AB, BC и AC, окрасим внутреннюю область треугольника ABC. Аналогично поступим с тремя оставшимися точками A_1, B_1 и C_1, внутреннюю область треугольника $A_1B_1C_1$ окрасим другим цветом. Точки пересечения соответствующих сторон (прямых) треугольников обозначим P, Q и R. Заменим пунктирные стороны треугольников на пунктирные отрезки, соединяющие вершины треугольников с точками P, Q и R. Меняя расположение прямых a, b и c, студенты должны заметить, что ломаная QPR становится прямой, если a, b и c будут иметь общую точку S (рис. 69 б)).

При доказательстве теоремы Дезарга на том ее этапе, который связан с построением чертежа, можно с успехом использовать среду «Живая геометрия». Для каждого из двух возможных случаев взаимного расположения дезарговых треугольников (лежат в одной плоскости, лежат в разных плоскостях) желательно к лекции подготовить соответствующий слайд (на рис. 70 представлен случай, когда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в одной плоскости).

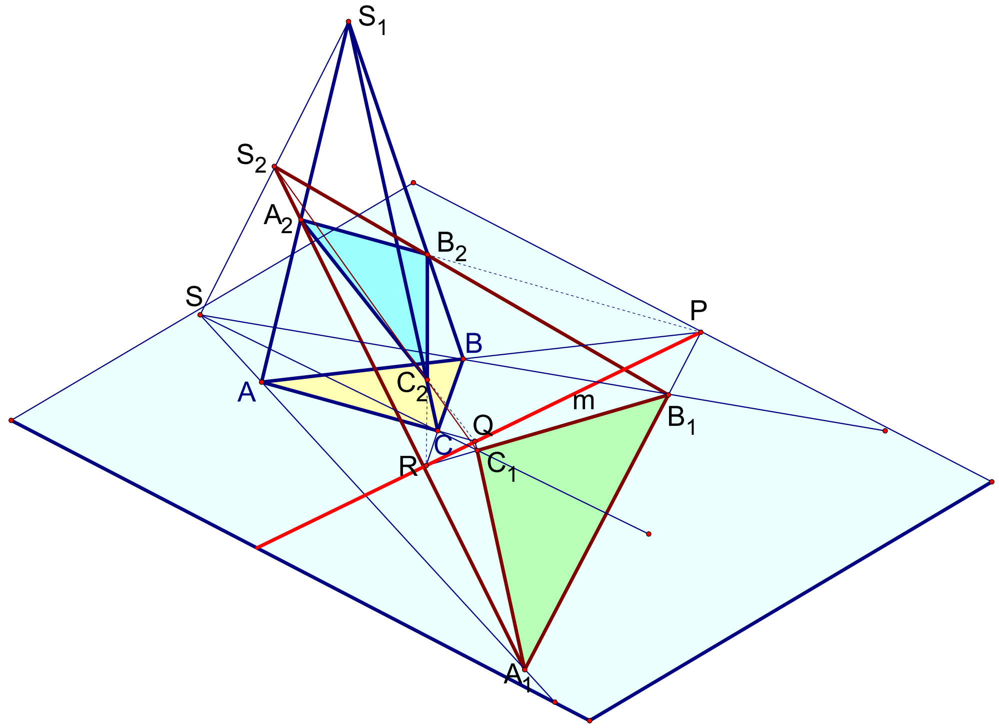


Рис. 70

Наличие «живого» чертежа позволяет лектору обосновать подмеченную студентами закономерность, опираясь при этом не только на самый мощный аргумент – логическую строгость и безупречность математического доказательства, но и на визуальные и динамические возможности среды «Живая геометрия». Ухватившись мышкой за точку S_1 и перемещая ее по рабочему полю можно убедиться в том, что это не влечет за собой изменения положения оси перспективы треугольников.

Аналогичный вывод можно сделать, если перемещать по прямой SS_1 точку S_2.

С помощью среды «Живая геометрия» можно решить аналогичную задачу и при определении координат точек на проективной плоскости и проективной прямой. Как известно, далеко не все студенты четко понимают не только механизм определения проективных координат точек, но и корректность этого механизма. Изменение с помощью мыши положения точки S, выбор других векторов, порождающих вершины проективного репера плоскости, не приводит к изменению координат произвольной точки X, значения которых выведены на экран компьютера (рис. 71).

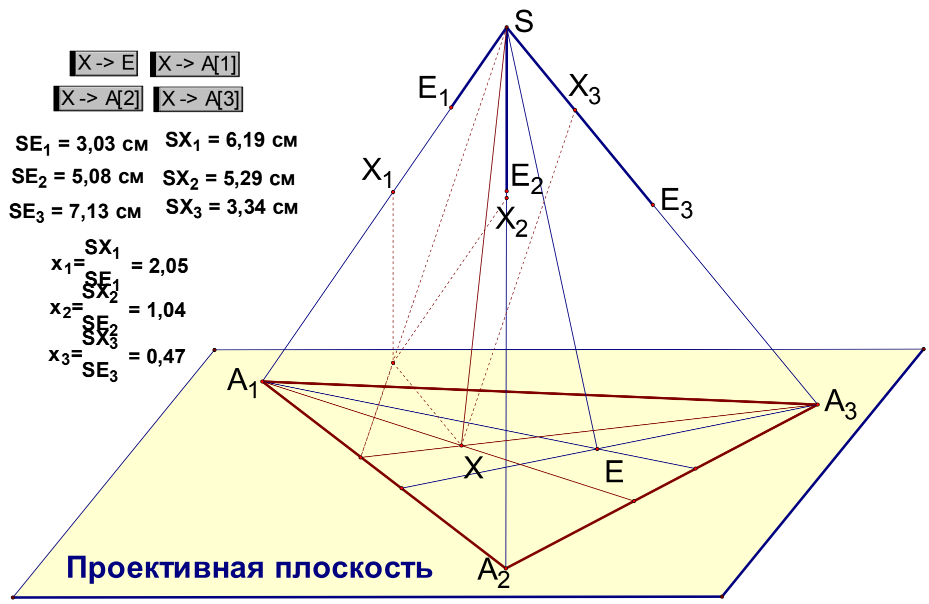


Рис. 71

Практические занятия. На практических занятиях не планируется использование информационных технологий.

Лабораторно-практические занятия. Предполагается проведение одного лабораторно-практического занятия, посвященного решению задач элементарной геометрии на применение теоремы Дезарга в одной из систем динамической геометрии. В качестве примера приведем следующую задачу.

Задача. *Доказать, что если в четырехугольник ABCD вписана трапеция KLMN, параллельные стороны KL и MN которой параллельны диагонали AC четырехугольника, то непараллельные стороны KN и LM трапеции пересекаются на диагонали BD.*

Решение задачи сопровождается построением динамического чертежа (рис. 72), с помощью которого удается найти два дезарговых треугольника KBL и *NMD*, имеющих ось перспективы *AC*. По теореме обратной к теореме Дезарга эти треугольники имеют центр перспективы S, причем непараллельные стороны *KN* и *LM* трапеции и ее диагональ *BD* представляют собой прямые, проходящие через соответственные вершины дезарговых треугольников.

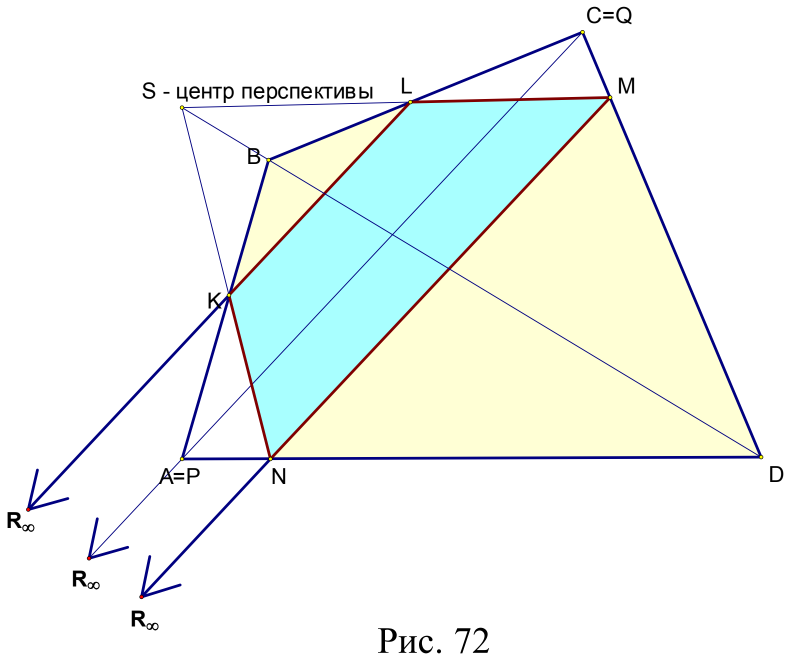


Рис. 72

Система динамической геометрии позволяет решение задачи предварить исследованием свойств вписанных в четырехугольник трапеций, параллельные стороны которых параллельны одной из диагоналей четырехугольника. Ухватимся мышкой за ту вершину трапеции, которая при построении была выбрана произвольно на сторонах четырехугольника (допустим *K*), и начнем изменять ее положение. Студенты должны сами обратить внимание на особенность взаимного расположения трех прямых *KN*, *LM* и *BD*, о которых идет речь в заключении задачи.

Лабораторные занятия не планируются.

Самостоятельная работа студентов. По мотивам использования среды «Живая геометрия» на лекциях и лабораторно-практических занятиях можно предложить студентам следующие задания для самостоятельного выполнения:

1. Решить серию задач элементарной геометрии на применение прямой и обратной теорем Дезарга с использованием систем динамической геометрии, в частности:

– доказать, что если на каждой стороне одного параллелограмма расположено по одной вершине другого параллелограмма, то оба параллелограмма имеют общий центр симметрии;

– доказать, что медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

2. Используя среду «Живая геометрия», построить геометрическую конфигурацию, позволяющую по трем упорядоченным точкам одной прямой (реперу прямой) определять координаты произвольной точки X этой прямой. Математически обосновать независимость координат точки X от вида конфигурации, проиллюстрировать это обоснование с помощью среды «Живая геометрия».

3. Используя среду «Живая геометрия», построить компьютерную геометрическую конфигурацию, позволяющую для любой упорядоченной четверки точек A, B, C, D одной прямой, определять их сложное отношение (AB, CD). Математически обосновать независимость величины (AB, CD) от вида геометрической конфигурации, проиллюстрировать это обоснование в среде «Живая геометрия».

4. Используя среду «Живая геометрия», построить геометрическую конфигурацию, позволяющую проиллюстрировать инвариантность сложного отношения четырех точек прямой относительно произвольного центрального проектирования.

5. Используя среду «Живая геометрия», разработать компьютерное сопровождение доказательства теоремы о гармонических свойствах полного четырехвершинника.

6. Используя среду «Живая геометрия», построить с помощью одной (виртуальной) линейки четвертую гармоническую точку к трем данным точкам одной прямой.

Тема. Проективные преобразования

В теме рассматриваются следующие вопросы: проективные преобразования. Гомология. Компьютерная визуализация проективных преобразований. Проективные и перспективные отображения прямых и пучков.

На изучение темы отводится 8 часов лекций, 6 практических и 2 часа лабораторно-практических занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении: лекция, практическое или лабораторно-практическое занятие, самостоятельная работа студентов.

Лекции. Предполагается использование на лекциях систем динамической геометрии как средства визуализации проективных преобразований и отображений, в частности:

- для демонстрации действия гомологий, других проективных преобразований проективной плоскости на тех или иных геометрических фигурах;

- для построения одной линейкой образа точки при проективном отображении одной прямой на другую, заданном тремя парами соответственных точек;

- для построения одной линейкой образа прямой при проективном отображении одного пучка прямых на другой, заданном тремя парами соответственных прямых.

Практические занятия. На практических занятиях не планируется использование информационных технологий.

Лабораторно-практические занятия. Предполагается проведение одного лабораторно-практического занятия, посвященного самостоятельному построению студентами в среде «Живая геометрия» образов фигур при проективных преобразованиях и отображениях. гомологии, а также образа точки (прямой) при проективном отображении прямой (пучка) на прямую (пучок). В качестве примера приведем следующие задачи.

Задача 1. *Гомология задана центром S, осью s и парой соответственных точек A и A′. Используя среду «Живая геометрия», построить образы многоугольника и эллипса под действием заданной гомологии.*

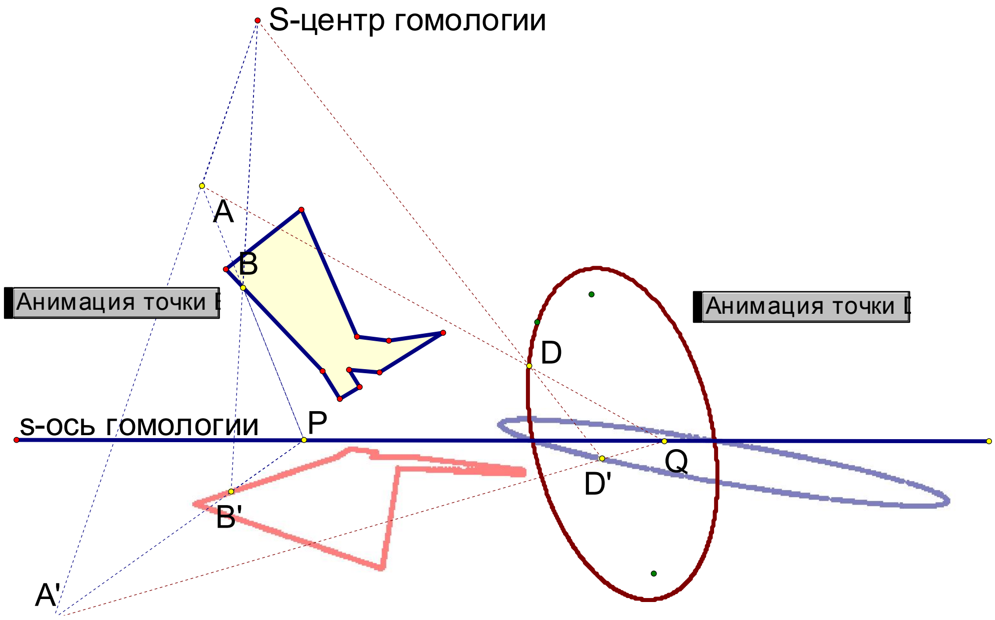


Рис. 73

Решение задачи сопровождается построением динамического чертежа. Строится прямая *s* – ось гомологии, точка *S* – центр гомологии, точка *A*, прямая *SA*, на которой выбирается произвольная точка *A′*. Прямая *SA* прячется, строятся пунктирные отрезки SA и AA'. Итак, гомология задана (рис. 73).

Изобразим теперь замкнутую ломаную линию, состоящую из десяти отрезков. Чтобы ломаная стала многоугольником необходимо окрасить ее внутреннюю область (команда «Внутренняя область»). После этого появляется возможность с помощью команды «Поместить новую точку на объект» построить на многоугольнике произвольную точку B, которая будет свободно перемещаться по всем его сторонам. Используя выведенные на лекции свойства гомологии, строим образ B' точки B, задаем для B' опцию «Оставлять след», а для B – опцию «Анимация». После запуска анимации точка B' вычертит многоугольник, который будет представлять собой образ данного десятиугольника.

Аналогично строится образ эллипса. Отметим лишь, что для построения самого эллипса в среде «Живая геометрия» необходимо создать собственный инструмент пользователя, применяя для этого определение эллипса как геометрического места точек, удовлетворяющего определенным условиям.

Задача 2. *Проективное отображение точек одной прямой на точки другой прямой задано тремя парами соответственных точек $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. Используя среду «Живая геометрия», построить с помощью одной линейки образ M' четвертой точки M этой прямой.*

Построение динамического чертежа (рис. 74) в среде «Живая геометрия» начинается с изображения произвольных прямых m и m', на первой из них выбираются произвольные точки A, B, C и M, на второй – произвольные точки A', B' и C'. Далее в соответствии с теорией, изложенной на лекции, с помощью одной линейки строится образ точки M: проводится через точки A и A' прямая n, на ней выбираются произвольные точки 1 и 2, находится точка 3 пересечения двух прямых, одна из которых проходит через 1 и B, вторая – через 2 и B'. Аналогично строится точка 4.

Через точки 3 и 4 проводится прямая (34), затем строится точка 5 как пересечение (34) и прямой, проходящей через точки 1 и M. С помощью точки 5 легко получить искомую точку M' (на рис. 73 для компактности и наглядности все прямые заменены отрезками).

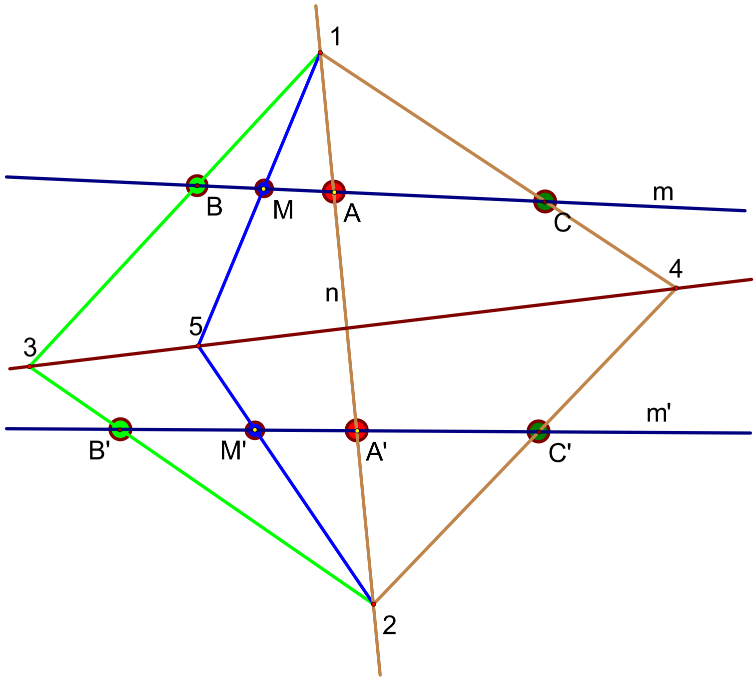


Рис. 74

Перемещая с помощью мыши подходящие точки и прямые на динамическом чертеже, студент имеет возможность получить визуальное подтверждение доказанному на лекции факту о том, что образ точки M не зависит от выбора точек 1 и 2 на прямой n. В отличие от этого изменение положения на прямых m и m' любой из заданных условием задачи точек A, B, C и A', B', C' влечет за собой изменение положения точки M'.

Задача 3. *Проективное отображение прямых одного пучка (S) на прямые другого пучка (S′) задано тремя парами соответственных прямых* $a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$. *Используя среду «Живая геометрия», построить с помощью одной линейки образ* m' *четвертой прямой* m *пучка (S).*

Поскольку задача 3 двойственна предыдущей задаче, то ее решение, построение динамического чертежа (рис. 75), а также исследование выполняются по аналогии с задачей 2.

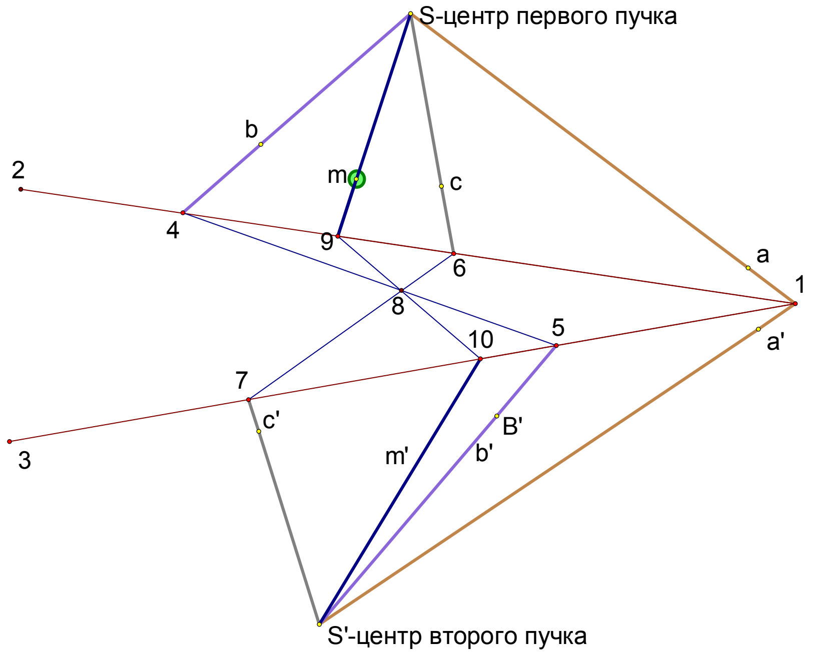


Рис. 75

Лабораторные занятия не предусматриваются.

Самостоятельная работа студентов, посвященная изучению свойств проективных преобразований и отображений средствами информационных технологий, предполагается в рамках тематики, очерченной лабораторно-практическим занятием. Используя динамические чертежи к задачам 1-3, можно предложить серию микроисследований, связанных с различными способами задания гомологий в случае, если:

а) центр S гомологии принадлежит оси гомологии;

б) центр S гомологии не принадлежит оси гомологии;

в) точки A и A' лежат по одну сторону относительно оси гомологии;

г) точки A и A' лежат по разные стороны относительно оси гомологии;

д) точки A и B лежат по одну сторону относительно оси гомологии;

е) точки A и B лежат по разные стороны относительно оси гомологии,

где A и A' - пара соответственных точек, определяющих гомологию, B – произвольная точка плоскости, образ которой необходимо найти.

Можно провести исследования, связанные с нахождением образов фигур под действием композиции двух и более гомологий, конструктивным методом нахождения у этих композиций неподвижной точки и т.д.

Тема. Линии второго порядка на проективной плоскости

В теме рассматриваются следующие вопросы: определение линии второго порядка, пересечение с прямой, касательные. Сопряженность точек, полюс и поляра. Классификация линий второго порядка. Теоремы Штейнера, Паскаля и Брианшона.

На изучение темы отводится 12 часов лекций, 6 – практических, 2 – лабораторно-практических и 2 – лабораторных занятия.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении: лекция, практическое, лабораторно-практическое или лабораторное занятие, самостоятельная работа студентов.

Лекции. На лекциях предполагается показ демонстрационных файлов, связанных с исследованием линий второго порядка, построением поляр и полюсов, касательных, автополярных треугольников, вписанных и описанных шестивершинников.

Лабораторно-практические занятия. Предполагается проведение двух лабораторно-практических занятий, в том числе с использованием одной из систем динамической геометрии.

Первое занятие планируется посвятить решению конструктивных задач, связанных с построением виртуальной линейкой следующих объектов:

1) поляры (по заданному полюсу, лежащему вне овальной линии второго порядка, на овальной линии, внутри нее),

2) полюса (по заданной поляре);

3) касательной (по заданной точке, лежащей вне овальной линии второго порядка, на овальной линии).

На втором лабораторно-практическом занятии предполагается обсудить решение задач на применение прямой и обратной теорем Паскаля и Брианшона, их предельных случаев.

Лабораторные занятия. По этому разделу предполагается проведение одного лабораторного занятия, посвящённого выполнению лабораторной работы № 6.1.

Лабораторная работа № 6.1 «Построение линий второго порядка в одной из систем динамической математики».

Организация работы: проводится в форме учебного проекта № 6.1.1, который выполняется одновременно всеми студентами. Преподаватель участвует в проекте в качестве консультанта.

Учебные цели: научиться применять теоретические положения проективной геометрии, основные факты теории кривых второго порядка, прямые и обратные теоремы Штейнера и Паскаля при компьютерном моделировании эллипса, гиперболы и параболы, построении соответствующих изображений на экране компьютера.

Учебный проект № 6.1.1 «Построение одной линейкой линий второго порядка». На проективной плоскости задано пять точек общего положения. Используя теорему Штейнера (или теорему Паскаля), построить в среде «Живая геометрия» изображение линии второго порядка как след движущейся точки, содержащий заданные точки. Расположить заданные точки так, чтобы линия второго порядка представляла собой эллипс, гиперболу, параболу. Создать собственный инструмент построения линии второго порядка по заданным на ней пяти точкам.

Способ выполнения проекта будет зависеть от теоремы, которую предполагается использовать при построении линии второго порядка. Для определенности выберем теорему Штейнера. В этом случае выполнение проекта можно разбить на следующие три этапа.

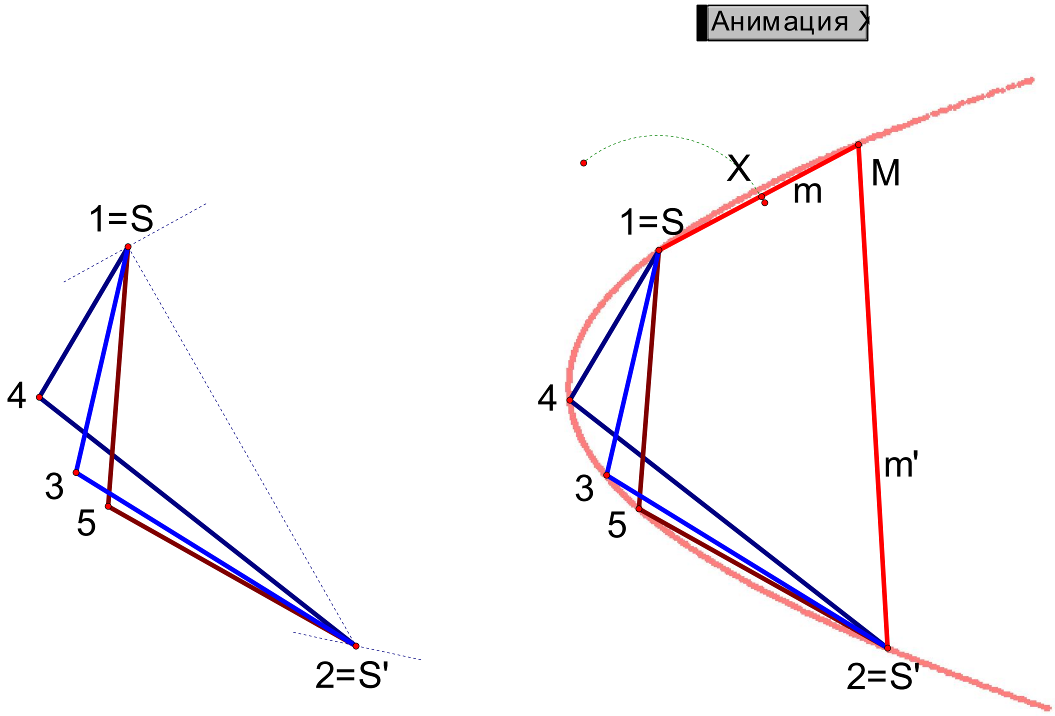
ЭТАП №1. На экране персонального компьютера построить изображение пяти точек общего положения, выбрать центры S и S' двух пучков прямых, задать проективное отображение пучка (S) на пучок (S') так, чтобы пять пар соответственных прямых этого отображения пересекались по заданным точкам.

ЭТАП №2. К построенной на предыдущем этапе геометрической конфигурации добавить изображение произвольной прямой m, принадлежащей пучку (S), построить образ m' этой прямой под действием заданного на этапе №1 проективного отображения, найти точку M пересечения прямых m и m'. Изменяя положение m, построить след точки M.

ЭТАП №3. Изменяя расположение заданных точек, добиться того, чтобы траектория точки M представляла собой эллипс, гиперболу, параболу. Используя построенную конфигурацию и возможности среды «Живая геометрия», создать собственный инструмент построения линии второго порядка по заданным на проективной плоскости пяти точкам общего положения.

Приведем краткое описание одного из вариантов выполнения проекта.

Выполнение ЭТАПА №1. Построим на рабочем поле среды «Живая геометрия» пять точек общего положения, обозначим их 1, 2, 3, 4 и 5. В качестве центров S и S' искомых пучков выберем любые две из построенных точек, допустим точки 1 и 2, соответственно (рис. 76 а)). Проективное отображение пучка (S) на пучок (S') зададим следующими парами соответственных прямых: (13)→(23), (14)→(24), (15)→(25). На лекциях доказывалось, что проективное отображение однозначно определяется таким количеством пар соответственных прямых. Пары прямых подобраны так, точка 3 является пересечением прямых (13) и (23), точка 4 – пересечением (14) и (24), точка 5 – пересечением (15) и (25). Так как прямая (12) принадлежит обоим пучкам, то точка 1 является пересечением прямой (12) со своим прообразом, а точка 2 – пересечением прямой (12) со своим образом.



а) б)

Рис. 76

Выполнение ЭТАПА №2. Чтобы обеспечить управляемую анимацию некоторой прямой пучка (S), построим произвольную окружность (на рис. 76 б) изображена пунктирная дуга этой окружности) с центром в точке S. Выберем на этой окружности точку X, построим для нее кнопку «Анимация», в качестве m возьмем прямую SX. Алгоритм построения образа m' прямой m обсуждался на лекции и лабораторно-практическом занятии при решении задачи №3. Реализуем этот алгоритм в нашем случае, опустив сам процесс построения. Спрячем вспомогательные прямые и точки, заменим для компактности чертежа прямые (13), (14), (15), (23), (24), (25), m и m' отрезками. Задав для точки M опцию «Оставлять след», а для точки X – «Анимация», мы получим изображение параболы, представленное на рисунке 76 б).

Выполнение ЭТАПА №3. Меняя расположение заданных пяти точек, можно получить изображения всех невырожденных линий второго порядка. Для того, чтобы создать собственный инструмент, необходимо построить требуемое множество, но не как след движущейся точки, а как реально существующую линию. В нашем случае его удобно строить как геометрическое место точки *M*. В среде «Живая геометрия» предусмотрена такая возможность. Для ее реализации с построенной на предыдущем этапе конфигурацией необходимо выполнить следующие действия:

– стереть след точки *M* с помощью команды «Стереть следы» меню команд «Вид» горизонтальной панели;

– подсветить сначала точку *X*, затем точку *M*, обратиться к команде «Геометрическое место точек» (меню «Построения»); на рабочем поле появится изображение соответствующей линии;

– спрятать все вспомогательные элементы конфигурации кроме данных пяти точек и построенной линии. Активировать нижнюю кнопку «Создание новых инструментов» на левой вертикальной панели, в раскрывшемся окне дать название новому инструменту, например, «Линия 2-го порядка по пяти точкам».

Программное обеспечение: системы динамической геометрии Qbasic или GeoGebra.

Самостоятельная работа студентов. Для самостоятельной работы по разделу «Линии второго порядка на проективной плоскости» студентам можно предложить следующие *учебные проекты и задания*:

1. Овальная линия задана пятью точками общего положения. Используя теорему Паскаля, построить в одной из систем динамической геометрии шестую точку линии.

2. Овальная линия задана пятью точками общего положения. Используя теорему Паскаля (предельный случай), построить в одной из систем динамической геометрии касательную к линии, проходящую через одну из данных точек.

3. Овальная линия задана четырьмя точками общего положения и касательной в одной из них. Используя теорему Паскаля (предельный

случай), построить в одной из систем динамической геометрии пятую точку линии.

4. Овальная линия задана четырьмя точками общего положения и касательной в одной из них. Используя теорему Паскаля (предельный случай), построить в одной из систем динамической геометрии вторую касательную, проходящую через одну из оставшихся данных точек.

5. Овальная линия задана тремя неколлинеарными точками и двумя касательными в двух из них. Используя теорему Паскаля (предельный случай), построить в одной из систем динамической геометрии четвертую точку линии.

6. Овальная линия задана тремя неколлинеарными точками и двумя касательными в двух из них. Используя теорему Паскаля (предельный случай), построить в одной из систем динамической геометрии касательную в третьей точке.

7. Овальная линия задана пятью касательными. Используя теорему Брианшона, построить в одной из систем динамической геометрии шестую касательную.

8. Овальная линия задана пятью касательными. Используя теорему Брианшона (предельный случай), построить в одной из систем динамической геометрии точку касания одной из них.

9. Овальная линия задана четырьмя касательными и точкой касания одной из них. Используя теорему Брианшона (предельный случай), построить в одной из систем динамической геометрии пятую касательную.

10. Овальная линия задана четырьмя касательными и точкой касания одной из них. Используя теорему Брианшона (предельный случай), построить в одной из систем динамической геометрии точку касания другой касательной.

11. Овальная линия задана тремя касательными и двумя точками касания двух из них. Используя теорему Брианшона (предельный случай),

построить в одной из систем динамической геометрии четвертую касательную.

12. Овальная линия задана тремя касательными и двумя точками касания двух из них. Используя теорему Брианшона (предельный случай), построить в одной из систем динамической геометрии точку касания третьей касательной.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: все задания и учебные проекты относятся к традиционным разделам модуля «Проективная геометрия» основного курса геометрии.

Базовые знания: знание основных положений теории кривых второго порядка на проективной плоскости, методов построения одной линейкой, знание конструктивных, метрических, анимационных и исследовательских возможностей систем динамической геометрии.

Основные преимущества использования информационных технологий при изучении рассматриваемой темы. Применение информационных технологий позволяет:

– обучить студентов при исследовании линий второго порядка использовать возможности систем динамической геометрии;

– закрепить умение использовать систему динамической геометрии как виртуальную лабораторию для организации и проведения исследовательской деятельности по геометрии;

– научить студентов быстро и эффективно готовить красочный демонстрационный материал с элементами анимации по теме линии второго порядка.

Тема. Методы изображений, основанные на центральном проектировании

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: центральное проектирование, его простейшие инварианты. Линейная перспектива. Вычислительный метод построения изображений пространственных фигур при центральном проектировании. Методы компьютерного моделирования фигур с помощью центрального проектирования.

На изучение темы отводится 4 часов лекций, 2 часа практических занятий и 2 часа лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении: лекция, практическое или лабораторное занятие, самостоятельная работа студентов.

Лекции. На лекциях необходимо вывести формулы, позволяющие по координатам точек оригинала находить координаты их центральной проекции.

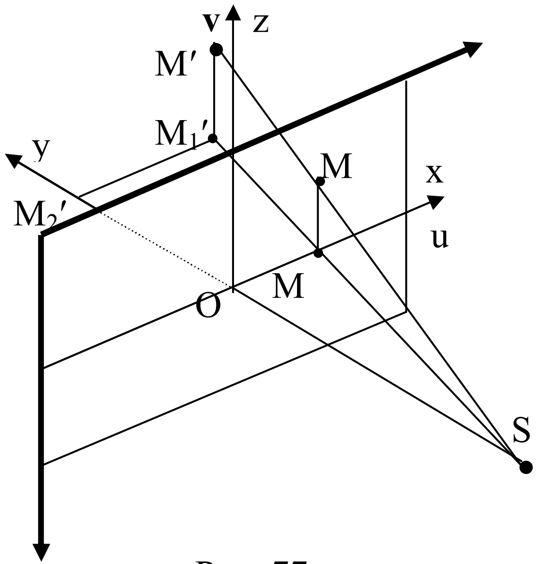


Рис. 77

Выберем для этой цели систему координат *Oxyz* так, чтобы начало координат совпало с центром экрана дисплея, ось *Ox* расположилась горизонтально, ось *Oz* – вертикально, а ось *Oy* оказалась направленной вглубь экрана (рис. 77). Поместим на отрицательной полуоси ординат *Oy* центр перспективы *S*, расстояние от центра перспективы до экрана обозначим через *F*. Выберем в плоскости экрана пользовательскую систему координат *Ouv* так, чтобы оси *Ou* и *Ov* совпадали с осями *Ox* и *Oz*, соответственно.

Если изображаемая точка M' имеет координаты (x, y, z) а её изображение на экране дисплея точка M – координаты (u, v), тогда из подобия пар треугольников SOM_1, $SM_2'M_1'$ и SM_1M, $SM_1'M'$ получаем следующие формулы, позволяющие вычислить координаты точки M:

$$u = \frac{Fx}{y+F} \text{ и } v = \frac{Fz}{y+F}.$$

Если перейти к экранной системе координат и обозначить через m, как обычно, масштаб изображения, мы получим следующие формулы:

$$u = \frac{m \cdot F \cdot x}{m \cdot y + F} + 320\ ,\ v = -\frac{m \cdot F \cdot z}{m \cdot y + F} + 175\,.$$

В качестве примера на лекции можно рассмотреть изображение прямоугольного параллелепипеда.

```
REM параллелепипед в линейной перспективе
 SCREEN 9: f = 400: m = 86: x0 = -25: y0 = -100: z0 = 45
  DATA 0,0,28, 48,0,28, 48,68,28, 0,68,28, 0,0,0, 48,0,0, 48,68,0, 0,68,0
  FOR i = 1 TO 8: READ x(i), y(i), z(i): NEXT i
 DATA 1,2, 2,3, 3,4, 4,1, 5,6, 6,7, 7,8, 8,5, 1,5, 2,6, 3,7, 4,8
 FOR i = 1 TO 12: READ a, b
 x = x(a): y = y(a): z = z(a): GOSUB uv: u1 = u: v1 = v
 x = x(b): y = y(b): z = z(b): GOSUB uv: LINE (u1, v1)-(u, v)
 NEXT i: GOTO en
uv: x = x - x0: z = z - z0: y = y - y0
   u = m * x * f / (y * m + f) + 320
   v = -m * z * f / (y * m + f) + 175: RETURN
en: SLEEP
```

В этой программе (x_0, y_0, z_0) – координаты точки, в которой находится центр проектирования. В третьей строке вводятся координаты вершин изображаемого параллелепипеда. В следующей строке координаты вершин вносятся в массивы $x(i)$, $y(i)$, $z(i)$. В пятой строке вводятся номера 12 пар вершин параллелепипеда, которые соединяются между собой рёбрами. В следующей строке номера этих пар считываются, вычисляются соответствующие им экранные координаты, которые и соединяются рёбрами.

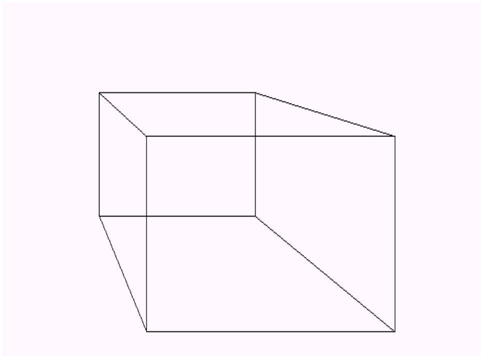


Рис. 78

На рисунке 78 приведено соответствующее изображение.

Практические занятия. На практическом занятии желательно обсудить традиционные методы изображения фигур в линейной перспективе. Для подготовки студентов к выполнению третьей лабораторной работы необходимо рассмотреть вопросы, связанные с изображением комнаты и некоторых предметов её обстановки в линейной перспективе, составить основные подпрограммы построения при центральном проектировании точек, отрезков, окружностей и других кривых.

Лабораторные занятия. По этой теме предполагается проведение одного лабораторного занятия, посвящённого выполнению лабораторной работы *№ 6.2.*

Лабораторная работа № 6.2 «Фигуры в линейной перспективе».

Организация работы: проводится в форме учебного проекта № 6.2.1 при самостоятельной работе творческих коллективов. Преподаватель на разных его этапах выполняет различные функции.

Учебная цель: научиться применять координатный метод и основные положения теории центрального проектирования при построении на дисплее изображений фигур в линейной перспективе.

Учебный проект № 6.2.1 «Комната». Построить на экране компьютера изображение комнаты и некоторых объектов её обстановки в линейной перспективе.

Выполнение проекта можно разбить на следующие три этапа:

ЭТАП №1. Составить следующие подпрограммы, необходимые для выполнения проекта: вычисление координат точки; изображение точки; изображение отрезка; изображение окружности; изображение линий, заданных параметрически и в полярных координатах; окраски внутренней области замкнутой линии (выполняется всей группой под руководством преподавателя).

ЭТАП №2. Изобразить комнату и её основные элементы: пол, стены, потолок, окна, дверь (выполняют творческие коллективы, преподаватель консультирует).

ЭТАП №3. Изобразить остальную обстановку в комнате (выполняют творческие коллективы, преподаватель консультирует).

Обсудим вариант выполнения первых двух этапов проекта.

Выполнение ЭТАПА №1. Составим сначала основные подпрограммы, которые потребуются в дальнейшем при выполнении последних двух этапов проекта.

1. Подпрограмма вычисления координат проекции точки при центральном проектировании.

Студенты могут воспользоваться подпрограммой, составленной на лекции преподавателем. Приведём её:

```
uv: x = x - x0: y = y - y0: z = z - z0
   u = m * x * f / (y * m + f) + 320
   v = -m * z * f / (y * m + f) + 175: RETURN
```

Отметим лишь, что в первой строке фигурируют координаты (x_0, y_0, z_0) точки, в которой находится центр проектирования. Эту точку можно менять, что повлечёт за собой изменение изображения. Необходимо обратить внимание студентов на то, что при изображении линий, заданных, например, в виде $x=x(t)$, $y=y(t)$, лучше всего в самой программе использовать запись $x_1=x(t)$ и $y_1=y(t)$. Однако перед тем, как обратиться к подпрограмме **uv**, необходимо переобозначить переменные: $x=x_1$: $y=y_1$.

2. Подпрограммы изображения отрезка. Студентам желательно порекомендовать составить две подпрограммы. Первая из них изображает отрезок цвета cg по координатам его концов (xa, ya, za) и (xb, yb, zb):

```
otrez1: x = xa: y = ya: z = za: GOSUB uv: u1 = u: v1 = v
    x = xb: y = yb: z = zb: GOSUB uv: LINE (u1, v1)-(u, v), cg
    RETURN
```

Вторая подпрограмма изображает отрезок цвета cg по координатам всего одного его конца при условии, что вторым концом отрезка является точка, в которой находится курсор после выполнения последней графической команды:

```
otrez2: x = xa: y = ya: z = za: GOSUB uv: LINE -(u, v), cg: RETURN
```

3. Подпрограмма изображения окружности. Здесь предполагается составление подпрограмм, позволяющих в линейной перспективе изобразить три вида окружностей, одна из которых перпендикулярна оси абсцисс, другая – оси ординат и третья – оси аппликат. Приведём для примера подпрограмму изображения окружности цвета cg, заданной уравнениями: $x_1 = xa$, $y_1 = R\cos(t) + ya$, $z_1 = R\sin(t) + za$:

```
okrYZ: x1 = xa: FOR t = 0 TO 6.3 STEP .01
            y1 = r * COS(t) + ya: z1 = r * SIN(t) + za
            x = x1: y = y1: z = z1: GOSUB uv
            IF t = 0 THEN PSET (u, v), cg ELSE LINE -(u, v), cg
           NEXT t: RETURN
```

4. Подпрограмма «заливка краской». Эта подпрограмма позволяет по координатам точки, лежащей внутри замкнутой линии цвета cg, окрасить её внутреннюю область цветом ci:

```
zalivka: x = xc: y = yc: z = zc: GOSUB uv: PAINT (u, v), ci, cg: RETURN
```

5. Остальные подпрограммы каждый студент или творческий коллектив составляет в зависимости от того, какие фигуры изображаются в комнате.

Выполнение ЭТАПА №2. В первой строке поместим ремарку:

```
REM Комната в линейной перспективе
```

Во второй – зададим графический экран и определим некоторые параметры: f = 800 – расстояние от центра проектирования до экрана компьютера; m = 56 – масштаб изображения; x_0 = 24: y_0 = -50: z_0 = 14 – координаты нового начала прямоугольной системы координат, изменяя которые можно «посмотреть» на комнату из другой точки:

```
SCREEN 9: f = 800: m = 56: x0 = 24: y0 = -50: z0 = 14
```

Первоначально система координат будет выбрана по отношению к комнате следующим образом: начало координат находится в нижнем левом ближнем к нам углу (рис. 79), ось абсцисс расположена горизонтально, ось аппликат – вертикально, ось ординат – в глубь комнаты. Студентам предлагается изображать любую комнату, выбрав вполне определённый масштаб и придерживаясь его на протяжении всего проекта. В нашей программе предполагается, что ширина комнаты – 48 условных единиц, длина – 68, высота – 28. Задание новой системы координат означает, что линия горизонта (она определяется значением $z_0 = 14$) находится на половине высоты комнаты, наблюдение ведётся вдоль средней линии комнаты (она определяется значением $x_0 = 24$). «Близость» наблюдателя к комнате регулируется координатой $y_0 = -50$ и параметром $f = 800$.

В третьей строке зададим размерности массивов $x(i)$, $y(i)$, $z(i)$. С их помощью мы будем изображать основные элементы комнаты: саму комнату-параллелепипед и окно. Для этой цели нам потребуется 18 вершин. В этой же строке окрасим экран белым цветом 15 («сэкономим» на побелке квартиры).

```
DIM x(18), y(18), z(18): PAINT (320, 175), 15
```

Следующие три строки самые «нехудожественные». В этих строках вводятся координаты всех 18 вершин (8 вершин параллелепипеда и 10 точек на прямоугольнике окна и его переплётах). Чтобы избежать большого числа ошибок, необходимо сделать от руки чертёж комнаты, отметить оси выбранной системы координат и в соответствии с масштабом и размерами реальной комнаты находить необходимые координаты.

```
DATA 0,0,28, 48,0,28, 48,68,28, 0,68,28, 0,0,0, 48,0,0, 48,68,0, 0,68,0
DATA 12,68,23, 36,68,23, 36,68,10, 12,68,10, 20,68,23
DATA 20,68,10, 28,68,23, 28,68,10, 28,68,19, 36,68,19
```

В следующей строке внесём все эти координаты в соответствующие массивы:

```
FOR i = 1 TO 18: READ x(i), y(i), z(i): NEXT i
```

Введём теперь номера тех пар вершин, которые должны соединяться отрезками:

```
DATA 1,2, 2,3, 3,4, 4,1, 5,6, 6,7, 7,8, 8,5, 1,5, 2,6, 3,7, 4,8
DATA 9,10, 10,11, 11,12, 12,9, 13,14, 15,16, 17,18
```

В следующих трёх строках считаем эти пары, рассмотрим соответствующие им координаты точек

```
FOR i = 1 TO 19: READ a, b
 x = x(a): y = y(a): z = z(a): GOSUB uv: u1 = u: v1 = v
 x = x(b): y = y(b): z = z(b): GOSUB uv: LINE (u1, v1)-(u, v), 0
 NEXT i: GOTO start
```

В конце четвёртой строки идёт обращение к строке с меткой **start,** начиная с которой будут изображаться различные предметы из обстановки комнаты. Однако до этого идёт блок подпрограмм, составленных на втором этапе. Приведём их:

```
REM подпрограмма вычисления экранных координат
uv: x = x - x0: y = y - y0: z = z - z0
   u = m * x * f / (y * m + f) + 320
   v = -m * z * f / (y * m + f) + 175: RETURN
REM две подпрограммы построения отрезков
otrez1: x = xa: y = ya: z = za: GOSUB uv: u1 = u: v1 = v
 x = xb: y = yb: z = zb: GOSUB uv: LINE (u1, v1)-(u, v), cg: RETURN
otrez2: x = xa: y = ya: z = za: GOSUB uv: LINE -(u, v), cg: RETURN
REM подпрограмма построения окружности
okrYZ: x1 = xa: FOR t = 0 TO 6.3 STEP .01
  y1 = r * COS(t) + ya: z1 = r * SIN(t) + za
  x = x1: y = y1: z = z1: GOSUB uv
  IF t = 0 THEN PSET (u, v), cg ELSE LINE -(u, v), cg
 NEXT t: RETURN
REM подпрограмма окраски замкнутой области
zalivka: x = xc: y = yc: z = zc: GOSUB uv: PAINT (u, v), ci, cg: RETURN
```

Выполнение ЭТАПА №3. На последнем этапе студенты обставляют комнату. Для этого не только нужно иметь художественный вкус, но и выполнять некоторые правила:

1. Первоначально изображаются и окрашиваются предметы, находящиеся на полу или стенах, при необходимости окрашивается пол, изображаются обои (для всевозможных узоров на обоях и коврах следует создать дополнительные подпрограммы, использующие циклы).

2. Первоначально изображаются и окрашиваются предметы, наиболее удалённые от пользователя, затем более близкие и т. д.

3. Если при изображении очередного предмета появляется необходимость окрасить его некоторым цветом, который уже присутствует на месте окраски, то необходимо сначала окрасить предмет новым для экрана цветом и лишь затем – требуемым.

4. В комнате можно поместить любую фигуру, которую студенты строили на предыдущих лабораторных занятиях методом параллельного проектирования. Для этого составляются соответствующие подпрограммы.

В качестве примера приведём рабочий модуль программы, который начинается со строки, имеющей метку **start.**

```
start: REM покраска пола
xc = 24: yc = 20: zc = 0: ci = 6: cg = 0: GOSUB zalivka
REM изображение шкафа
xa = 0: ya = 20: za = 0: xb = 7: yb = 20: zb = 0: cg = 8: GOSUB otrez1
xa = 7: ya = 20: za = 20: cg = 8: GOSUB otrez2
xa = 0: ya = 20: za = 20: cg = 8: GOSUB otrez2
xa = 0: ya = 20: za = 0: cg = 8: GOSUB otrez2
xc = 5: yc = 20: zc = 10: ci = 7: cg = 8: GOSUB zalivka
xa = 7: ya = 20: za = 0: xb = 7: yb = 60: zb = 0: cg = 8: GOSUB otrez1
xa = 7: ya = 60: za = 20: cg = 8: GOSUB otrez2
xa = 7: ya = 20: za = 20: cg = 8: GOSUB otrez2
xc = 7: yc = 25: zc = 10: ci = 7: cg = 8: GOSUB zalivka
xa = 7: ya = 33: za = 0: xb = 7: yb = 33: zb = 20: cg = 8: GOSUB otrez1
xa = 7: ya = 46: za = 0: xb = 7: yb = 46: zb = 20: cg = 8: GOSUB otrez1
REM изображение стола
xa = 38: ya = 40: za = 8: xb = 38: yb = 40: zb = 0: cg = 8: GOSUB otrez1
xa = 48: ya = 40: za = 0: cg = 8: GOSUB otrez2
xa = 48: ya = 40: za = 8: cg = 8: GOSUB otrez2
```

```
xa = 38: ya = 40: za = 8: cg = 8: GOSUB otrez2
xa = 38: ya = 68: za = 8: cg = 8: GOSUB otrez2
xa = 48: ya = 68: za = 8: cg = 8: GOSUB otrez2
xa = 48: ya = 40: za = 8: cg = 8: GOSUB otrez2
xa = 38: ya = 68: za = 8: xb = 38: yb = 68: zb = 0: cg = 8: GOSUB otrez1
xa = 41.5: ya = 68: za = 0: cg = 8: GOSUB otrez2
xc = 42: yc = 40: zc = 5: ci = 7: cg = 8: GOSUB zalivka
xc = 42: yc = 50: zc = 8: ci = 7: cg = 8: GOSUB zalivka
xc = 39: yc = 68: zc = 3: ci = 7: cg = 8: GOSUB zalivka
REM изображение зеркала
xa = 48: ya = 20: za = 16: r = 7: cg = 2: GOSUB okrYZ
xc = 48: yc = 20: zc = 16: ci = 11: cg = 2: GOSUB zalivka
en: SLEEP
```

В результате выполнения этой программы на экране компьютера

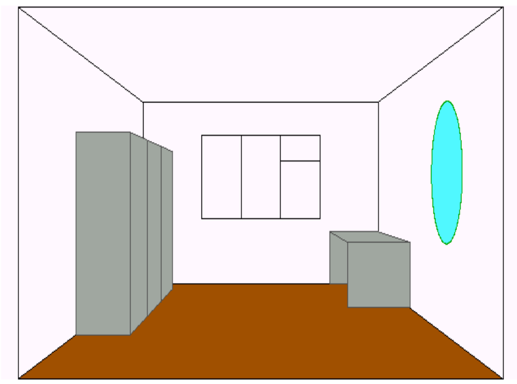


Рис. 79

появится изображение, представленное на рисунке 79.

Программное обеспечение: среда Qbasic.

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой при центральном проектировании; изображения стандартных линий и поверхностей: точки, отрезка, окружности, сферы, линий, заданных параметрически и в полярных координатах; окраски внутренней области замкнутой линии.

Самостоятельная работа студентов. Для самостоятельной работы во внеучебное время студентам можно предложить следующие учебные проекты и задания для индивидуального выполнения:

– изобразить на стенах комнаты различные бордюры, узоры на ковре, обоях и т.д. Создать программу перемещения пользователя по комнате (не имеющей никакой обстановки), меняя линию горизонта и фокальное расстояние. Построить программу изображения различных помещений учебного корпуса ИМФИ, перемещения по этим помещениям.

– построить на дисплее изображения двух-трёх вращающихся многогранников: правильных, усечённых и «звёздчатого» типа в линейной перспективе;

– построить на экране дисплея все типы поверхностей второго порядка в линейной перспективе;

– построить на дисплее изображение тора в линейной перспективе.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: подробно изучаются методы построения изображений с помощью центрального проектирования, включая вычислительный метод, закрепляется параметрический способ задания поверхностей и линий в пространстве, методы их изображений.

Базовые знания: знание геометрии простейших поверхностей и линий в пространстве, методов аналитической геометрии, параметрических уравнений различных плоских и пространственных кривых, основных законов построения изображений при центральном проектировании, графических средств языка программирования высокого уровня и пакета символьных преобразований.

Основные преимущества использования компьютерных технологий при изучении рассматриваемой темы. Применение компьютерных технологий позволяет:

– обучить студентов при построении изображений на основе центрального проектирования использовать мощные вычислительные методы;

– установить связь между аналитическим заданием простейших фигур пространства и их изображением при центральном проектировании;

– предоставить студентам материал для проведения школьного факультативного курса.

7.2. Модуль «Основания геометрии»

Приведём сначала содержание этого модуля и краткие комментарии к нему.

Модуль «Основания геометрии»: «Начала» Евклида. Проблема пятого постулата. Аксиоматический метод построения геометрии, требования к системе аксиом. *Методы автоматического доказательства геометрических утверждений.* Система аксиом Гильберта. Система аксиом Вейля. Системы аксиом, используемые в школьном курсе геометрии. Неевклидовы пространства. Геометрия Лобачевского. Модели плоскости Лобачевского. Аффинное n-мерное пространство. Евклидово n-мерное пространство. *Методы компьютерного моделирования многомерных геометрических объектов.*

<u>Комментарии к модулю</u>. При изучении темы «Методы автоматического доказательства геометрических утверждений» предполагается обсудить возможности языков программирования и математических пакетов в геометрических доказательствах.

При доказательстве непротиворечивости планиметрии Лобачевского предполагается рассмотреть две его модели – Кэли-Клейна и Пуанкаре и визуализировать их на экране компьютера.

Изучение модуля планируется в шестом семестре. Общее число аудиторных учебных часов – 72. Из них 36 часов лекций, 30 часов семинарских занятий, 2 часа лабораторно-практических, 4 часа лабораторных.

Рассмотрим теперь пути реализации концепции КПГ в темах и разделах шестого модуля.

Тема. Аксиоматическое построение геометрии

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: логическое построение геометрии, аксиоматический метод в «Началах» Евклида; развитие аксиоматического метода, проблема пятого постулата; аксиоматический метод построения геометрии, требования к системе аксиом: независимость, непротиворечивость, полнота; методы автоматического доказательства геометрических утверждений.

На изучение темы отводится 6 часов лекций, 2 часа семинарских занятий и 2 часа лабораторно-практических занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении: лекция, практическое занятие, лабораторное занятие или самостоятельная работа студентов.

Лекции. Рассказать об использовании систем искусственного интеллекта, логических языков программирования и пакетов символьных преобразований при доказательстве различных математических утверждений, в том числе геометрических.

К настоящему времени с помощью машинных методов заново доказаны некоторые теоремы геометрии, получены новые важные результаты. Для описания внешнего мира и поиска решений в задачах искусственного интеллекта используется язык и аппарат какой-либо логической системы. В языках программирования для ЭВМ имеются средства, позволяющие вычислять значения логических выражений, в которые входят логические операции. Такие возможности позволяют решать на ЭВМ достаточно сложные задачи логического анализа.

В качестве примера, иллюстрирующего применение компьютера как средства для автоматического доказательства теорем, на лекции можно рассмотреть пакет программ “GEOM” для решения задач на доказательство в планиметрии, разработанный на базе системы REDUCE (автор С.П. Царёв) и используемый в учебном процессе. В состав этого небольшого пакета входят процедуры, позволяющие решать некоторые планиметрические задачи.

Перечислим возможности этого пакета: точки задаются координатами и для этого используется оператор **point**; прямые задаются своими уравнениями, для этого используется оператор **line**; угол задаётся двумя прямыми (сторонами угла), для этого имеем оператор **angle**. При решении задач можно использовать следующие процедуры:

dtp - написание уравнения прямой по двум данным точкам;

koort - определить принадлежность точки данной прямой;

sis - нахождение точки пересечения двух прямых;

nur - написание уравнения прямой, перпендикулярной данной;

tser - нахождение координат точки, которая делит отрезок в данном отношении;

bissectr1, bissectr2 - написание уравнений прямых (биссектрис данных углов);

rmt - нахождение расстояния между двумя точками;

perenost - перенос точки на данный вектор;

perenosl - перенос прямой на данный вектор;

povorott - поворот точки на угол вокруг данной точки;

povopotp - поворот прямой на угол вокруг данной точки;

Приведём для примера описание процедуры **dtp**:

```
off echo;
let vkl=<<off exp$on gcd$>>,
    vykl=<<off gcd$on exp$>>,
    rec=<<symbolic reclaim()$>>,
    gc=<< symbolic setq(!*gc,t)$>>,
    ngc=<<symbolic setq(!*gc,nil)$>>$
gc$
```

```
operator line,point,vec,angle;
%Уравнение прямой по двум заданным точкам
procedure dtp(t1,t2);
begin scalar x1,y1,x2,y2,a2,b2,c2;
 x1:=part(t1,1);  y1:=part(t1,2); x2:=part(t2,1); y2:=part(t2,2);
 a2:=y2-y1; c2:=x2*y1-x1*y2; b2:=x1-x2; return line(a2,b2,c2); end;
```

Покажем как, используя эти процедуры, можно доказать, например, теорему Дезарга.

Теорема Дезарга. *Пусть для треугольников ABC и $A_nB_nC_n$ прямые, соединяющие вершины A и A_n, B и B_n, C и C_n, пересекаются в одной точке O. Тогда точки R, P, Q пересечения соответствующих сторон (AC и A_nC_n, AB и A_nB_n, BC и B_nC_n) лежат на одной прямой.*

Зададим координаты точек *A*, *B*, *C* и *O* (для простоты будем считать, что начало координат совпадает с точкой *O*):

```
a:=point(a1,a2); b:=point(b1,b2); c:=point(c1,c2); o:=point(0,0);
```

В качестве вершин A_n, B_n, C_n второго треугольника выберем произвольные точки на прямых, проходящих через вершины первого треугольника и точку *O*. Для этого сначала напишем уравнения этих прямых (процедура **dtp**), а затем применим процедуру **koort** (позволяет по первой координате точки и уравнению прямой найти точку, принадлежащую этой прямой):

```
oa:=dtp(o,a); ob:=dtp(o,b); oc:=dtp(o,c);
an:=koort(a11,oa); bn:=koort(b11,ob); cn:=koort(c11,oc);
```

Докажем, что прямые, проходящие через соответственные стороны, пересекаются в точках, принадлежащих одной прямой. Найдём координаты этих точек. Для этого воспользуемся процедурами **dtp** и **sis**, позволяющими найти уравнения соответственных прямых и координаты их точек пересечения:

```
ab:=dtp(a,b); bc:=dtp(b,c); ac:=dtp(a,c);
anbn:=dtp(an,bn); bncn:=dtp(bn,cn); ancn:=dtp(an,cn);
r:=sis(ancn,ac); p:=sis(anbn,ab); q:=sis(bncn,bc);
```

Через любые две из этих точек проведём прямую и проверим, удовлетворяют ли координаты третьей точки её уравнению. Если да, то теорема будет доказана.

Окончательно программа выглядит следующим образом:

```
in "geom"$ % считывание пакета "geom"
on gcd; % режим дополнительного упрощения
a:=point(a1,a2); b:=point(b1,b2); c:=point(c1,c2); o:=point(0,0);
oa:=dtp(o,a); ob:=dtp(o,b); oc:=dtp(o,c);
an:=koort(a11,oa); bn:=koort(b11,ob); cn:=koort(c11,oc);
ab:=dtp(a,b); bc:=dtp(b,c); ac:=dtp(a,c);
anbn:=dtp(an,bn); bncn:=dtp(bn,cn); ancn:=dtp(an,cn);
r:=sis(ancn,ac); p:=sis(anbn,ab); q:=sis(bncn,bc);
pr:=dtp(p,r);
m:=part(pr,1); n:=part(pr,2); v:=part(pr,3); x:=part(q,1); y:=part(q,2);
if m*x+n*y+v=0 then write "теорема доказана";
end;
```

Семинарские занятия не используются.

Лабораторно-практические занятия. Предполагается проведение одного лабораторно-практического занятия, посвященного решению задач абсолютной геометрии в одной из систем динамической геометрии.

Лабораторные занятия. По этой теме не предполагается проведение лабораторных занятий.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: студенты знакомятся с автоматическим способом доказательства геометрических утверждений с помощью персонального компьютера.

Базовые знания: знание аксиоматического метода построения геометрии.

Раздел «Геометрия Лобачевского»

В этом разделе рассматриваются следующие вопросы: некоторые факты абсолютной геометрии: сумма углов и дефект треугольника, теорема Лежандра, четырёхугольник Саккери; система аксиом планиметрии Лобачевского, простейшие следствия; параллельные и расходящиеся прямые; угол параллельности, эквидистанта и орицикл; модели Кэли-Клейна и Пуанкаре плоскости Лобачевского.

На изучение раздела отводится 20 часа лекций, 8 часов семинарских и 4 часа лабораторных занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал раздела, который тесно связан с реализацией концепции КПГ. Причём обсудим особенности изложения этого материала в зависимости от того, какая из основных форм нашей системы используется при его изучении.

Лекции: планируется познакомить студентов с моделями Кэли-Клейна (подробно) и Пуанкаре (обзорно) планиметрии Лобачевского, напомнить основные свойства проективных преобразований и инверсий плоскости.

При изложении материала, связанного с построением моделей, необходимо задать аналитически проективные преобразования расширенной евклидовой плоскости, отображающие круг радиуса 1 (абсолют) на себя (движения модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского) и инверсии плоскости (осевые симметрии модели Пуанкаре плоскости Лобачевского).

К движениям на модели Кэли-Клейна относятся, в первую очередь, повороты плоскости вокруг центра абсолюта:

$$x' = x \cdot \mathrm{COS}(fi) - y \cdot \mathrm{SIN}(fi): \;\; y' = x \cdot \mathrm{SIN}(fi) + y \cdot \mathrm{COS}(fi)$$

и осевые симметрии относительно прямых $Ax + By = 0$, проходящих через его центр:

$$x' = x + 2 \cdot t \cdot A, \; y' = y + 2 \cdot t \cdot B,$$

где $t = -(A \cdot x + B \cdot y) / (A^2 + B^2)$.

Кроме того, к движениям этой модели относится любая гармоническая гомология, центр и ось которой являются, соответственно, полюсом и полярой выбранного абсолюта. Если центр гомологии лежит на оси ординат, то уравнения, аналитически задающие это преобразование, имеют вид:

$$x' = \frac{x\sqrt{1-w^2}}{1+w\cdot y}\ ,\quad y' = \frac{y+w}{1+w\cdot y},\ \text{где } |w|<1.$$

Любое другое движение модели можно получить последовательным выполнением перечисленных выше преобразований. На лекции желательно составить подпрограмму, соответствующую последним уравнениям. Она имеет вид:

```
proektiv: tt = 1 + w * y: xx = x * SQR(1 - w ^ 2) / tt
          yy = (y + w) / tt: x = xx: y = yy: RETURN
```

К движениям на модели Пуанкаре плоскости Лобачевского относятся композиции осевых симметрий относительно прямых ортогональных граничной прямой (абсолюту) и инверсий относительно окружностей (базисных окружностей) с центрами на абсолюте. Поскольку формулы, задающие преобразование инверсии имеют вид:

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2+y^2}\ ,\quad y' = \frac{R^2 y}{x^2+y^2},$$

где R – радиус инверсной окружности, то соответствующую им подпрограмму можно записать следующим образом:

```
invers: xx = r ^ 2 * x / (x ^ 2 + y ^ 2)
        yy = r ^ 2 * y / (x ^ 2 + y ^ 2)
        x = xx: y = yy: RETURN
```

В лекционной аудитории с демонстрационным дисплеем преподавателю можно составить программу построения на дисплее базисной окружности, точки и её инверсного образа. Предварительно составим подпрограмму построения базисной окружности:

```
okrbaz: FOR t = 0 TO 2 * pi + .1 STEP .1
          x = r * COS(t): y = r * SIN(t): GOSUB uv
          IF t = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE -(u, v)
        NEXT t: RETURN
```

и точки-оригинала, образ которой мы будем строить, рассматривая движения на модели Пуанкаре:

tochka: CIRCLE (u1, v1), 3, 14: PAINT (u1, v1), 14, 14: RETURN

Приведём возможный вариант программы, позволяющей построить изображение базисной окружности инверсии, точки и её инверсного образа:

```
REM инверсный образ точки (без анимации)
 SCREEN 9: r = 18: m = 8: pi = 3.1416
 x1 = 8: y1 = -4: x = x1: y = y1: GOSUB uv: u1 = u: v1 = v
 GOSUB okrbaz: GOSUB tochka: SLEEP: GOTO start
REM подпрограммы: uv, okrbaz, tochka, invers
start: x = x1: y = y1: GOSUB invers: GOSUB uv: p1 = u: q1 = v
CIRCLE (p1, q1), 3, 7: PAINT (p1, q1), 7, 7:SLEEP
```

Отметим, что во второй строке программы (u_1, v_1) – экранные координаты точки-оригинала, в рабочей части программы (p_1, q_1) – экранные координаты её образа.

На рисунке 80 приведено изображение, полученное на экране персонального компьютера после выполнения программы. Первоначально появляется изображение базисной окружности и точки, находящейся внутри этой окружности. После нажатия на любую клавишу на дисплее появляется изображение её инверсного образа.

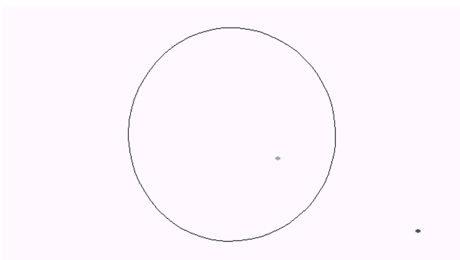


Рис. 80

На лекции можно рассмотреть алгоритм создания на дисплее эффекта непрерывного перемещения точки в свой инверсный образ. При обсуждении этого алгоритма можно воспользоваться следующей аналогией. Инвертирование внутренних точек базисной окружности можно сравнить с раскрытием математического цветка с бесконечным числом лепестков. Лепестки-отрезки в процессе поворота вокруг базисной окружности на 180 градусов постепенно удлиняются и на завершающей стадии уже представляют собой лучи с началом на окружности и расположенные вне окружности. При таком повороте каждая точка раскрываемого лепестка перемещается по лепестку, удаляясь от его начала. Если над инвертируемой плоскостью на бесконечно удалённом расстоянии поместить источник света, то по плоскости будет перемещаться тень от движущейся в пространстве точки. Моделируя на дисплее изображение этой тени, мы тем самым имитируем процесс непрерывного перемещения точки в свой инверсный образ.

Попытаемся реализовать этот алгоритм. Пусть M – точка-оригинал, M' – её инверсный образ. Для этой цели, как и в случае с осевой симметрией, вектор $\overrightarrow{MM'}$ можно разбить на k равных элементарных векторов и, чередуя видеостраницы, создать эффект плавного перемещения точки из исходного положения в конечное.

Отметим, что при осевой симметрии любая точка перемещаемой фигуры оказывалась на оси симметрии при выполнении композиции $k/2$ переносов. Связано это с тем, что любая точка и её образ при осевой симметрии находятся на одинаковом расстоянии от оси симметрии. Однако, при инверсии, точка и её образ находятся на разных расстояниях от точки пересечения базисной окружности с отрезком, соединяющим эти точки.

В связи с этим при рассмотрении фигур, содержащих более одной точки, на экране не создастся эффект одновременного «погружения» всех точек фигуры в базисную окружность при выполнении композиции $k/2$ параллельных переносов на элементарный вектор. Одновременный переход всех точек фигуры через ось мы наблюдали при осевой симметрии. Чтобы смоделировать такой эффект и при инверсии, найдём точку M_0 пересечения базисной окружности с отрезком MM' и каждый из направленных отрезков MM_0 и M_0M' разделим на $k/2$ равных частей.

Таким образом, при инверсии для каждой точки мы будем определять не один, а два элементарных вектора переноса. С помощью первого из них точка из положения M будем плавно перемещаться в положение M_0, с помощью второго – из положения M_0 в положение M'.

Координаты точки M_0 обозначим (x_0,y_0). Несложно подсчитать, что $x_0 = x \cdot r \big/ \sqrt{x^2 + y^2}$ и $y_0 = y \cdot r \big/ \sqrt{x^2 + y^2}$. К предыдущей программе добавим подпрограмму **inversanimac**, с помощью которой будем создавать анимационный эффект:

```
inversanimac: x = x1: y = y1
 t = r / SQR(x ^ 2 + y ^ 2): x0 = x * t: y0 = y * t
 GOSUB invers
 ax1 = 2 * (x0 - x1) / k: ay1 = 2 * (y0 - y1) / k
 bx1 = 2 * (x - x0) / k: by1 = 2 * (y - y0) / k
 FOR s = 1 TO k: x = x1: y = y1
  IF s <= k / 2 THEN ax = ax1: ay = ay1
  IF s > k / 2 THEN ax = bx1: ay = by1
  GOSUB perenos2d
  x1 = x: y1 = y: GOSUB uv: p1 = u: q1 = v
  SWAP ap, vp: GOSUB figura1: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
 NEXT s: RETURN
```

В этой подпрограмме сначала находятся координаты точки M_0, затем координаты (ax_1, ay_1) элементарного вектора переноса на первом отрезке, и координаты (bx_1, by_1) элементарного вектора переноса на втором отрезке. В подпрограмме **figura1** изображается последовательно базисная окружность, точка-оригинал и перемещаемая точка:

```
figura1: GOSUB okrbaz: GOSUB tochka
CIRCLE (p1, q1), 3, 7: PAINT (p1, q1), 7, 7:  RETURN
```

Окончательно программа может иметь следующий вид:

```
REM инверсный образ точки с анимацией
SCREEN 9: r = 18: m = 8: k = 200: ap = 0: vp = 1: pi = 3.1416
x1 = 8: y1 = -4: x = x1: y = y1: GOSUB uv: u1 = u: v1 = v
GOSUB okrbaz: GOSUB tochka: SLEEP: GOTO start
REM подпрограммы: uv, okrbaz, tochka, invers, perenos2d, inversanimac,
figura1
start: GOSUB inversanimac: GOSUB figura: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

После выполнения всей программы на экране появится такое же изображение, что и на рисунке 79. Однако этому изображению будет предшествовать целое семейство стоп-кадров, создающее эффект непрерывного перемещения точки в её инверсный образ.

Семинарские занятия. На семинарских занятиях необходимо поручить студентам подготовить сообщения, посвящённые тем моделям плоскости Лобачевского, которые предполагается рассмотреть на очередных лабораторных занятиях. В первую очередь вывести или привести в готовом виде необходимые формулы, позволяющие на моделях находить расстояния между точками, величины углов, углов параллельности, расстояний между расходящимися прямыми и т. д.

Лабораторные занятия. По этой теме предполагается проведение двух лабораторных занятий, посвящённых выполнению лабораторных работы № 7.1 и № 7.2.

Лабораторная работа № 7.1 «Модель Кэли-Клейна».

Организация работы. Лабораторная работа проводится в форме учебного проекта № 7.1.1 под общим руководством преподавателя.

Учебные цели: научиться применять координатный метод и метод преобразований при построении модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского, строить на дисплее электронный вариант этой модели, проводить эксперименты, подтверждающие различные факты теории (нахождение суммы углов треугольника, расстояния между сверхпараллельными прямыми и т. д.).

Учебный проект № 7.1.1 «Модель Кэли-Клейна на дисплее». Построить на экране компьютера изображение некоторых основных фигур модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского, вывести на дисплей различные их числовые характеристики. Построить образы некоторых фигур под действием движений модели (в том числе используя анимацию).

Выполнение этого проекта можно разбить на следующие этапы:

ЭТАП №1. Построить на экране компьютера изображение окружности-абсолюта и простейших фигур (точек, отрезков, лучей и прямых) модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского.

ЭТАП №2. Построить на экране компьютера изображение треугольников, параллелограммов, трапеций и других фигур модели, вывести на дисплей некоторые их числовые характеристики.

ЭТАП №3. Используя проективные преобразования, построить образы некоторых фигур при движениях модели, в том числе с использованием анимации.

Приведём один из возможных вариантов выполнения третьего этапа проекта.

Выполнение ЭТАПА №3. В качестве примера фигуры рассмотрим на модели образ буквы *К*. Поскольку радиус окружности-абсолюта принят за единицу, то уменьшим размеры нашей фигуры так, чтобы она оказалась внутри окружности. В связи с этим немного изменим известную подпрограмму **bukvaK** (меняется её вторая строка):

```
bukvaK: DATA 0,8, 1,8, 1,5, 2,8, 3,8, 1.8,4.4, 4,0, 3,0, 1,4, 1,0, 0,0
FOR i = 1 TO 11: READ x, y: x = f * x+.2: y = f * y-.3: x(i) = x: y(i) = y
GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v: NEXT i: PSET (u(11), v(11))
FOR i = 1 TO 11: LINE -(u(i), v(i)): NEXT i
PAINT ((u(1) + u(3)) / 2, (v(1) + v(3)) / 2), 1, 15: RETURN
```

Поскольку оси всех рассматриваемых осевых симметрий проходят через начало координат, то в подпрограмме **simmAB** параметрам x_0 и y_0 придадим значения равные нулю.

Подпрограмма будет иметь вид:

```
simmAB: A = my: B = -mx: tt = -(A * x + B * y) / (A ^ 2 + B ^ 2)
        x = x + 2 * tt * A: y = y + 2 * tt * B: RETURN
```

Кроме того, составим подпрограмму построения окружности-абсолюта:

```
absolut: FOR t = 0 TO 2 * pi STEP .01
         x = COS(t): y = SIN(t): GOSUB uv
```

```
IF t = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE -(u, v)
NEXT t: RETURN
```

В окончательном виде программа будет иметь следующий вид:

```
REM образ фигуры при движениях на модели Кэли-Клейна
SCREEN 9: DIM x(11), y(11), u(11), v(11)
m = 170: pi = 3.1416: f = .095
GOSUB absolut: GOSUB bukvaK: GOTO start
REM подпрограммы: uv, absolut, bukvaK, povorotO, simmAB, proektiv
start: SLEEP: fi = pi / 4: w = .8: mx = -1: my = 2
    FOR i = 1 TO 11: x = x(i): y = y(i): GOSUB proektiv
    GOSUB povorotO: GOSUB simmAB
    GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v: NEXT i: PSET (u(11), v(11)), 14
    FOR i = 1 TO 11: LINE -(u(i), v(i)), 14: NEXT i
    PAINT ((u(1) + u(3)) / 2, (v(1) + v(3)) / 2), 14, 14: SLEEP
```

После выполнения программы на экране персонального компьютера появится изображение, представленное на рисунке 81. Анимацию проективного преобразования можно осуществить по тем же алгоритмам, которые использовались при визуализации перемещений и аффинных преобразований.

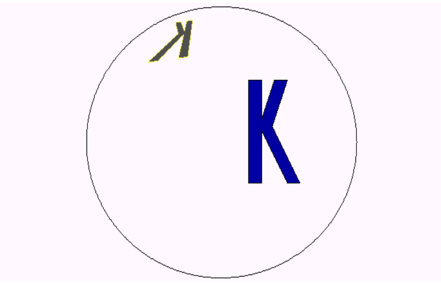


Рис. 81

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой; аналитическое задание проективного преобразования плоскости; вычисления координат точек при повороте и осевой симметрии плоскости.

Программное обеспечение: среда QBASIC.

Лабораторная работа № 7.2 «Модель Пуанкаре».

Организация работы: проводится в форме учебного проекта № 7.2.1 под общим руководством преподавателя.

Учебные цели: научиться применять координатный метод и метод преобразований при построении модели Пуанкаре плоскости

Лобачевского, научиться строить на дисплее электронный вариант этой модели.

Учебный проект № 7.2.1 «Модель Пуанкаре на дисплее». Построить на экране компьютера изображение некоторых фигур модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, вывести на дисплей различные их числовые характеристики. Построить образы некоторых фигур под действием движений модели (в том числе используя анимацию).

Выполнение этого проекта можно разбить на следующие этапы:

ЭТАП №1. Построить на экране компьютера изображение прямой-абсолюта и простейших фигур (точек, отрезков, лучей и прямых) модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

ЭТАП №2. Построить на экране компьютера изображение треугольников, параллелограммов, трапеций и других фигур модели, вывести на дисплей некоторые их числовые характеристики.

ЭТАП №3. Используя проективные преобразования, отображающие абсолют на себя, построить образы некоторых фигур при движениях модели, в том числе с использованием анимации.

Приведём один из вариантов выполнения третьего этапа проекта.

Выполнение ЭТАПА №3. Составим программу построения инверсного образа некоторых линий, не проходящих через центр инверсии. Рассмотрим, например, в качестве линии отрезок, мировые координаты концов которого обозначим $(x(1), y(1))$ и $(x(2), y(2))$, экранные – через $(u(1), v(1))$ и $(u(2), v(2))$. Выберем на инвертируемом отрезке n точек и для них создадим массивы мировых $x_1(i)$, $y_1(i)$ и экранных $p(i)$, $q(i)$ координат. Значения этих координат будут изменяться в зависимости от того, на каком этапе перемещения находится точка. Каждая из n точек отрезка будет перемещаться по собственному лучу с началом в центре инверсии и содержащем эту точку. Поэтому каждой точке отрезка будут соответствовать два элементарных вектора переноса. Обозначим массивы мировых координат элементарных векторов переносов на первом этапе (от инвертируемой точки до окружности) через *ax*(*i*), *ay*(*i)*, и на втором этапе (от окружности до инверсного образа) – через *bx*(*i*), *by*(*i*).

Отметим изменения, которые можно внести в соответствующие блоки программы, составленной на лекции.

В первом блоке программы вводится параметр *n*, которому присваивается значение 50; добавляется строка, резервирующая память для соответствующих массивов; задаются мировые координаты концов отрезка и вычисляются их экранные координаты. Затем идут обращения к подпрограммам, по которым на экране ПК сначала изображается базисная окружность, затем - инвертируемый отрезок-оригинал.

Во втором блоке подпрограмма **tochka** заменяется на подпрограмму **otrezok**:

```
otrezok: LINE (u(1), v(1))-(u(2), v(2)): RETURN
```

которая изображает инвертируемый отрезок–оригинал.

В подпрограмме **uv** немного изменены координаты центра проектирования (изображение смещено в нижнюю часть экрана):

```
uv:  u = 1.18 * m * x + 220: v = -m * y + 330: RETURN
```

В подпрограмме **okrbaz2** изображается прямая-абсолют и верхняя половина базисной окружности инверсии, центр которой лежит на абсолюте-прямой нашей модели:

```
okrbaz2: LINE (0, 330)-(640, 330)
        FOR t = 0 TO pi + .05 STEP .05
         x = r * COS(t): y = r * SIN(t): GOSUB uv
         IF t = 0 THEN PSET (u, v) ELSE LINE -(u, v)
        NEXT t: RETURN
```

В подпрограмму **inversanimac** внесём изменения, связанные с увеличением числа инвертируемых точек, а также добавим строки, задающие массивы элементарных векторов. Приведём её полностью:

```
inversanimac2:
 FOR i = 1 TO n: x = x1(i): y = y1(i)
  t = r / SQR(x ^ 2 + y ^ 2): x0 = x * t: y0 = y * t
  GOSUB invers
```

```
 ax(i) = 2 * (x0 - x1(i)) / k: ay(i) = 2 * (y0 - y1(i)) / k
 bx(i) = 2 * (x - x0) / k: by(i) = 2 * (y - y0) / k
NEXT i
FOR s = 1 TO k
 FOR i = 1 TO n: x = x1(i): y = y1(i)
  IF s <= k / 2 THEN ax = ax(i): ay = ay(i)
  IF s > k / 2 THEN ax = bx(i): ay = by(i)
  GOSUB perenos2d
  x1(i) = x: y1(i) = y: GOSUB uv: p(i) = u: q(i) = v
 NEXT i: SWAP ap, vp: GOSUB figura2: SCREEN 9, 1, ap, vp: CLS
NEXT s: RETURN
```

Приведём также подпрограмму **figura2**:

```
figura2: GOSUB okrbaz: GOSUB otrezok
 PSET (p(1), q(1)), 7: FOR i = 2 TO n: LINE -(p(i), q(i)), 7: NEXT i
 RETURN
```

В этой подпрограмме изображается базисная окружность, отрезок-оригинал и перемещаемая фигура. Полностью программа выглядит следующим образом:

```
REM инверсный образ отрезка с анимацией
 SCREEN 9: r = 20: m = 8: k = 100: n = 50: ap = 0: vp = 1: pi = 3.1416
 DIM p(n), q(n), ax(n), ay(n), bx(n), by(n), x1(n), y1(n)
 DATA 10,2, 10,15
 FOR i = 1 TO 2: READ x(i), y(i): x = x(i): y = y(i)
 GOSUB uv: u(i) = u: v(i) = v: NEXT i
 GOSUB okrbaz: GOSUB otrezok: SLEEP: GOTO start
REM подпрограммы: uv, okrbaz, otrezok, invers, inversanimac2 figura2
 perenos2d,
start: x1 = x(1): y1 = y(1): x2 = x(2): y2 = y(2)
 hx = (x2 - x1) / (n - 1): hy = (y2 - y1) / (n - 1)
 FOR i = 1 TO n: x1(i) = x1 + (i - 1) * hx: y1(i) = y1 + (i - 1) * hy: NEXT i
 GOSUB inversanimac: GOSUB figura: SCREEN 9, 1, ap, ap: SLEEP
```

В рабочем блоке инвертируемый отрезок разбивается на n равных частей, и вычисляются координаты каждой точки деления. Затем идёт обращение к подпрограмме **inversanimac**, создающей на экране ПК анимационный эффект деформации отрезка в его инверсный образ – дугу окружности.

На рисунке 82 изображены три стоп-кадра анимации (включая последний), которые можно будет увидеть на экране персонального компьютера в процессе выполнения составленной программы.

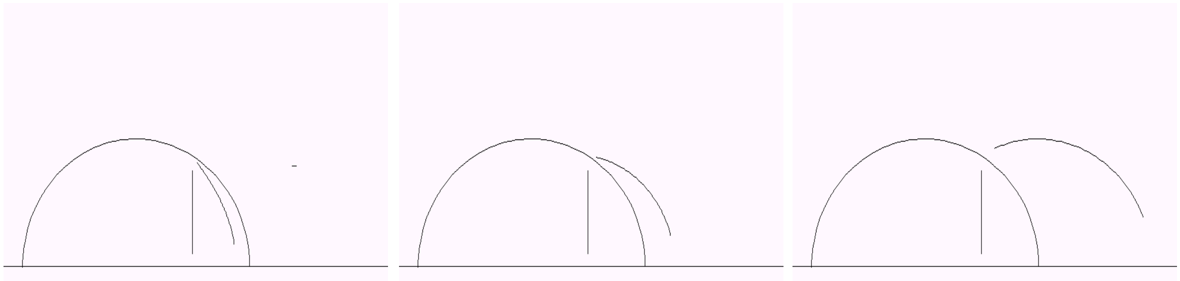


Рис. 82

Кроме отрезка на занятии можно построить образ окружности, образы других несложных фигур. В качестве самостоятельного задания студентам можно предложить построить инверсный образ многоугольника, например буквы *К* (рисунок 83).

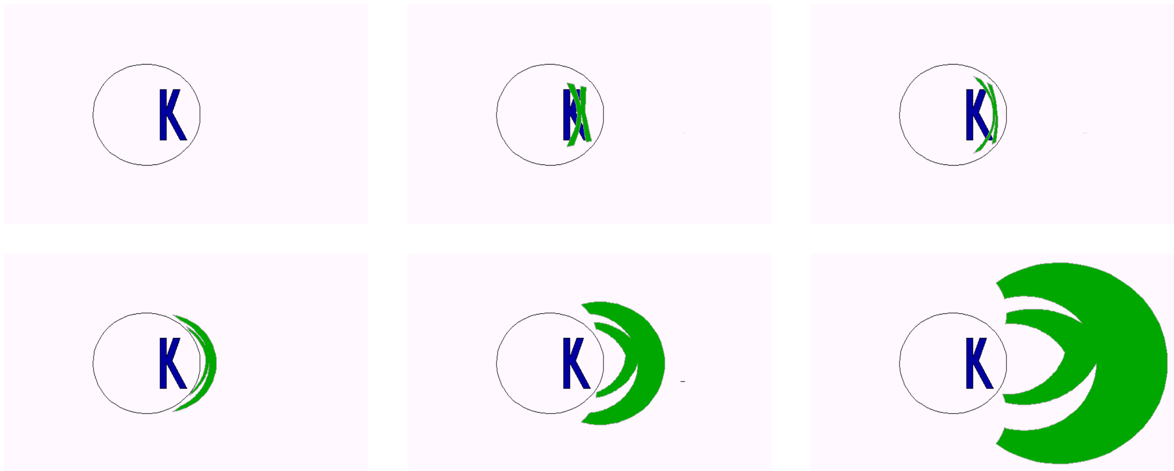


Рис. 83

Подпрограммы: связь экранной системы координат с мировой; аналитическое задание инверсий плоскости. изображение деформируемой фигуры, других фигур; непрерывные деформация фигуры.

Программное обеспечение: среда QBASIC.

Самостоятельная работа. Для самостоятельной работы во внеучебное время студентам можно дать следующие задачи и учебные проекты:

Используя электронный вариант моделей Кэли-Клейна и Пуанкаре, построить на дисплее:

- точку и прямую, параллельную данной прямой;
- прямую, параллельную двум прямым (пересекающимся, параллельным, сверхпараллельным);
- треугольник, симметричный данному треугольнику относительно данной оси;
- на данном луче отрезок, длина которого равна длине данного отрезка;
- треугольник по двум сторонам и углу между ними;
- на данном отрезке точку, делящую её пополам и прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину;
- прямую, являющуюся биссектрисой данного угла;
- прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой;
- общий перпендикуляр для двух данных сверхпараллельных прямых;
- квадрат (правильный четырёхугольник), сторона которого равна данному отрезку;
- для данной прямой и данной точки эквидистанту прямой, проходящей через эту точку;
- орицикл с данной осью и проходящий через данную точку;
- угол параллельности, соответствующий данному отрезку;
- отрезок такой, чтобы данный угол был углом параллельности, соответствующий этому отрезку.

Разработать демонстрационную программу по этой теме.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: отрабатывается понятие модели, глубже усваиваются различные факты теории, закрепляются в конкретных приложениях преобразования инверсии и проективные преобразования.

Базовые знания: знание теории геометрических преобразований вообще и проективных и инверсных преобразований в частности. Знание основных фактов геометрии Лобачевского.

Основные преимущества использования информационных технологий *при изучении рассматриваемой темы. Применение информационных технологий позволяет:*

- установить прочную связь между аналитическим заданием модели и его визуальным представлением;
- обучить студентов построению электронных вариантов неевклидовых плоскостей.

Тема. Многомерная геометрия

В этой теме рассматриваются следующие вопросы: векторное обоснование геометрии, система аксиом Вейля, непротиворечивость; аффинное n-мерное пространство, подпространства, k-плоскости, параллельность; евклидово n-мерное пространство, расстояние между точками, перпендикулярность, равенство углов, методы компьютерного моделирования многомерных геометрических объектов.

На изучение темы отводится 10 часов лекций и 4 часа семинарских занятий.

Рассмотрим тот теоретический и практический материал темы, который тесно связан с реализацией концепции КПГ.

Лекции. На одной из последних по этой теме лекций необходимо рассказать о многомерных геометрических задачах и методах их решения с использованием компьютера.

Усложнение методов теоретических исследований и другие факторы приводят к необходимости введения многомерных моделей и обработки многомерных данных в различных областях науки и техники. Привлечение в этом случае геометрических интерпретаций приводит к постановке многомерных геометрических задач – математических задач, которые формулируются с использованием многомерных геометрических пространств, отношений на множествах точек в таких пространствах и операций над ними.

Широко используются геометрические модели при описании постановки и алгоритмов решения различных оптимизационных задач. Целевая функция интерпретируется как гиперповерхность, совокупность ограничений – как многогранник, решение – как точка на гиперповерхности.

Существующие методы решения многомерных геометрических задач можно разделить на аналитические, графические, а также их всевозможные сочетания.

Суть аналитических методов состоит в том, что введённым геометрическим моделям и операциям ставятся в соответствие некоторые числовые объекты и операции над ними. Графический метод решения многомерной геометрической задачи состоит в том, что многомерным геометрическим объектам ставятся в соответствие некоторые двумерные графические изображения.

Целая группа методов направлена в основном на графическое изображение с помощью компьютера того или иного класса многомерных геометрических объектов с последующим их визуальным анализом. Приведём некоторые из них.

Широко распространён метод, основанный на моделировании элементов многомерного пространства геометрическими образами плоскости или трёхмерного пространства, который допускает эффективную реализацию с помощью компьютера. Суть этого метода заключается в следующем. Каждой точке A четырёхмерного пространства с координатами (x, y, z, t) ставится в соответствие точка A_1 трёхмерного пространства с координатами (x, y, z). Затем строится вектор с началом в точке A_1 произвольного направления, например, параллельный оси y. Длину этого вектора можно рассматривать как модуль четвёртой координаты t точки A, а направление вектора определять как знак этой координаты. Например, если $t>0$, то вектор сонаправлен с осью y, в противном случае – противоположно направлен. Таким образом, параллельные векторы в трёхмерном пространстве могут моделировать точки четырёхмерного пространства. Остальные элементы четырёхмерного пространства моделируются аналогичным образом. Этот метод достаточно просто обобщается и на пространства произвольной размерности.

Метод параллельных координат, разработанный на фирме IBM, изначально ориентирован на применение компьютера. Он основан на конструировании двумерных геометрических моделей (плоских графов) для объектов n-мерного евклидова пространства. На плоскости с декартовыми координатами xy располагаются n копий оси y на равных расстояниях перпендикулярно оси x и обозначаются x_1, x_2, …, x_n. Это оси системы параллельных координат. Точка (C_1, C_2, …, C_n) представляется ломаной, вершины которой располагаются на осях x_i с координатами (i, C_i), $i=1,2,\dots,n$. Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между точками n-мерного пространства и плоскими ломаными с вершинами на вертикальных осях. Легко построить изображение точки и отрезка. Гиперповерхность же изображается огибающей семейства ломаных, представляющих все её точки. Огибающая как плоская кривая может быть описана в терминах координатной системы xy. Ключевая идея данного метода состоит в том, что описание объекта высокой размерности превращается в двумерное описание огибающей ломаных.

Существуют ещё другие способы изображения с помощью компьютера различных многомерных геометрических объектов. Во многих из них предполагается, что можно повысить размерность изображаемого объекта на единицу одним из следующих способов:

1) построение «многооконного» изображения – конечного числа изображений одного типа для различных значений n+1-й координаты;

2) использование времени как модели дополнительного измерения – получение динамического движущегося изображения, изменяющего форму во времени;

3) изменение оптических характеристик изображения в зависимости от значения n+1-й координаты (цвет, яркость, тип линии);

4) n+1-я координата представляется в виде размеров изображения того же вида.

Все эти алгоритмы можно реализовать на языках программирования высокого уровня, в частности QBASIC. Существуют, однако, и прикладные программные продукты, ориентированные на классы многомерных задач. Примеры таких прикладных программ: ISOS и HYPER.

На лекции можно продемонстрировать примеры изображения многомерных объектов с помощью одной из этих программ.

Семинарские занятия. На семинарских занятиях желательно обсудить более детально различные методы компьютерного моделирования многомерных объектов.

Лабораторные занятия. Проведение лабораторных занятий по этой теме не предполагается.

Программное обеспечение (для лекции):

Диалоговая программа *ISOS*. Программа предназначена для визуального анализа функций трёх переменных путём последовательного графического отображения поверхностей уровня (изоповерхностей). Поверхность уровня описывается уравнением $f(x, y, z) = C$ и задаётся как проекция пересечения поверхности $w = f(x, y, z)$ и гиперплоскости $w = C$ четырёхмерного пространства *wxyz*.

Диалоговая программа *HYPER*. Программа предназначена для визуального анализа явной функции многих переменных вида: $x_n = f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$. Геометрической моделью функции является гиперповерхность в пространстве размерности n. Процедура анализа состоит в последовательном рассечении гиперповерхности гиперплоскостью вида $x_i=c$, $i=1,\ldots,n-1$ с последующей проекцией результата на подпространство $x_1,\ldots x_{i-1}, x_{i+1},\ldots x_n$.

Самостоятельная работа студентов. Студентам, желающим более основательно заняться вопросами решения на компьютере многомерных геометрических задач, можно поручить выполнение следующих учебных проектов:

- используя метод моделирования точек четырёхмерного пространства параллельными векторами трёхмерного пространства и их визуализацию на дисплее, решить следующие задачи: задачи на построение объектов, позиционные задачи (пересечение прямой и плоскости, пересечение гиперплоскостей, заданных следами и т. д.) и метрические задачи (длина отрезка прямой, расстояние от точки до гиперплоскости);
- используя метод параллельных координат, решить графически с помощью персонального компьютера следующие задачи многомерной геометрии: определить принадлежность точки гиперповерхности; определить минимальные расстояния между прямыми; построить пересечение гиперплоскостей; сконструировать выпуклую оболочку конечного множества точек; построить пересечение и объединение набора выпуклых множеств точек.

Связь с традиционными разделами курса геометрии: подробно изучается материал темы непосредственно связанный со свойствами фигур многомерных пространств, рассматриваются точки, прямые, гиперплоскости и гиперповерхности таких пространств.

Базовые знания: знание геометрий размерности 1, 2 и 3, аксиоматику Вейля аффинных и евклидовых многомерных пространств, её простейшие следствия.

Основные преимущества использования информационных технологий при изучении темы. Применение средств информационных технологий позволяет:

- обучить студентов методам визуализации многомерных геометрических объектов;
- познакомить студентов с методами решения многомерных геометрических задач, использующими возможности персональных компьютеров.

В таблице 6 приведено итоговое распределение часов на темы курса геометрии, связанные с разработанной в настоящей монографии реализацией концепции КПГ.

Таблица 6

Распределение часов на темы курса геометрии, связанные с реализацией концепции КПГ

Модуль, раздел (аудиторные часы, семестр) *Тема модуля (раздела), при изучении которой предполагается применение информационных технологий*	**Лекции, ч.**	**Практические (семинарские) занятия, ч.**	**Лабораторно-практические занятия, ч.** Содержание занятий (число часов)	**Лабораторные занятия, ч.** Лабораторные работы, учебные проекты (число часов)
Геометрия на плоскости (72 часа, 1 семестр)	**36**	**16**	**14**	**6**
Обзор возникновения геометрических понятий.	2			Лабораторная работа «Электронные изображения» (2 ч.)
Геометрические построения на плоскости.	16	8	Решение задач на построение циркулем и линейкой в одной из систем динамической геометрии (8 часов)	Лабораторная работа «Системы динамической геометрии, их графические, вычислительные, анимационные и исследовательские возможности» (2 часа)
Метрические соотношения.	18	8	Решение планиметрических задач метрического характера в одной из систем динамической геометрии (6 ч.)	Лабораторная работа «Задачи вычислительного характера и языки программирования» (2 ч.)
Метод координат (72 часа, 2 семестр)	**36**	**24**	**6**	**6**
Система координат на плоскости и в пространстве. Векторы	6	6	Решение задач методом координат в одной из систем динамической геометрии (2 ч)	
Прямая и окружность на плоскости	8	8		Учебный проект «Треугольник» (2 ч)
Линии второго порядка	8	8	Построение линий второго порядка в одной из систем динамической геометрии (2 ч.)	Учебные проекты «Ромашка», «Солнышко», «Подсолнух» (2 ч.)
Циклоидальные и другие кривые	4	2	Компьютерное моделирование циклоидальных кривых в одной из систем динамической геометрии (2 ч.)	Лабораторная работа «Циклоидальные и другие кривые в среде программирования и пакете

				символьных вычислений» (2 ч.)
Геометрия в пространстве (72 часа, 3 семестр)	**6**	**22**	**6**	**8**
Методы изображения	8	4	Методы изображения пространственных фигур в одной из систем динамической геометрии (2 ч.)	Учебные проекты: “Сфера”, “Линии на цилиндре” (2 ч.)
Многогранники, правильные многогранники	4	4	Решение задач метрического и позиционного характера на многогранники в одной из систем динамической геометрии (2 ч.)	Учебные проекты: “Куб”, “Тетраэдр”, “Октаэдр”, “Икосаэдр”, “Додекаэдр” (2 ч.)
Поверхности второго порядка	6	4	Решение задач метрического и позиционного характера на комбинацию сферы и многогранника в одной из систем динамической геометрии (2 ч.)	Учебные проекты: “Эллипсоид и куб”, “Однополостный гиперболоид и куб”, “Двуполостный гиперболоид и куб ”, “Эллиптический параболоид и куб”, “Гиперболический параболоид и тетраэдр” (2 ч)
Тор	2	2		Учебный проект “Тор” (2 ч.)
Геометрические преобразования (72 часа, 4 семестр)	**6**	**14**	**10**	**12**
Движения плоскости и пространства	2	6	Решение задач на построение циркулем и линейкой методом движений в одной из систем динамической геометрии (6 ч.)	Учебные проекты: “Путешествия на плоскости” (2 часа), “Путешествия около куба” (2 ч), лабораторная работа “Компьютер в конструктивных задачах на построение с помощью движений” (2 ч.)
Подобия плоскости и пространства	6	4	Решение задач на построение циркулем и линейкой методом подобия в одной из систем динамической геометрии (4 ч.)	Учебные проекты: “Подобные путешествия на плоскости”(1 ч), “Подобные путешествия в пространстве” (1 ч). Лабораторная работа “Компьютер в конструктивных задачах на построение с помощью подобия

				плоскости” (2 ч.)
Аффинные преобразования	6	4		Учебный проект “Аффинные путешествия по плоскости” (2 ч.)
Проективная геометрия (72 часа, 5 семестр)	**6**	**24**	**8**	**4**
Проективная плоскость, основные факты и понятия: т. Дезарга, координаты, сложное отношение	6	10	Решение задач на применение т. Дезарга в одной из систем динамической геометрии (2 ч.)	
Проективные преобразования	8	6	Построение образов фигур под действием проективных преобразований в одной из систем динамической геометрии (2 ч.)	
Линии второго порядка на проективной плоскости	2	6	Полюс и поляра, касательные (2 ч.). Компьютерное сопровождение теорем Паскаля и Брианшона, их предельных случаев в одной из систем динамической геометрии (2 ч.)	Учебный проект “Построение линий второго порядка с помощью одной линейки (2 ч.)
Методы изображений, основанные на центральном проектировании	4	2		Учебный проект “Комната в линейной перспективе” (2 ч/)
Основания геометрии (72 часа, 6 семестр)	**6**	**30**	**2**	**4**
Аксиоматическое построение геометрии		2	Решение задач абсолютной геометрии в одной из систем динамической геометрии (2 ч.)	
Геометрия Лобачевского, непротиворечивость геометрии Лобачевского	0	8		Учебные проекты: “Модель Кэли-Клейна” (2 ч.), “Модель Пуанкаре” (2 ч.)
Многомерная геометрия	0	4		
Итого 432 часа	**16**	**134**	**44**	**38**

ВЫВОДЫ

1. В каждом модуле курса геометрии определены пути реализации концепции использования информационных технологий в геометрической подготовке учителя математики. В некоторых темах каждого модуля отмечены особенности изложения изучаемого материала в зависимости от того, какая из основных форм построенной нами методической системы используется при его изучении:

– определены теоретические и практические вопросы, которые необходимо рассмотреть на *лекциях*, для того чтобы подготовить студентов к успешному выполнению учебных проектов в условиях аудиторных лабораторных работ или самостоятельной работы;

– для каждой конкретной темы (раздела) определён перечень геометрических задач и задач, лежащих на стыке геометрии и информатики, которые должны содействовать закреплению на *практических занятиях* вопросов теории, связанных с реализацией концепции КПГ;

– для каждого *лабораторного занятия* разработаны конкретные опорные учебные проекты, рекомендуемые для выполнения либо всей студенческой подгруппой, либо творческим коллективам, на которые разбивается подгруппа. В большинстве проектов даны методические рекомендации по их выполнению, в ряде случаев, связанных с составлением программ на языках программирования высокого уровня либо на внутренних языках математических пакетов, приводятся листинги программ, обсуждаются алгоритмы;

– подобрано большое число упражнений, задач, опорных, базисных и комплексных учебных информационно-ориентированных проектов по геометрии, которые рекомендуются для выполнения студентами в рамках *самостоятельной работы.*

2. Для большинства тем (разделов) установлена связь между материалом, реализующим концепцию КПГ, и классическими (традиционными) разделами курса геометрии.

3. Для большинства тем (разделов) определены базовые знания, которые необходимы студентам для успешной реализации в этих темах (разделах) концепции КПГ.

4. В большинстве случаев перечислены основные преимущества использования в темах (разделах) курса геометрии информационных технологий обучения.

5. Наполнение каждой темы (раздела) курса подтверждает реалистичность разработанной нами концепции.

Библиографический список

1. Агапова О., Кривошеев А., Ушаков А. Проектно-созидательная модель обучения // ALMA MATER. - №1. – 1994.
2. Агафонова Т.Л. и др. Задачи по объединённому курсу геометрии. Ч.4. Проективные пространства; методы изображений. – Ярославль, 1989.
3. Агафонова Т.Л. и др. Задачи по объединённому курсу геометрии. Ч.5. Основания геометрии; неевклидовы геометрии. – Ярославль, 1991.
4. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия 7 – 9. М.: Просвещение, 1995; Геометрия 8 – 9. – М.: Просвещение, 1995. Геометрия 10 – 11. – М.: Просвещение, 1995.
5. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М.: Наука, 1990.
6. Алексюк А.Н. Развитие теории общих методов обучения в советской педагогике (1917 – 1971гг.). Автореф. дис…д-ра пед. наук. – Киев, 1973.
7. Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. – М.: Наука, 1987.
8. Аммерал Л. Интерактивная трёхмерная машинная графика. –М.: Сол Систем, 1992.
9. Аммерал Л. Машинная графика на персональных компьютерах. – М.: Сол Систем, 1992.
10. Аммерал Л. Принципы программирования в машинной графике. – М.: Сол Систем, 1992.
11. Аммерал Л. Программирование графики на Турбо Си. – М.: Сол Систем, 1992.
12. Анищенко С.А. Изображение пространственных фигур с помощью ЭВМ: Методические рекомендации. – Красноярск: КГПИ, 1990.

13. Анищенко С.А. Лекции по геометрии: Уч. пособие. Ч. 1-3. – Красноярск: КГПУ, 1995 – 2009.
14. Анищенко С.А., Долгарев А.И., Майер В. Р. Методические указания к программе государственных экзаменов по математике. – Красноярск, 1984.
15. Анищенко С.А., Майер В. Р. Использование компьютерной техники в курсе геометрии как средство совершенствования профессиональной подготовки будущего учителя // Пути совершенствования профессиональной подготовки будущего учителя к реализации концепции общеобразовательной школы. – Красноярск, 1990. – С. 115-116.
16. Анищенко С.А., Майер В.Р., Калинина Н.Н. Методические рекомендации по изучению проективной геометрии. – Красноярск, 1981.
17. Анищенко С.А., Майер В.Р. Графические работы в курсе геометрии, выполняемые с помощью ЭВМ // Проблемы компьютеризации учебного процесса. – Абакан, 1988. – С. 19-20.
18. Анищенко С.А., Майер В.Р. Использование компьютерной техники как средство интенсификации учебного процесса // Интенсификация учебного процесса как средство профессиональной подготовки будущего учителя математики.– Ярославль, 1990. – С. 40-41.
19. Анищенко С.А., Майер В.Р. К вопросу о целесообразности преподавания элементарной геометрии в основном курсе геометрии // Курс элементарной математики в системе подготовки учителей: Тез. док. Всероссийского семинара преподавателей математики в педвузах. – Чебоксары, 1992.
20. Анищенко С.А., Майер В.Р. О некоторых особенностях компьютеризации учебного процесса в педагогических вузах // Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки будущего учителя. – Барнаул, 1990. – С. 117-118.

21. Анищенко С.А., Майер В.Р. О программе по геометрии для педагогических институтов // Профессионально-педагогический подход к составлению учебных планов и программ. – Казань, 1989. – С. 34-35.
22. Анищенко С.А., Майер В.Р. Об одном варианте программы по геометрии для второй ступени высшего педобразования // Проблемы двухступенчатой подготовки учителя математики в педвузах. – Липецк, 1993. – С.42-43.
23. Анищенко С.А., Майер В.Р. Программа курса геометрии для первой ступени высшего педагогического образования // сборник альтернативных учебных программ математических и методических курсов для педагогических институтов. – М.: Изд-во РИПКРО МО РСФСР, 1992. – С. 59-63.
24. Архангельский С.И. Лекции по теории обучения в высшей школе. – М.: Высшая школа, 1974.
25. Архангельский С.И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы. – М.: Высшая школа, 1980.
26. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия 7 – 9. – М.: Просвещение, 2012.
27. Атанасян Л.С. Геометрия. – М.: Просвещение, 1973.
28. Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б. Геометрия. Ч.II – М.: Просвещение, 1976.
29. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч.I –М.: Просвещение, 1986.
30. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия.Ч.II –М.: Просвещение, 1987.
31. Аугер Вольфганг. AutoCAD 11.0. – Киев: Торгово-издательское бюро BHV, 1993.
32. Аудзионис П.И. Основы теории конечных геометрических объектов. – Вильнюс: Техника, 1994.
33. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. – М., Просвещение, 1974. Ч. I; 1975. Ч. II.

34. Бакельман И.Я. Высшая геометрия. – М.: Просвещение, 1985.
35. Белкин Е.Л. Основы педагогики высшей школы. – М.: Моск. технологич. институт пищевой пром., 1987.
36. Богатырь Б.Н., Гуриев М.А. и другие. Концепция системной интеграции информационных технологий в высшей школе. – М.: РосНИИСИ, 1993. – 72 с.
37. Болтянский В.Г., Волович М.Б., Семушин А.Д. Геометрия 6–8. – М.: Просвещение, 1979.
38. Борк А. История новых технологий в образовании / Пер. с англ. // Рос. открытый университет. – М., 1990. – 21 с.
39. Брановский Ю.С. Новая дисциплина «Введение в педагогическую информатику» в структуре многоуровневого педагогического образования// Педагогическая информатика. – №2. 1995. –С.18-29.
40. Брушлинский А.В. Психология мышления и кибернетика. – М.: Мысль, 1970.
41. Буга П.Г. Создание учебных книг для вуза. – М.: МГУ, 1987.
42. Бусаркин В.М., Майер В.Р. Организация самостоятельной работы студентов как средство интенсификации учебного процесса // Интенсификация учебного процесса как средство профессиональной подготовки будущего учителя математики.– Ярославль, 1990. – С. 41-42.
43. Васина Г.И., Корпачёва Л.Н., Кирюхина Е.В. Анализ методик обучения компьютерной грамотности // Новые информационные технологии подготовки специалистов. – Красноярск, 1996. – С. 49-50.
44. Вейль Анри. Математическое мышление. – М.: Наука, 1989.
45. Вейль Г. Симметрия. – М.: Наука, 1968.
46. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия. Ч.1: Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов. – СПб.: Специальная литература, 1997. – 352 с.

47. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия. Ч.2: Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов.– СПб.: Специальная литература, 1997. – 320 с.
48. Вильямс Р., Маклин К. Компьютеры в школе. – М., Прогресс, 1988. – 334 с.
49. Вихрев В.В., Федосеев А.А., Христочевский С.А. Практическое внедрение информационных технологий на основе метода проектов // Информатика и образование. – №1. – 1993.
50. Герасимова И.С. и др. Задачи по объединённому курсу геометрии. Ч.1. Аналитическая геометрия на плоскости. – Ярославль, 1983.
51. Гершунский Б.С. Компьютеризация в сфере образования: проблемы и перспективы. – М.: Педагогика, 1987. – 264 с.
52. Гилой В. Интерактивная машинная графика. – Мир, 1982.
53. Гинзбург А.М. Симметрия на плоскости. – Харьков: ДНТВУ, 1934.
54. Глейзер Г.Д. Методы формирования и развития пространственных представлений взрослых в процессе обучения геометрии в школе. Автореф. дисс…докт. пед. наук.– М., 1985.
55. Гнеденко Б.В. Формирование мировоззрения у учащихся в процессе обучения математике. – М.: Просвещение, 1982.
56. Грайс Д. Графические средства персонального компьютера / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.
57. Графикон-92 // Тез. докл. 2-ой Международной конференции «Компьютерная графика в науке и искусстве». – М. 1992.
58. Гусев В.А. Как помочь ученику полюбить математику? Ч.1. – М.: Авангард, 1994.
59. Гусев В.А. Методические основы дифференцированного обучения математике в средней школе. Автореф. дисс…докт. пед. наук, – М., 1990.
60. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретич. и эксперим. исслед. – М.: Педагогика, 1986. – 239 с.

61. Далингер В.А. Компьютерно-ориентированное преподавание геометрии в средней школе. В 2 ч. – Омск: ГПИ, 1989.
62. Джонассен Д.Х. Компьютеры как инструменты познания// Информатика и образование. – №4. – 1996. – С. 116-131.
63. Дмитриева Т.А., Совертков П.И. Координатный метод определения точки Ферма-Торичелли. // ЭММОГиИ. – №2. – 1999, СПб., Мифрил, с. 63-67.
64. Долженко О. Учебник для вуза: каким ему быть? // В мире книг. – 1980, №1.
65. Древс Ю.Г., Дубровский Ю.В. Анализ опыта разработки и внедрения электронного учебника как программно-методического комплекса // Информатика и информационные технологии в педагогическом образовании. – Красноярск, 1997. – С. 53-56.
66. Дубровский В.Н., Позняков С.Н., Динамическая геометрия в школе. Занятие 3. Геометрические преобразования // компьютерные инструменты в школе. 2008, №3, стр. 24-35.
67. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик. – М.: Наука, 1989. – 224 с.
68. Дьяконов В.П. Справочник по системе символьной математике Derive. – М.: СК-Пресс /PC Week, 1998. – 256 с.
69. Дьяконов В.П. Системы символьной математики Mathematica 2 и Mathematica 3. – М.: СК-Пресс /PC Week, 1998. – 318 с.
70. Дьяконов В.П. Математическая система Maple V R.3/R.4/R.5. - М.: Солон, 1998. – 400 с.
71. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MathCAD 7 в математике, в физике и в Internet. – М.: Нолидж, 1998. – 352 с.
72. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1978.
73. Загвязинский В.И., Гриценко Л.И. Основы дидактики высшей школы. – Тюмень: ТГУ, 1978.

74. Загляднов И.Ю., Касаткин В.Н. Построение изображений на экране персональной ЭВМ. – Киев: «Тэхника», 1990.
75. Зильберберг Н.И. Информационные технологии в профессиональной подготовке будущих учителей математики // Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки будущих учителей математики в педвузах: прошлое, настоящее, будущее. – М., 2000. – С. 203-204.
76. Иванов В.П., Батраков А.С. Трёхмерная компьютерная графика. – М.: Радио и связь, 1994.
77. Инструментальные средства для конструирования программных средств учебного назначения: (Обзор) / Ин-т проблем информатики АН СССР. Отв. ред.: Г.Л. Кулешова.– М., 1990 – 37 с.
78. Интенсификация учебного процесса как средство профессиональной подготовки будущего учителя математики: Тезисы Всероссийского межвузовского семинара. – Ярославль: ЯГПИ им. К.Д. Ушинского, 1990. – 133 с.
79. Каган В.И., Сычеников И.А. Основы оптимизации процесса обучения в высшей школе. – М.: Высшая шк., 1987.
80. Киселёв А.П. Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1980.
81. Климов В.Е. Графические системы САПР. // Разработка САПР. Кн.7. – М.: Высшая школа, 1990.
82. Когдов Н.М., Семёнова Е.Ю. ЭВМ в образовательных системах развитых капиталистических стран // Новые информационные технологии в образовании. – Вып. 1. – М., 1990.
83. Кокс Д., Литл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы: введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. – М.: Мир, 2000.
84. Колмогоров А.Н., Семенович М.Б., Черкасов Р.С. Геометрия 6–8. – М.: Просвещение, 1979.
85. Комягин В.Б. 3D Studio. – М.: Эком, 1996.

86. Комягин В.Б., Коцюбинский А.О. CorelDRAW 7 в примерах. – М.: Триумф, 1997.
87. Концепция информатизации образования. // Информатика и образование. – 1990. №1 – С. 3-9.
88. Корнилов П.А. и др. Лабораторный практикум по аналитической геометрии с применением ПК. Ч.1. – Ярославль, 1998.
89. Корнилов П.А. и др. Лабораторный практикум по аналитической геометрии с применением ПК. Ч.2. – Ярославль, 1999.
90. Котов Ю.В. Как рисует машина? – М.: Наука, 1988.
91. Котов Ю.В., Павлова А.А. Основы машинной графики. – М.: Просвещение, 1993.
92. Кривошеев А.О. Проблема развития компьютерных обучающих программ / Высшее образование в России. – №3. – 1994.
93. Кузнецов А.А., Сергеева Т.А. Компьютерная программа и дидактика // Информатика и образование. – №2. – 1986. – С. 87-90.
94. Кузнецов Э.И. Общеобразовательные и профессионально-прикладные аспекты изучения информатики и вычислительной техники в педагогическом институте. Автореф. дисс…докт. пед. наук. – М., 1992.
95. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. –М.: Наука, 1990.
96. Куприенко В.Д., Мещерин И.В. Педагогические программные средства: Метод. рекомендации для разработчиков ППС. Ч. II. – Омск: Омский гос. пед. ин-т им. А.М. Горького. 1991. – 64 с.
97. Куценко Л.Н. Машинная графика в задачах проекционной природы // Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика». – №8. – М.: Знание, 1990. –48 с.
98. Ланда Л.Н. Алгоритмизация в обучении. // Под общ. ред. Б.В. Гнеденко и Б.В. Бирюкова. – М.: Просвещение, 1996. – 523 с.

99. Лаптев В.В., Швецкий М.В. Метод демонстрационных примеров в обучении информатике студентов педагогического вуза. // ИНФО. – №2, 1994.
100. Лапшин Е. Компьютерная графика для IBM PC. – М.: Солон, 1995.
101. Лернер И.Я. Дидактическая система методов обучения // Новое в жизни, науке, технике. Сер. “Педагогика и психология” – №3. – М.: Знание, 1976.
102. Лернер И.Я., Скаткин М.Н. О методах обучения // Сов. педагогика. – 1965. – №3.
103. Мазниченко Д.С., Шкаев А.В., Шумейко И.В. Графический редактор Paintbrush. – М.: Радио и связь, 1994.
104. Майер В. Р. Компьютерная поддержка курса геометрии. Ч.1. Геометрия на плоскости: Методическое пособие. – Красноярск, 1995.
105. Майер В. Р., Елина А.М. Геометрические построения на плоскости: Методические рекомендации по изучению темы. –Красноярск, 1990.
106. Майер В. Р., Одинцова О.П., Пак Н.И. Курс “Компьютерная графика и геометрическое моделирование” в системе педобразования // Подготовка преподавателя математики и информатики для высшей и средней школ. – М., 1994. – С. 169-170.
107. Майер В. Р., Одинцова О.П., Пак Н.И., Туранова Л.М. Программа курса «Компьютерная графика и геометрическое моделирование» // Информатика и НИТ в педобразовании. – №2. – Омск, 1995.
108. Майер В. Р., Пак Н.И., Семчанков В.А. Компьютерное моделирование, как средство уровневой и профильной дифференциации обучения // Подготовка учителя математики в педвузах в условиях профильной и уровневой дифференциации обучения в школах: Тезисы Всероссийского межвузовского семинара. – Елабуга, 1994. – С. 19.

109. Майер В. Р., Царёв С.П. Контрольные задания по топологии и дифференциальной геометрии: Методическое пособие. – Красноярск, 1987.
110. Майер В.Р. Банк базисных задач по геометрии // Информатика и информационные технологии в педагогическом образовании. – Красноярск, 1997. – С. 85-86.
111. Майер В.Р. Геометрия и информатика, пути интеграции // Подготовка будущего учителя к работе в условиях углублённого изучения математики в школе: Тезисы XVII Всероссийского семинара преподавателей математики и методики её преподавания педвузов. – Калуга, 1998.
112. Майер В.Р. Использование компьютерных методов обучения в геометрии – один из путей реализации гуманитарного потенциала математического образования // Гуманитарный потенциал математического образования в школе и педвузе: Тезисы докладов XV Всероссийского семинара преподавателей математики педвузов. – СПб., 1996. – С. 173.
113. Майер В.Р. Комплексный подход к проблеме использования современных информационных технологий в преподавании геометрии // Некоторые аспекты управления учебной деятельностью в педвузе. Красноярск, – 1997. – С. 53-65.
114. Майер В.Р. Компьютерная поддержка курса геометрии. Ч.2 Геометрия в пространстве: Учебное пособие. – Красноярск, 1996.
115. Майер, В.Р. Применение информационных технологий при изучении геометрических преобразований плоскости в педагогическом вузе / В.Р. Майер, М.С. Тиличеев, Т.В. Апакина // Сборник научных трудов коллектива научной школы «Качество педагогического образования» КГПУ им. В.П. Астафьева – Красноярск: РИО КГПУ им. В.П. Астафьева. – 2009. С.167-187.

116. Майер В.Р. Компьютерное конструирование поверхностей в школьном факультативном курсе // Материалы II Всероссийской научно-методической конференции. –Красноярск, 2000. – С. 87.
117. Майер В.Р. Компьютерные технологии обучения в курсе геометрии // Математика в вузе и школе: обучение и развитие.– Новгород, 1997. – С. 17-18.
118. Майер В.Р. Математический ассистент «DERIVE» на занятиях по геометрии // Региональные проблемы информатизации образования. – Пермь, 1999. – С. 204-205.
119. Майер В.Р. О возможностях интеграции курсов классической и компьютерной геометрий // Вестник Хакасского государственного университета, вып. 2. Серия 1: Математика, информатика. – Абакан, 1998. – С. 16-19.
120. Майер В.Р. О комплексном подходе к проблеме использования современных информационных технологий в преподавании геометрии // Новые информационные технологии в университетском образовании: Материалы международной научно-практической конференции. – Новосибирск, 1996. – С. 159.
121. Майер В.Р. О проектно-компьютерном обучении в курсе геометрии // Новые информационные технологии подготовки специалистов: Тезисы докладов Всероссийского семинара по проблема м информатизации вуза. – Красноярск: КГАЦМиЗ, 1996. - С. 11.
122. Майер В.Р. Об использовании в курсе геометрии педвуза компьютерных технологий обучения // Содержание и методы обучения математике в школе и вузе на рубеже столетий. – Брянск, 1999. – С. 158-159.
123. Майер В.Р. Об использовании компьютерных технологий при изучении геометрических преобразований // Новые информационные технологии в университетском образовании: Материалы

международной научно-практической конференции. – Новосибирск: НГУ, 1998. – 2 с.

124. Майер В.Р. Об использовании компьютерных технологий при решении задач // Тезисы зональной конференции. – Магнитогорск, 1999. –1 с.

125. Майер В.Р. Об использовании средств программирования в вузовском курсе геометрии // Применение новых технологий в образовании: Материалы VII Международной конференции. – Троицк, 1996. – С. 103-104.

126. Майер В.Р. Пакет «MAPLE» в системе геометрической подготовки учителя математики // Тезисы международной конференции. – Самара, 1999.

127. Майер В.Р. Программирование как инструмент познания в курсе геометрии // Информатика и образование, – №5, 1997. - С. 15-18.

128. Майер В.Р. Программирование как инструмент построения знаний в курсе геометрии педагогического университета // Новые информационные технологии в университетском образовании: Материалы международной научно- практической конференции. – Новосибирск: НГУ, 1997. – С. 45-46.

129. Майер В.Р. Профессионально-педагогическая направленность применения компьютерных технологий обучения в процессе геометрической подготовки учителя математики // Труды Всероссийского научного семинара преподавателей математики педагогических вузов. – М.: МПГУ, 2000. – С. 151-152.

130. Майер В.Р. Спецкурс “Компьютерная геометрия” для будущих учителей математики // Применение новых технологий в образовании: Материалы IX Международной конференции. – Троицк, 1998.

131. Майер В.Р. Учебно-методические пособия по компьютерной поддержке курса геометрии // Методическое обеспечение учебного

процесса – важнейший фактор в совершенствовании подготовки специалистов. – Красноярск: КГУ, 1997. – С. 51-55.

132. Майер В.Р. Учебные информационно-ориентированные проекты по геометрии // Некоторые аспекты управления учебной деятельностью в педвузе. – Красноярск, 1997. – С. 73-80.

133. Майер В.Р., Одинцова О.П. Элементы компьютерной графики в основном курсе геометрии // Новые информационные технологии в педагогическом образовании. – Магнитогорск, 1995. – С. 84-85.

134. Майер В.Р., Одинцова О.П., Оренчук Н.С. О проблемах компьютерной поддержки курса геометрии в условиях двухуровневой системы обучения // Проблемы двухступенчатой подготовки учителя математики в педвузах. – Липецк, 1993. – С. 128-129.

135. Майер В.Р., Одинцова О.П., Ровенский В.Ю. Развитие пространственного воображения и творческих способностей студентов средствами вычислительной техники и информатики в курсе геометрии // Гуманизация и демократизация учебно-воспитательного процесса в педвузе и школе. Красноярск, 1992. – С.48-49.

136. Майер В.Р., Пак Н.И. Использование компьютерной графики и геометрического моделирования в обучении // Высшее техническое образование в новых социально-экономических условиях: Тезисы докладов межвузовской научно-методической конференции с международным участием. – Красноярск, 1994. – С. 89.

137. Майер В.Р., Рашкин Л.Д. и др. Профессиональная образовательная программа подготовки студентов дневного отделения по специальности “010100 - математика” с дополнительной специальностью “030100 - информатика”. – Красноярск, 2000.

138. Майер В.Р., Ровенский В.Ю. О психолого-педагогических аспектах компьютеризации геометрических дисциплин в вузе // Психолого-

педагогические основы преподавания математических дисциплин в пединституте. Обучение и развитие: Тезисы Всероссийского межвузовского семинара. – Ульяновск, 1991. – С. 194.

139. Майер В.Р., Ронжин Н.Л. Применение преобразований пространства при компьютерном конструировании многогранников // Материалы II Всероссийской научно-методической конференции. – Красноярск: РИО КГПУ, 2000. –С. 87-88.

140. Майер В.Р., Семчанков В.А. Использование компьютерных технологий в школьном курсе геометрии // Подготовка будущего учителя к работе в условиях углублённого изучения математики в школе: Тезисы XVII Всероссийского семинара преподавателей математики и методики её преподавания педвузов. – Калуга, 1998.

141. Майер В.Р., Симонова А.Л. Решение геометрических задач позиционного характера с помощью ЭВМ // Проблемы высшего образования на пороге XXI века: Тезисы докладов региональной межвузовской научно-методической конференции. – Красноярск, 1997. – С. 38.

142. Майер В.Р. Методическая система геометрической подготовки учителя математики на основе новых информационных технологий: Монография. – Красноярск: РИО КГПУ, 2001. – 368 с.

143. Майер В.Р., Анциферова А.В. «Живая геометрия» как средство развития исследовательских умений студентов в условиях индивидуально-ориентированного обучения // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2010 (2). С. 9–16.

144. Майер В.Р., Анциферова А.В., Апакина Т.В. Решение треугольников с параметрами. Компьютерное сопровождение: учебное пособие / Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. – Красноярск, 2011. – 192 с.

145. Майер В.Р. Компьютерные исследования и эксперименты при обучении геометрии / В.Р.Майер// Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2012, №4 (22), стр. 22-27.
146. Майер В.Р., Крум Е.В. Информационные технологии в обучении проективной геометрии будущих учителей математики / В.Р.Майер, Е.В. Крум // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2014, №1 (73), стр. 92-95.
147. Майоров В.М. и др. Задачи по объединённому курсу геометрии. Ч.2. Аналитическая геометрия в пространстве. – Ярославль, 1984.
148. Майоров В.М. и др. Задачи по объединённому курсу геометрии. Ч.3. Дифференциальная геометрия; элементы топологии. – Ярославль, 1988.
149. Майоров В.М., Жаров В.А., Корнилов П.А., Сидоров Л.А. Методические указания к практикуму по геометрии с программным обеспечением для ЭВМ. Ч.1. Разделы: Векторная алгебра. Аналитическая геометрия на плоскости. – Ярославль, 1987.
150. Майоров В.М., Корнилов П.А., Сидоров Л.А. Методические указания к практикуму по геометрии с программным обеспечением для ЭВМ. Ч.2. Раздел: Аналитическая геометрия в пространстве. – Ярославль, 1988.
151. Майоров В.М., Сидоров Л.А., Корнилов П.А., Смирнова Е.Ю. Формирование базового геометрического образования // Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки учителя: Межвузовский сборник научных трудов. – М., 1992. – С. 56-60.
152. Мартин Ф. Моделирование на вычислительных машинах. – М.: «Советское радио», 1972.

153. Марюков М.Н. Введение в компьютерную геометрию. Учебное пособие. – Брянск: Изд-во БГПУ, 1997.

154. Марюков М.Н. Использование компьютерных технологий при изучении геометрии в школе // Педагогическая информатика. –№2. – 1998. – С.21-28.

155. Марюков М.Н. Компьютер на уроках геометрии в школе: Учебное пособие. – Брянск: Изд-во БГПУ, 1997. –100 с.

156. Марюков М.Н. Компьютерные обучающие системы в геометрии // Математика в школе, – 1997, – №2, – С. 35-37.

157. Марюков М.Н. Научно-методические основы использования компьютерных технологий при изучении геометрии в школе. Дис…д-ра пед. наук: 13.00.02. – М., 1998.

158. Могилёв А.В., Пак Н.И., Хеннер Е.К. Информатика: Учебное пособие. – М.: Академия. – 1999.

159. Монахов В.М. Аксиоматический подход к проектированию педагогической технологии // Педагогика. – 1997. – № 6.

160. Монахов В.М. Проектирование и внедрение новых технологий обучения // Народное образование. – 1990. – № 7.

161. Мордкович А.Г. О профессионально-педагогической направленности подготовки будущих учителей // Сов. педагогика. – 1985. – №12.

162. Мордкович А.Г. О профессионально-педагогической направленности математической подготовки будущих учителей математики // Математика в школе. – 1984. – №6.

163. Мордкович А.Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в пединституте. Автореферат дис…д-ра пед. наук: 13.00.02. – М., 1986.

164. Низамов Р.А. Дидактические основы активизации учебной деятельности студентов. – Казань: Изд-во КГУ, 1975.

165. Никандров Н.Д. Организационные формы и методы обучения в высшей школе // Проблемы педагогики высшей школы. – Л., 1972.

166. Ньюмен У., Спрулл Р. Основы интерактивной графики. – Мир, 1985.
167. Обучающая программно-методическая система «Многогранники»: Метод. рекомендации для учителя / [Казанский произв. комбинат прогр. средств; И.В. Роберт, Л.Л. Якобсон] – М., 1990. – 51 с.
168. Одинцова О.П. Введение в систему автоматизированного проектирования AutoCAD. – Красноярск: КГПУ, 1995.
169. Одинцова О.П. Совершенствование геометрической подготовки учителя математики средствами курса «Компьютерная графика и геометрическое моделирование». Автореферат дис…канд. пед. наук: 13.00.02. – Омск, 1997.
170. Основы дидактики / Под ред. Б.П. Есипова. – М., 1967.
171. Павлидис У. Алгоритмы машинной графики и обработка изображений. – М.: Радио и связь, 1988.
172. Пак Н.И. Компьютерное моделирование в примерах и задачах.– Красноярск: КГПУ, 1995.
173. Пак Н.И., Семёнов С.В. Из опыта использования метода проектов в курсе информатики средней школы // Педагогическая информатика. – №1. – 1997.
174. Педагогика школы / Под ред. И.Т. Огородникова. – М.: Просвещение, 1978.
175. Педагогика. Курс лекций / Под редакцией Г.И. Щукиной и др. – М., 1966.
176. Переверзев Л.Б. Полюбить машины, помогающие учиться: образовательная философия С. Пейперта // ИНФО. – №5. – 1995.
177. Погорелов А.В. Геометрия 7–11. – М.: Просвещение, 1995.
178. Погорелов А.В. Геометрия. – М.: Наука, 1983.
179. Пономарёва Н.Н. Реорганизация теоретического учебного материала для обучения поиску решения задач по стереометрии. Автореф. дисс…канд. пед. наук, – СПб., РГПУ, 1989.

180. Потоцкий М.В. О педагогических основах обучения математике. – М.: Учпедгиз, 1963.
181. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. – М.: Наука, 1989.
182. Пушкарева Т.П. Научно-методические основы обучения математике будущих учителей естествознания с позиций информационного подхода. Дис…д-ра пед. наук: 13.00.02. – Красноярск, 2013
183. Роберт И.В. Современные информационные технологии в образовании: дидактические проблемы; перспективы использования. – М.: Школа – Пресс, 1994.
184. Ровенский В.Ю. Геометрия поверхностей с Maple. – Красноярск: КГПУ, 1997.
185. Ровенский В.Ю. Моделирование кривых и поверхностей с помощью β-сплайнов. – Красноярск: КГПИ, 1992.
186. Ровенский В.Ю. На яхте Maple по волнам линий. – Красноярск: КГПУ, 1998.
187. Ровенский В.Ю. Теория кривых: Лекции по дифференциальной геометрии с приложением по Derive. Ч.1. – Красноярск: КГПУ, 1996.
188. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. – М.: Мир, 1989.
189. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Машиностроение, 1980.
190. Рыжик В.И., Исследовательские сюжеты для среды «The Geometer′s Sketchpad» // Компьютерные инструменты в образовании. 2003. №3. С. 14-20.
191. Савёлов А.А. Плоские кривые. – М.: Физматгиз, 1960.
192. Савельев А.Я. Технологии обучения и их роль в реформе высшего образования // Высшее образование в России. – 1994.– №2.
193. Садовничий В. А. Математическое образование: настоящее и будущее // Доклад на Всероссийской конференции «Математика и

общество. Математическое образование на рубеже веков». – Дубна, 2000.

194. Сайдашёв А.А., Хеннер Е.К., Шестаков А.П. Некоторые вопросы совершенствования подготовки учителей математики в связи с компьютеризацией // ИНФО. – №1. –1993.

195. Селевко В.Г. Современные педагогические технологии. – М.: Народное образование, 1998.

196. Сквирский В.Я. Системный подход к анализу учебно-воспитательного процесса и определению его путей совершенствования. – М.: МАДИ, 1986.

197. Слива М.В., Совертков П. И. Треугольники Наполеона на экране компьютера // ЭММОГиИ. – №4. – 2000. – СПб.: Мифрил. – С. 59-69.

198. Слива М.В., Совертков П. И., Нагорный С.А. Окружность девяти точек на экране компьютера // ЭММОГиИ. – №4. – 2000.– СПб.: Мифрил. – С. 70-78.

199. Слива М.В., Совертков П. И., Хохлов Д.Н. Геометрический паркет – I // ЭММОГиИ. – №4. – 2000. – СПб.: Мифрил. –С. 3-19.

200. Совертков П. И., Енбаева Е.А. Равносторонний пятиугольник Рейнхарда // ЭММОГиИ. – №3. – 2000. – СПб.: Мифрил. –С. 68-75.

201. Совертков П. И., Тушканов И.М. Арбелос Архимеда на экране компьютера // ЭММОГиИ. – №2. – 1999. – СПб.: Мифрил. – С. 68-75.

202. Совертков П. И., Хохлов Д.Н. Вписанная и вневписанная окружности для произвольного треугольника на экране компьютера // ЭММОГиИ. – №3. – 2000. – СПб.: Мифрил. – С. 56-63.

203. Совертков П. И., Хохлов Д.Н., Замечательные точки треугольника на экране компьютера // ЭММОГиИ. – №3. – 2000. – СПб.: Мифрил. – С. 64-68.

204. Совертков П.И. Дисциплины специализации по элементарной математике и методология молодёжного творчества. // ЭММОГиИ. – №4. – 2000. – СПб.: Мифрил. – С. 37-45.

205. Тимофеенко А.В. Движения выпуклых тел на экране компьютера // Вестник Хакасского государственного университета, вып. 2. Серия 1: “Математика, информатика”. –Абакан, 1997. – С. 28-33.
206. Тупальский Н.И. Основные проблемы вузовского учебника. – Минск: Вышэйшая шк., 1976.
207. Фискович Т.Т. Геометрия для старшеклассников и абитуриентов. – М.: Добросвет, 2000.
208. Фокс А. Пратт М. Вычислительная геометрия применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1972.
209. Фоли Дж., Ван Дэм А. Основы интерактивной машинной графики. Ч I, II. – 1985.
210. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Т1, 2.– М.: Просвещение, 1982, 1983.
211. Хамов Г.Г. Методическая система обучения алгебре и теории чисел в педвузе с точки зрения профессионально-педагогического подхода. – СПб.: РГПУ, 1993.
212. Хирн Д., Бейкер М.П. Микрокомпьютерная графика // Пер. с англ. – М.: Мир, 1987.
213. Христочевский С.А. Информатизация школьного образования: почему так медленно? // ИНФО. – №3. – 1997.
214. Цевенков Ю. Н., Семёнова Е.Ю. Эффективность компьютерного обучения // Новые информационные технологии в образовании. – Вып. 6. – М., 1991.
215. Шабанова М.В., Безумова О.Л., Ерилова Е.Н., Котова С.Н., Ларин С.В. и др. Обучение математике с использованием возможностей GeoGebra. – М.: Издательство Перо, 2013. – 128 с.
216. Шарыгин И.Ф. К концепции школьной геометрии // Геометрия в школе, реальность и перспективы: Материалы конференции. – М., 1998.

217. Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. – М.: МИРОС, 1995.
218. Шахмаев Н.М. Дидактические проблемы применения ТСО в средней школе. – М.: Педагогика, 1973.
219. Шикин Е.В., Боресков А.В. Компьютерная графика. Динамика, реалистические изображения. – М.: Диалог-МИФИ, 1995. – 288 с.
220. Шикин Е.В., Боресков А.В., Зайцев А.А. Начала компьютерной графики. – М.: Диалог-МИФИ, 1993.
221. Шкерина Л.В. Теоретические основы технологий учебно-познавательной деятельности будущего учителя математики в процессе математической подготовки в педвузе: Монография.– Красноярск: РИО КГПУ, 1999. – 356с.
222. Эгрон Г. Синтез изображений. Базовые алгоритмы. // Пер. с фр. – М.: Радио и связь, 1993.
223. Яковлева Т.А. Создание учебных программных средств на основе технологии компьютерного моделирования. // Автореф. дисс…канд. пед. наук, – М., 1993.
224. A. Guergueb, J. Mainguen, Roy. Examples of automatic theorem proving a real geometry // Proc. – ISSAC. –1994. P. 20 – 24.
225. Chou S.- C. Mechanical Geometry Theorem Proving. Reidel Publ.– Dordrecht, 1988.
226. D. Kapur, T. Saxena, Lu Yang. Algebraic and geometric reasoning using Dixon resultants // Proc. ISSAC. – 1994. P. 99 – 107.
227. Derry, S. J. (1990) Flexible cognitive tools for problem solving instruction. Paper presented at the annual meeting of The American Educational Research Association, Boston, MA, April, 16-20.
228. Devaney R.L. Chaos, Fractals, and Dynamics. Addison-Wesley, USA, 1990.
229. Devaney R.L. The Fractal Geometry of the Mandelbrot set // Видеофильм. Key Curriculum Press, USA, 1996.

230. Duffy T. M., Jonassen D. H. (1992). Constructivism: New implications for instuctional technology. In T. M. Duffy & D. H. Jonassen (Eds.), Constructivism and the technology of instruction: A conversation (pp. 1 – 16). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

231. Gebauer, M. Kalkbrener, B. Wall and F. Winkler. CASA: A computer algebra package for constructive algebraic geometry // Proc. ISSAC. – 1991 – P. 403-410.

232. Grabinger, R. S., Wilson, B. G. & Jonassen, D. H. (1990). Designing expert systems for education. New York.

233. Jonassen, D.H., Wilson, B.G., Wang S. & Grabinger, R. S. (1993). Constructivistic uses of expert systems to support learning. Journal of Computer Based Instruction, 20(3), 86-94.

234. King J.R. Geometry through the circle with the Geometer`s Sketchpad. Key Curriculum Press, USA, 1996.

235. Laborde J.-M. Cabri geometry 2. / Geometry for the world / Texas Instruments, USA, 1997.

236. Michael N. Maryukov. Computer technologies m school geometry education // The Mathematics Educator. – 1997. – Vol. 2. – №1, Association of Mathematics Educators, Singapore. P. 71-83.

237. Oscar E., Ruiz S., P.M. Ferreira. Algebraic geometry and group theory in geometric constraint satisfaction // Proc. ISSAC. – 1994. P. 224-233.

238. Pea, R. D. (1985). Beyond amplification: Using the computer to recognize mental functioning. Educational Psyhologist, 20(4), 167-182.

239. Perkins, D. N. (1993). Person – plus: A distributed view of thinking and learning. In G. Salomon (Ed.), Distributed cognition's.: Psychological and educational considerations (pp. 88 – 110). Cambridge University Press.

240. S. Stifter. Geometry theorem proving in vector spaces by means of Groebner bases // Proc. ISSAC. – 1993. – P. 301-310.

241. Salomon, G., Perkins, D. N., & Globerson, T. (1991). Partners in cognition: Extending human intelligence with intelligent technologies. Educational Researcher, 20(3), 2-9.

242. Scher D. Exploring Conic Sections with the Geometer`s Sketchpad. Key Curriculum Press, USA, 1995.

243. U. Walther. Algorithmic Computation of de Rham Cohomology of Complements of Complex Affine Varieties, J. Symbolic Computation, 2000. – V. 29. – P. 795-839

244. Walter Whiteley, "Invariant Computations for Analytic Projective Geometry", Journal of Symbolic Computation, 1991. – V. 11. – No 5-6. – P. 549-578.